# THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées
Laboratoire de mathématiques et applications - LMA (Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM (Poitiers)
Secteur de recherche : Mathématiques et leurs interactions

Présentée par :
Claire Tête

## Profondeur, dimension et résolutions en algèbre commutative : quelques aspects effectifs

Directeur(s) de Thèse :
Lionel Ducos

Soutenue le 21 octobre 2014 devant le jury

Jury :

| | | |
|---|---|---|
| Président | **Karim Belabas** | Professeur des Universités, Université de Bordeaux |
| Rapporteur | **Thierry Coquand** | Professor, Göteborgs universitet |
| Rapporteur | **Marc Chardin** | Chargé de recherche CNRS, Institut Mathématiques de Jussieu |
| Membre | **Lionel Ducos** | Maître de conférences, Université de Poitiers |
| Membre | **Marc Van Leeuwen** | Professeur des Universités, Université de Poitiers |
| Membre | **Laurent Busé** | Chargé de recherche, INRIA de Sophia-Antipolis |
| Membre | **Jean-Pierre Jouanolou** | Professeur émérite, Université de Strasbourg |

**Pour citer cette thèse :**
Claire Tête. *Profondeur, dimension et résolutions en algèbre commutative : quelques aspects effectifs* [En ligne]. Thèse Mathématiques et leurs interactions. Poitiers : Université de Poitiers, 2014. Disponible sur Internet <http://theses.univ-poitiers.fr>

# THÈSE

**pour l'obtention du grade de**
**Docteur en Mathématiques**

présentée par

**Claire TÊTE**

---

## PROFONDEUR, DIMENSION ET RÉSOLUTIONS EN ALGÈBRE COMMUTATIVE : QUELQUES ASPECTS EFFECTIFS

---

Directeur de thèse : Lionel DUCOS

Rapporteurs :

Marc CHARDIN, Chargé de recherche au CNRS, à l'Institut de Mathématiques de Jussieu
Thierry COQUAND, Professeur à l'Université de Göteborg

Soutenue le 21 Octobre 2014
devant le jury

| | | |
|---|---|---|
| Karim BELABAS | Professeur, Université de Bordeaux I | Examinateur |
| Laurent BUSÉ | Chargé de recherche, Inria Sophia-Antipolis | Examinateur |
| Lionel DUCOS | Maître de conférences, Université de Poitiers | Directeur |
| Jean-Pierre JOUANOLOU | Professeur émérite, Université de Strasbourg | Examinateur |
| Marc van LEEUWEN | Professeur, Université de Poitiers | Examinateur |

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Lionel Ducos, mon directeur de thèse. Sans lui, je n'aurais jamais pu être au départ de ma course préférée « le 3 000 mètres effectif » et encore moins franchir la ligne d'arrivée. Son entrain et sa disponibilité m'ont permis de faire la course avec le sourire, et ses encouragements m'ont donné les ressources nécessaires pour parcourir les derniers hectomètres.

Je remercie chaleureusement Marc Chardin et Thierry Coquand qui ont pris le temps de relire consciencieusement mon travail. Je remercie également Karim Belabas, Laurent Busé, Jean-Pierre Jouanolou et Marc van Leeuwen pour l'honneur qu'ils me font d'être dans le jury. Je tiens à renouveler ici mes remerciements à Jean-Pierre Jouanolou pour ses remarques concernant le chapitre III et surtout pour avoir accepté que son théorème figure dans cette thèse.

Je remercie également les personnes qui m'ont aidée et offert la possibilité d'exposer mes travaux. Merci à Claude Quitté pour m'avoir prêté main-forte en Magma à de nombreuses reprises. Merci à Emmanuel Hallouin pour m'avoir invitée à Toulouse. Merci à Henri Lombardi pour l'organisation du petit groupe de travail à Luminy. Et enfin, tack så mycket à Thierry Coquand pour son invitation au workshop « Constructive Homological Algebra » à Oberwolfach et dernièrement au workshop « MAP » à l'IHP.

Je remercie tous les membres du laboratoire grâce à qui, ma thèse s'est déroulée dans les meilleures conditions. Je pense notamment à Jocelyne Attab, Brigitte Brault, Nathalie Marlet, Benoît Métrot et Nathalie Mongin. Merci également à tous les doctorants en particulier à mes coéquipiers au foot mais aussi, et surtout, à mes colocataires du bureau 0-31. Blandine et Dima : merci pour vos preuves effectives du théorème « Bonté-Générosité ». Charlène : en mai dernier, le cygne venait annoncer la fin de nos années d'étudiantes. Mais nous avons partagé tellement de choses ensemble que notre amitié perdurera.

Je n'oublie pas de remercier les personnes qui, à leur façon, ont renforcé mon goût pour les mathématiques. À commencer par mon cousin Jean-Philippe qui m'a initiée depuis mon plus jeune âge à nier la proposition « tous les lapins mangent des carottes ». Claude Quitté pour ses mots du jour, le plus fameux d'entre eux étant « voir avec ses yeux » : au programme les polynômes cyclotomiques et surtout $\Phi_{105}\ldots$ Et enfin, Rached Mneimné pour ses ensembles pointés, ses matrices échelonnées ou encore ses coniques CABRI-animées.

Je remercie tous mes amis qui m'ont soutenue pendant cette thèse et qui ont su me sortir de mes bouquins de maths ! Mention spéciale aux choristes de l'ensemble Josquin des Prés (j'ai glissé pour vous un petit clin d'oeil musical dans cette thèse, saurez-vous le retrouver ?).

Enfin, je remercie mes parents pour leur amour et pour m'avoir permis de rédiger cette thèse dans des conditions inégalées. Merci également à mes frères et soeurs pour leur affection. Et je termine en remettant un prix spécial à notre setter anglais, Craft, qui est bien le seul à la maison avec qui je puisse parler d'algèbre commutative !

*à mes parents*

# Table des matières


**I Le complexe de Koszul**

1 Le complexe de Koszul d'une forme linéaire $\mu : L \to \mathbf{A}$ . . . 1
2 Dualités . . . 2
2.1 Dualité canonique entre $\bigwedge^d L$ et $\bigwedge^d(L^\star)$ . . . 2
2.2 Dualité entre $\bigwedge^d L$ et $\bigwedge^{n-d} L$ lorsque $L$ est libre de rang $n$ . . . 2
3 Le complexe de Koszul d'une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ . . . 3
3.1 $\mathrm{K}_\bullet(\underline{a})$ est un complexe de modules libres ! . . . 4
3.2 Self-duality of the Koszul complex . . . 4
3.3 La suite $\underline{a}$ annule la (co)homologie Koszul . . . 5
4 Les complexes de Koszul de $\underline{a}$ et $\underline{b}$ quand $\langle \underline{a} \rangle = \langle \underline{b} \rangle$ . . . 5
5 La longue suite en (co)homologie Koszul . . . 6
6 Profondeur mesurée par le complexe de Koszul . . . 6
6.1 Invariance par radical de la profondeur . . . 6
6.2 La Gr-Down-Property . . . 7
6.3 La Gr-Up-Property . . . 8
7 Les morphismes $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}) \leftrightarrow \mathrm{K}^\bullet(\underline{b})$ lorsque $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \subset \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ . . . 9
7.1 Le morphisme adjoint $\widetilde{\wedge}^d(v)$ de $\wedge^d(v)$ . . . 9
7.2 Le morphisme direct $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}) \to \mathrm{K}^\bullet(\underline{b})$ . . . 10
7.3 Le morphisme cotransposé $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}) \leftarrow \mathrm{K}^\bullet(\underline{b})$ . . . 10
8 (Co)Homologie Koszul en $(a, b, ab)$ . . . 11
8.1 La longue suite exacte en $(a, b, ab)$-cohomologie Koszul . . . 11
8.2 De la cohomologie Koszul de $ab$ à celles de $a$ et $b$ et vice-versa . . . 14
8.3 Une approche élémentaire avec du calcul extérieur . . . 15
8.4 Le cas particulier $k = 1$ du $(a, b, ab)$-trick . . . 18

**II Le complexe de Čech**

1 Définition du complexe de Čech . . . 19
2 Propriétés élémentaires de la cohomologie de Čech . . . 20
3 Cohomologie de Čech et profondeur . . . 21
3.1 La fameuse propriété de « depth-sensitivity of the Čech complex » . . . 21
3.2 Résultats préparatoires pour la profondeur du produit de deux idéaux . . . 22
4 Cohomologie de Čech d'un $\mathbf{S}$-module gradué $M$ où $\mathbf{S} = \mathbf{k}[\underline{X}]$ . . . 24
4.1 Le module $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S})$ . . . 24
4.2 Régularité de Castelnuovo-Mumford . . . 26
4.3 Approximation de Čech par Koszul pour un $\mathbf{S}$-module gradué de présentation finie . . . 27
5 Le complexe de Čech est un complexe de modules plats . . . 28
5.1 Acyclicité et unimodularité . . . 30
5.2 Dimension cohomologique . . . 30

**III La suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie de Čech**

1 Un tour d'horizon de la littérature . . . 33
2 Des complexes de « type Čech » . . . 36
2.1 Le complexe de Čech $\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ associé à un complexe simplicial $\Delta$ . . . 36
2.2 Le complexe quotient $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M)/\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ . . . 36
2.3 Invariance par radical de la cohomologie de Čech . . . 36
3 La suite exacte courte de Čech-Mayer-Vietoris . . . 38
4 La cohomologie de la suite exacte courte (Č-M-V) . . . 38
5 Le *ab*-théorème . . . 39
5.1 L'énoncé . . . 39
5.2 La preuve . . . 40
5.3 Le complexe $\mathscr{C} = \check{\mathrm{C}}^{\Delta}$ est contractile . . . 43
6 Le morphisme de liaison . . . 44
7 Les matrices $\gamma_k$ pour $n = m = 2$ . . . 44

**IV A propos de la cohomologie du complexe total d'un bicomplexe**

0 Motivations et état d'esprit du chapitre . . . 49
1 Le lemme de l'escalier . . . 50
2 Cohomologie verticale sur les axes du bicomplexe : énoncés élémentaires . . . 52
2.1 Sur l'axe des $y$ . . . 52
2.2 Sur l'axe des $x$ . . . 53
3 Le fondement du foncteur Tor . . . 53
4 Cohomologie Koszul & Čech . . . 54
4.1 Le bicomplexe Koszul-Čech . . . 54
4.2 Le bicomplexe Čech-Čech . . . 56
5 Les deux filtrations d'un bicomplexe et leur suite spectrale associée . . . 56
6 Relecture « spectrale » de nos énoncés élémentaires . . . 58
6.1 Nullité le long d'une diagonale . . . 58
6.2 Collapsing sur l'axe des $y$ de la page $r \geqslant 1$ . . . 59
6.3 Collapsing sur l'axe des $x$ de la page $r \geqslant 2$ . . . 60
7 Applications . . . 60
7.1 Čech-profondeur = Koszul-profondeur . . . 60
7.2 Inégalité cohomologique . . . 62
8 Addendum . . . 62
8.1 Comment est défini $E_r^{p,q}$ ? . . . 62
8.2 Column/Row-collapsing dans le cas général . . . 65
8.3 Un dernier énoncé . . . 66

**V Profondeur et Régularité**

1 Un bref historique sur la profondeur . . . 69
2 Différentes mesures de la profondeur . . . 71
2.1 True-grade et Koszul-profondeur . . . 72
2.2 Koszul-profondeur et Čech-profondeur . . . 72
2.3 Koszul-profondeur et Ext-profondeur . . . 72
3 Deux propriétés de la profondeur . . . 75
3.1 Profondeur du produit de deux idéaux . . . 75
3.2 Recollement de la profondeur . . . 75
4 Suite 1-sécante . . . 76
4.1 Quelques propriétés élémentaires . . . 76
4.2 Suite 1-sécante et suite Lech-indépendante . . . 78
5 Suite régulière et suite complètement sécante . . . 80

6 Suite complètement sécante et suite 1-sécante . . . 81
6.1 En terrain local cohérent ou en terrain gradué . . . 81
6.2 Sur un anneau cohérent, une suite 1-sécante est complètement sécante . . . 82
7 Suite commutativement régulière . . . 83
8 Acyclicité et Unimodularité . . . 85
9 Les monômes d'une suite quasi-régulière . . . 86
9.1 Suite quasi-régulière et suite quasi-singulière . . . 86
9.2 Une suite 1-sécante est quasi-régulière . . . 87
9.3 Une caractérisation de la quasi-régularité . . . 88
9.4 Quelques propriétés supplémentaires . . . 89
10 1-sécance et dimension de Krull . . . 90

**VI Dimension de Krull**

1 Suites singulières et monoïdes bords . . . 93
1.1 Dimension de Krull d'un module . . . 93
1.2 Une inclusion de monoïdes bords . . . 95
2 Cohomologie de Čech et dimension de Krull . . . 95
2.1 Le dernier module de cohomologie de Čech . . . 95
2.2 Le Kdim-Vanishing-Theorem en cohomologie de Čech . . . 97
2.3 Et pour un module quelconque ? . . . 98
2.4 Où l'on contrôle les exposants figurant dans $0 \in \mathcal{S}(\underline{a}) \Rightarrow \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$ . . . 98
2.5 Le cas particulier des suites de longueur $n = 2$ . . . 100
3 Profondeur et dimension de Krull . . . 101
3.1 L'inégalité « profondeur $\leqslant$ dimension » . . . 101
3.2 Où l'on affine l'inégalité précédente . . . 101
3.3 Profondeur et hauteur . . . 102
3.4 Des inégalités strictes . . . 102
3.5 Normalisation de Noether et profondeur . . . 102
4 Compléter un polynôme homogène en un h.s.o.p. . . . 105
4.1 Compléter un monôme $a_\alpha X^\alpha$ . . . 106
4.2 Compléter $F_\alpha$ grâce à RevLex . . . 107
4.3 Compléter $F$ localement avec Nakayama . . . 110
4.4 Une implémentation en Magma . . . 112
4.5 A propos des $n$-partitions de $m$ . . . 116
5 Suite monomialement dépendante . . . 117
5.1 L'idéal $\mathcal{C}(\underline{a})$, Dépendance, Indépendance . . . 118
5.2 Indépendance analytique dans un anneau local . . . 119
5.3 Une réciproque globale de la section précédente . . . 121
5.4 Des équivalences noethériennes . . . 121
6 Idéal localement radicalement $d$-engendré . . . 123
6.1 La propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ : « $F$ homogène primitif annulant $\underline{a}$ » est locale-globale . . . 124
6.2 La propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ contrôle le nombre de générateurs radicaux locaux de $\langle \underline{a} \rangle$ . . . 124
6.3 Retour sur la Kdim noethérienne . . . 124

**VII Profondeur et Résolution**

1 Le théorème de Ferrand-Vasconcelos généralisé par Jouanolou . . . 127
1.1 L'énoncé de Ferrand-Vasconcelos . . . 127
1.2 L'énoncé de Jouanolou . . . 127
1.3 Démonstration . . . 127
1.4 Le cas $n = 1$ . . . 128
1.5 De $(\mathbf{A}, \mathfrak{a})$ à $(\mathbf{A}', \mathfrak{a}')$ . . . 129
1.6 Résoudre l'idéal $\mathfrak{a}$ et son résiduel $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ . . . 131
1.7 Quelques résultats généraux . . . 131
1.8 Idéaux localement complètement sécants . . . 133

2 Inégalités faisant intervenir Gr et Pd . . . 134
3 Le critère d'exactitude de Buchsbaum-Eisenbud . . . 135
4 Idéaux caractéristiques dans un complexe exact libre . . . 136
4.1 Le lemme du rang stable . . . 136
4.2 Un autre critère de Buchsbaum-Eisenbud . . . 137
5 Idéal parfait . . . 138
5.1 Définition . . . 138
5.2 Une caractérisation . . . 138
5.3 Lien avec la propriété Cohen-Macaulay . . . 139
5.4 Des exemples . . . 139
6 Nombre de Betti multi-gradués d'un idéal monomial . . . 141
6.1 La formule de Hochster . . . 141
6.2 Le cas d'un idéal monomial radical . . . 143
6.3 L'exemple des $n+1$ points de $\mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ . . . 144
6.4 L'idéal squarefree de Veronese $\mathcal{J}_k$ . . . 145

**VIII La construction de Tate dans le cas d'une hypersurface**

0 Présentation de la problématique . . . 147
1 Le pseudo-complexe de Tate $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x},\underline{u})$ . . . 149
1.1 Une première description minimaliste . . . 150
1.2 Une seconde description opérationnelle . . . 151
1.3 L'application $s$ de degré $+1$ . . . 151
1.4 Les composées de $d$ et $s$ . . . 152
1.5 Un opérateur de décalage bien utile . . . 153
1.6 Complexe et condition d'exactitude . . . 155
2 Une traduction matricielle . . . 156
2.1 Bilan pour les yeux . . . 157
2.2 La tête des matrices . . . 157
3 Factorisation matricielle symbolique du produit scalaire . . . 158
3.1 Dans un contexte général . . . 158
3.2 Dans un contexte polynomial . . . 159
4 Une relation dans le complexe de Tate . . . 160
5 Etude de l'application $\varphi = d_n$ . . . 161
6 Enquête sur les idéaux déterminantiels de $\varphi$ sur l'anneau $\mathbf{A}$ . . . 161
6.1 Une belle matrice $M$ pour $\varphi$ . . . 161
6.2 Etude de $\mathcal{D}_r(M)$ et $\mathcal{D}_{r+1}(M)$ . . . 163
7 Point lisse sur une hypersurface . . . 164
8 Quelques exemples . . . 166
8.1 L'anneau $\mathbb{B}_n$ de Jouanolou . . . 166
8.2 L'hypersurface de Fossum . . . 166
8.3 L'exemple de $\mathbb{SL}_2(\mathbf{k})$ . . . 166

**IX Régularité en dimension 1, idéaux inversibles**

1 Objectifs et petit exemple introductif . . . 169
2 Généralités . . . 170
2.1 Module localement monogène, module projectif de type fini de rang 1 . . . 170
2.2 Module localement monogène sur un anneau zéro-dimensionnel . . . 170
2.3 Un résultat (de mathématiques) classique(s) revisité . . . 171
2.4 Racine d'un idéal maximal après extension entière . . . 172
3 Autour de la notion de normalité . . . 173
3.1 A propos de l'algorithme Round 2 . . . 173
3.2 $\mathrm{Stab}(\sqrt{\mathfrak{a}}) = \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{[\mathfrak{a}]} = \mathbf{A}$ . . . 173
3.3 Évitement du conducteur . . . 174

3.4 Anneau normal, anneau de Prüfer . . . 174
4 L'art d'inverser un idéal 2-engendré . . . 176
4.1 Les entiers d'Emmanuel $H_y$ de $y$ associés à un polynôme $P$ . . . 177
4.2 Inversibilité de $\langle 1, y\rangle$ dans un sur-anneau entier sur $\mathbf{A}$ (avec $P$ primitif) . . . 178
4.3 Caractérisation de $\mathbf{A}[H_y]$ de manière intrinsèque . . . 179
4.4 Critère d'inversibilité pour $\langle 1, y\rangle$ . . . 180
4.5 Suite croissante des stabilisateurs . . . 181
5 Le critère de Dedekind pour une algèbre monogène . . . 182
5.1 Enoncé du critère . . . 182
5.2 Une autre démonstration du critère de Dedekind . . . 183
5.3 Évitement du conducteur (*bis repetita placent*) . . . 184
6 Des exemples dans le cas d'une algèbre monogène . . . 185
6.1 $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ inversible . . . 186
6.2 $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ non inversible . . . 186
7 Inverser $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ dans une extension entière de $\mathbf{A}$, au-dessus d'un anneau principal . . . 187
8 Un calcul de fermeture intégrale en dimension 1 . . . 188
9 Une implémentation en Magma . . . 190
9.1 Le coeur du programme . . . 190
9.2 Les fonctions primitives sur les modules et les ordres . . . 192
9.3 Système générateur de $\sqrt{p\mathbf{A}}$ . . . 193
9.4 Entiers d'Emmanuel et matrice de localisation principale pour $(1, y)$ . . . 193
9.5 Pour 2-engendrer un idéal. . . . . 194
9.6 Quelques exemples . . . 195
9.7 Le programme dans son intégralité . . . 196

**A Complexe cône et résolutions dans une suite exacte courte**
1 Complexe cône descendant . . . 205
2 Complexe cône montant . . . 206
3 Longue suite exacte en (co)homologie Koszul . . . 207
4 Résolutions dans une suite exacte courte . . . 207
4.1 Résoudre le conoyau . . . 208
4.2 Résoudre le noyau . . . 208
4.3 Résoudre le milieu à partir des extrémités . . . 210

**B Régularité et Singularité : *memento***
1 Du côté de la Régularité . . . 213
2 Du côté de la Singularité . . . 213
3 Les deux en même temps . . . 214

# Présentation du mémoire

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'Algèbre commutative effective et porte plus précisément sur la théorie de la régularité — régularité est à prendre au sens du chapitre X d'Algèbre Commutative (Profondeur, régularité, dualité) de Bourbaki et non au sens de la régularité de Castelnuovo-Mumford —. Cette théorie semble avoir été maintes et maintes fois étudiée, en témoigne la littérature abondante à ce sujet. Cependant, elle est très souvent développée dans un contexte noethérien. Nous nous démarquons donc de la plupart des auteurs en proposant des énoncés sans hypothèse noethérienne. Mais l'objectif n'est pas de généraliser tel ou tel énoncé à un anneau non noethérien. En levant l'hypothèse noethérienne, on espère surtout échapper aux idéaux premiers et ainsi ne manier que des objets raisonnables, potentiellement implémentables. Essayer de faire apparaître de l'effectif là où apparemment il n'y en a pas est un peu le défi que nous cherchons à relever. Par ailleurs, moins d'hypothèse il y a, plus il est facile de détecter les éléments clés d'une démonstration.

La philosophie générale dans laquelle se déroule la thèse pourrait donc s'énoncer comme suit :

*S'affranchir des hypothèses noethériennes dans l'espoir de capturer l'essence des choses*

Qui dit régularité, dit profondeur. La profondeur est plus connue sous son équivalent anglais *depth* et est la plupart du temps définie en terrain noethérien et à partir des suites régulières. D'ailleurs, Jean Dieudonné le laissait sous-entendre :

> *The concept of regular sequence of elements of a ring A has far-reaching uses in the theory of local rings and in algebraic geometry. It seems, however, that it loses much of its importance when A is not a noetherian ring.* Jean Dieudonné, 1965

Un deuxième défaut majeur est qu'une suite régulière ne reste pas régulière après permutation de ses termes. Considérons l'exemple ultra-classique : $F_1 = (Y-1)X$, $F_2 = Y$, $F_3 = (Y-1)Z$ trois polynômes de $\mathbf{k}[X, Y, Z]$. La suite $(F_1, F_2, F_3)$ est régulière, mais pas la suite $(F_1, F_3, F_2)$ obtenue en permutant les deux derniers termes, ce qui poussera Dieudonné à dire : « *Such unpleasant phenomena greatly reduce the usefulness of the notion of regular sequence* ».

Une notion voisine des suites régulières est celle des suites complètement sécantes, suites dont le complexe de Koszul est exact. On commence à toucher à la bonne mesure de la profondeur. La profondeur est en effet définie à partir de la cohomologie du complexe de Koszul ou de manière équivalente à partir de celle du complexe de Čech. Dans la première partie de la thèse, on revient sur les propriétés fondamentales de ces deux complexes algébriques : définition, longue suite exacte en cohomologie, invariance (ou pas) de la cohomologie par radical et/ou par idéal etc. Le premier chapitre est consacré aux complexes de Koszul descendant et montant. Il se termine par une étude approfondie de la cohomologie de Koszul des suites $(a, \underline{c})$, $(b, \underline{c})$ et $(ab, \underline{c})$ en établissant une longue suite exacte entre les complexes de ces suites. Cette longue suite permet de démontrer l'équivalence suivante, équivalence référencée sous le nom de « Le $(a, b, ab)$-trick en cohomologie Koszul » :

> *Soit $a$, $b$ deux éléments de $\mathbf{A}$ et $\underline{c} = (c_2, \ldots, c_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module et $k$ un entier. En cohomologie Koszul, on a*
>
> $$\mathrm{H}^k(a, \underline{c}\ ;\ M) = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{H}^k(b, \underline{c}\ ;\ M) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{H}^k(ab, \underline{c}\ ;\ M) = 0$$

Nous donnons une preuve structurelle basée sur la construction « mapping-cone » et présentons aussi une preuve calculatoire sans aucun pré-requis si ce n'est la connaissance de l'algèbre extérieure.

Quant à la cohomologie de Čech, son étude doit être réalisée en ayant un oeil sur la cohomologie locale noethérienne tout en gardant à l'esprit que cette cohomologie ne mesure pas les bons objets. Plus précisément, c'est la cohomologie de Čech qui permet de retrouver la cohomologie locale faisceautique de Grothendieck (lorsque cette dernière est appliquée à un schéma affine) et non la cohomologie locale algébrique. Nous nous sommes penchés sur différents résultats en cohomologie locale noethérienne en tentant d'obtenir leur pendant en cohomologie de Čech. Après recherche dans la littérature, on s'aperçoit que la plupart des résultats de base concernant la cohomologie de Čech ont été démontrés. Cependant, nous nous sommes efforcés de fournir des preuves personnelles réutilisant les outils développés par Thierry Coquand, Henri Lombardi et Claude Quitté. C'est le cas par exemple du théorème d'annulation de Grothendieck « par le haut » en cohomologie de Čech : on en trouve une preuve par récurrence et avec un raisonnement par l'absurde dans l'article de Hamilton & Marley [HM07] ; de notre côté, nous fournissons une preuve basée sur les relations de la dimension de Krull figurant dans l'ouvrage [LQ11].

Le chapitre III est consacré à l'établissement de la suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie de Čech sur un anneau commutatif quelconque. Plus précisément, l'énoncé prouvé est le suivant :

> *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif et* $M$ *un* $\mathbf{A}$*-module. On considère* $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *et* $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ *deux suites de* $\mathbf{A}$*. On note* $\underline{ab}$ *la suite constituée des* $nm$ *termes* $a_i b_j$ *dans un certain ordre. Alors on dispose d'une suite exacte longue explicite, dite de Mayer-Vietoris,*

$$0 \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0_{\underline{a},\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0_{\underline{a}}(M) \oplus \check{\mathrm{H}}^0_{\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0_{\underline{ab}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1_{\underline{a},\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1_{\underline{a}}(M) \oplus \check{\mathrm{H}}^1_{\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1_{\underline{ab}}(M) \longrightarrow \cdots$$

Dans la littérature, on trouve cette suite énoncée en cohomologie locale noethérienne et la preuve fait appel à la réalisation de cette dernière cohomologie en tant que limite de Ext, ainsi qu'au lemme d'Artin-Rees. En fait, cette suite existe dans un cadre très général : celui des faisceaux de groupes abéliens à supports dans un fermé d'un espace topologique quelconque. C'est d'ailleurs dans ce cadre général que Grothendieck a initialement développé la cohomologie locale (lors de son séminaire à Harvard en 1961 intitulé « Local cohomology »). Il se trouve que la cohomologie du complexe de Čech coïncide avec la cohomologie locale faisceautique de Grothendieck lorsque l'on considère un faisceau quasi-cohérent sur un schéma affine, *i.e.* lorsque l'on considère un module sur un anneau commutatif. Ainsi, l'énoncé ci-dessus n'est pas révolutionnaire dans le sens où on peut le déduire de l'énoncé très général de Grothendieck. Cependant il n'est pas difficile de constater rapidement que les outils utilisés dans ce chapitre sont radicalement différents de ceux de Grothendieck et surtout infiniment plus simples. Le résultat met en jeu la cohomologie de Čech de certaines suites. Il est donc moral de vouloir le démontrer en faisant appel uniquement au complexe de Čech. C'est ce que nous avons réussi à faire : les objets intervenant dans la preuve sont donc totalement effectifs et compatibles avec d'éventuelles implémentations. Plus précisément, la stratégie adoptée pour démontrer cet énoncé consiste à exhiber une suite exacte courte de complexes de « type Čech » ayant les cohomologies attendues. Ces nouveaux complexes de « type Čech » sont obtenus à partir du complexe de Čech $\check{\mathrm{C}} = \check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\underline{b},\underline{ab}}(M)$ en sélectionnant certains localisés, *i.e.* en sélectionnant certaines parties dans $\mathcal{P}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{ab})$. Une façon naturelle et rigoureuse de traduire cela est d'introduire un complexe simplicial $\Delta$ sur les sommets étiquetés par les scalaires de $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{ab})$ et de considérer le complexe quotient $\check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}'^{\Delta}$ où $\check{\mathrm{C}}'^{\Delta}$ est un sous-complexe ad hoc de $\check{\mathrm{C}}$ dépendant de $\Delta$. Intervient alors une combinatoire relativement étonnante, combinatoire intimement liée à la forme du complexe simplicial $\Delta$.

Comme mentionné plus haut, les complexes de Koszul et de Čech ont des cohomologies voisines dans le sens où les $k$ premiers modules de cohomologies s'annulent (ou non) simultanément (c'est ce qui permettra de mesurer la profondeur). Une façon efficace d'obtenir les équivalences classiques entre ces deux cohomologies est de considérer le bicomplexe construit à partir de ces deux complexes. Le chapitre IV est consacré à la cohomologie du complexe total associé à un bicomplexe. Dans la première partie, nous proposons une approche personnelle et totalement élémentaire des résultats classiques (résultats concernant le collapsing sur les bords du bicomplexe aux pages 1 et 2, si l'on veut parler en des termes « spectraux »). Le traitement est élémentaire car il suffit juste de bien savoir chasser dans les diagrammes ! Ce « diagram chasing » fait l'objet d'un lemme, baptisé « lemme de l'escalier », à partir duquel nous

déduisons, toujours de manière élémentaire, un certain nombre de résultats bien connus par les spécialistes des suites spectrales. La deuxième partie du chapitre se veut être une relecture spectrale de la première partie. On en profite pour revenir sur les faits généraux concernant les suites spectrales associées à un bicomplexe concentré dans le premier quadrant (bicomplexe, filtrations, suites spectrales, collapsing aux bords, edge-morphisms).

Le chapitre V est l'occasion de revenir sur les fondements de la notion clé de la thèse, à savoir la notion de profondeur. Suite à toutes les publications parues à ce sujet depuis les années 50, nous avons tenu à rappeler la chronologie des faits à travers un rapide historique. L'un des pionniers est sans aucun doute Rees pour sa caractérisation, en terme de foncteur Ext, de la longueur maximale des suites régulières (contenues dans un idéal d'un anneau noethérien relativement à un module de type fini). Il est donc normal de vouloir comprendre le lien entre ce foncteur et la cohomologie Koszul, d'autant plus que la définition de la profondeur retenue par Bourbaki repose sur ce foncteur Ext. Inspirés par la lecture de l'article [CQ12], nous avons dégagé un lemme s'apparentant à un lemme de type « Peskine-Szpiro » permettant de régler, par un raisonnement direct, l'équivalence entre la Koszul-profondeur et la Ext-profondeur.

Nous consacrons une section à deux propriétés de la profondeur. La première concerne la formule donnant la profondeur du produit de deux idéaux. Nous donnons une preuve qui, à notre connaissance, ne figure pas dans la littérature. Celle-ci est essentiellement basée sur la suite exacte de Mayer-Vietoris. L'autre propriété traduit le bon comportement de la profondeur vis-à-vis de la localisation, dit autrement : « la profondeur se recolle ». On sait que la profondeur se recolle relativement à une suite unimodulaire, mais en fait la profondeur se recolle relativement à une suite de même profondeur que celle étudiée. Le théorème du bicomplexe est très bien adaptée pour prouver cela.

Ce chapitre est également l'occasion de revenir sur les diverses notions de régularité : suites régulières, suites complètement sécantes, suites 1-sécantes, suites quasi-régulières, suites Lech-indépendantes. On établit le lien entre ces notions qui sont relativement voisines tout en étant différentes ! Notamment, on propose une preuve élémentaire de l'implication 1-sécante $\Rightarrow$ quasi-régulière, basée sur notre $(a, b, ab)$-trick en homologie Koszul pour $k = 1$. Par ailleurs, on introduit la notion de suite quasi-singulière liée aux relations monomiales non-banales, notion qui permet de caractériser les suites quasi-régulières. On voit ainsi, dans un anneau local non nécessairement noethérien, que la conjecture monomiale est trivialement vérifiée lorsque l'idéal maximal est engendré par une suite quasi-régulière.

Une autre notion fondamentale en algèbre commutative sur laquelle il convient de s'attarder est celle de dimension de Krull. Dans le chapitre VI, on revient tout d'abord sur la définition de la Kdim en termes de monoïdes bords en adaptant cette définition à un module quelconque. Cette approche en termes de monoïdes bords montre, de manière efficace, que cohomologie de Čech et dimension de Krull sont intimement liées. Plus précisément, le dernier module de cohomologie de Čech est très sensible au caractère singulier de la suite :

$$\textit{Pour un } \mathbf{A}\textit{-module } M \textit{ et une suite } \underline{a} = (a_1, \ldots, a_n), \textit{ on a } \mathcal{S}(\underline{a})^{-1}M = 0 \;\Rightarrow\; \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(M) = 0.$$

Et cette propriété permet de montrer à moindres frais le théorème d'annulation de Grothendieck « par le haut [1] », baptisé Kdim-Vanishing-Theorem :

$$\textit{Soit } d \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \operatorname{Kdim} M \leqslant d. \textit{ Alors } \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0 \textit{ pour tout } i > d.$$

En termes savants, cela dit que la dimension cohomologique est inférieure à la dimension de Krull. Par ailleurs, ce Kdim-Vanishing-Theorem assure l'inégalité « profondeur $\leqslant$ dimension » qui, reconnaissons-le, est tout à fait naturelle. On peut ensuite améliorer cette inégalité en :

$$\operatorname{Kdim}(M/\underline{a}M) \;\leqslant\; \operatorname{Kdim} M - \operatorname{Gr}(\underline{a}\,; M)$$

La fin du chapitre est relativement éloignée du début de celui-ci mais il est évidemment encore question de dimension ! On propose une version effective du résultat d'Eisenbud (cf. [Eis95], lemme 13.2. p. 286) assurant qu'un polynôme homogène non constant d'un anneau de polynômes à plusieurs indéterminées monté sur un corps est complétable (sous-entendu, en un h.s.o.p.). Par version effective, on entend évidemment « algorithme ». En commençant par traiter le cas d'un monôme, on dégage le procédé clé (relativement astucieux, il faut le reconnaître). Et on finit en fait par obtenir un énoncé bien plus précis,

1. Le théorème d'annulation de Grothendieck « par le bas » n'est ni plus ni moins qu'une reformulation de la profondeur en termes de cohomologie de Čech.

valable sur tout anneau commutatif, mettant en jeu directement le polynôme via ses coefficients (cf. section VI-4). Finalement, notre étude permet d'en déduire le fait suivant :

*Un polynôme homogène, de degré $> 0$, primitif, à coefficients dans un anneau local, est complétable.*

Ce résultat nouveau n'est pas complètement anodin. Comme nous l'expliquions au début, le fait de dégager un résultat général, indépendant de toute hypothèse, est bénéfique. En l'occurrence, ici, cela permet non seulement de retrouver rapidement qu'un système de paramètres d'un anneau local noethérien est analytiquement indépendant, mais surtout d'énoncer une propriété plus générale, non-noethérienne, englobant bien sûr l'indépendance analytique en terrain noethérien. La propriété en question, la voici :

*Considérons une suite de longueur $n$ engendrant l'idéal maximal d'un anneau local. Si cette suite est monomialement dépendante alors l'idéal maximal est radicalement $(n-1)$-engendré.*

Intervient alors une autre notion : celle de suite monomialement dépendante. Inspiré par l'article [KT14], on finit par obtenir une caractérisation peu répandue de la dimension de Krull en terrain noethérien à l'aide de ces suites monomialement dépendantes :

*Un anneau* noethérien *est de dimension de Krull $\leqslant d$ si et seulement si toute suite de longueur $d+1$ est monomialement dépendante.*

Le chapitre VII est l'occasion de revenir sur la théorie des résolutions libres/projectives finies. Le théorème de Ferrand-Vasconcelos : « *un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau local noethérien est engendré par une suite régulière pourvu que $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ soit libre de rang fini et que $\mathfrak{a}$ ait une résolution projective finie* » montre que « régularité » et « résolution » sont deux notions intimement liées. Dans la première section, nous exposons une généralisation du théorème de Ferrand-Vasconcelos due à Jouanolou :

*Soit $\mathfrak{a}$ un idéal d'un anneau commutatif $\mathbf{A}$. Si le $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ contient un libre de rang $n$ facteur direct et si l'idéal $\mathfrak{a}$ admet une $\mathbf{A}$-résolution projective finie, alors* $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \geqslant n$.

Dans l'article [CQ12], T. Coquand et C. Quitté ont abordé la théorie des résolutions libres finies dans un cadre très général. En particulier, les résultats énoncés sont épurés de toute hypothèse noethérienne. Dans le même état d'esprit, nous revisitons un résultat noethérien de Buchsbaum & Eisenbud consacré aux idéaux caractéristiques d'un complexe exact de modules libres :

*On considère un complexe exact de modules libres*

$$L_n \xrightarrow{u_n} L_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{u_2} L_1 \xrightarrow{u_1} L_0$$

*On définit par récurrence la suite $(r_0, r_1, \ldots, r_n)$ via $r_0 = 0$ et la relation $r_i + r_{i+1} = \mathrm{rg}(L_i)$. On note $\mathfrak{D}_k = \mathcal{D}_{r_k}(u_k)$ les idéaux caractéristiques du complexe. Si l'application $u_1$ est de rang stable $r_1 = \mathrm{rg}(L_0)$ et si $\mathrm{Gr}(\mathfrak{D}_1) \geqslant k$, alors $\sqrt{\mathfrak{D}_k} = \cdots = \sqrt{\mathfrak{D}_1}$.*

Le chapitre VIII présente une construction due à Tate dans le cas particulier d'une hypersurface. Dans l'article [Tat57], Tate décrit un procédé général permettant de tuer un cycle dans un complexe et qui conduit au résultat suivant : « *Etant données deux suites régulières $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ et $\underline{F} = (F_1, \ldots, F_c)$ d'un anneau noethérien $S$ avec $F_i \in \langle \underline{X} \rangle$ pour tout $i$, le procédé de Tate permet d'obtenir une résolution libre infinie du $B$-module $B/\langle \underline{x} \rangle$ où $B = S/\langle F_1, \ldots, F_c \rangle$ et $\underline{x}$ désigne l'image de la suite $\underline{X}$ dans le quotient* ». La résolution est obtenue de manière récursive si bien qu'il est difficile de l'expliciter effectivement. Nous nous proposons de revisiter sa construction dans le cas très particulier $c = 1$. Notre approche, totalement élémentaire, permet de dégager dans un cadre général un complexe de modules libres dépendant uniquement de la donnée de deux suites de même longueur d'un anneau commutatif quelconque. Ce complexe possède des propriétés remarquables à travers notamment son caractère ultimement 2-périodique (précieux pour générer des factorisations matricielles) ou encore via sa différentielle de degré $n$ (où $n$ désigne la longueur des deux suites). Son étude permet d'obtenir une résolution de l'idéal d'un point d'une hypersurface : la résolution est libre infinie si le point est singulier et projective finie si le point est lisse, tout ceci étant contrôlé par des identités algébriques générales (sans hypothèse). On illustre ainsi, dans un cas très très particulier, la caractérisation homologique des anneaux noethériens réguliers donnée par Serre ([Bou07, §4, proposition 4]). A ce sujet, signalons que la résolution projective de l'idéal du point lisse que nous obtenons a lieu sur l'anneau de l'hypersurface, ce qui est mieux que sur le localisé en l'idéal du point, comme le dit la théorie. Là encore, la noethérianité n'intervient pas.

Enfin, le dernier chapitre est consacré à la régularité en dimension 1 via l'étude des idéaux inversibles. Nous concentrons plus particulièrement notre attention sur l'inversibilité des idéaux 2-engendrés. Notre étude fournit un nouvel algorithme pour le calcul de l'anneau des entiers d'un corps de nombres et plus généralement pour le calcul de la fermeture intégrale d'un anneau principal dans une extension séparable finie de son corps des fractions (pourvu que les corps résiduels soient parfaits). Expliquons déjà ici pourquoi nous avons choisi de nous intéresser à l'inversibilité des idéaux 2-engendrés. Tout d'abord, la formule générale $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{c}+\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{ab}+\mathfrak{bc}+\mathfrak{ca})$ montre que cela suffit pour inverser tous les idéaux de type fini. De plus, manipuler un idéal 2-engendré est évidemment plus agréable d'un point de vue algorithmique. Enfin, dans notre contexte traitant d'anneaux de Prüfer et de Dedekind, il est utile de savoir que dans un anneau de dimension 1, tout idéal localement principal est 2-engendré (cas particulier d'un théorème de Forster). C'est d'ailleurs la preuve constructive de ce dernier résultat qui nous permet de déterminer un système générateur à 2 éléments de tout idéal inversible.

Nous accompagnons notre étude « théorique » par une implémentation en Magma pour le calcul de l'ordre maximal d'un corps de nombres. Grosso modo, notre algorithme se situe à mi-chemin entre Round 2 et Round 4.

À la fin du mémoire, on trouvera deux appendices. L'un est consacré au complexe cône d'un morphisme de complexes. Cette construction est très utile notamment pour établir les longues suites exactes en cohomologie Koszul et Čech. Nous l'utilisons également pour montrer de manière effective les inégalités reliant les dimensions projectives de 3 modules formant une suite exacte courte. L'autre appendice est un *memento* rassemblant les diverses notions de régularité et de singularité intervenant dans la thèse, surtout dans le chapitre V.

# Chapitre I

# Le complexe de Koszul

## 1 Le complexe de Koszul d'une forme linéaire $\mu : L \to \mathbf{A}$

On commence par définir le complexe de Koszul descendant d'une forme linéaire sur un $\mathbf{A}$-module quelconque $L$ où $\mathbf{A}$ est un anneau commutatif. Le complexe de Koszul montant est défini comme étant le dual du complexe de Koszul descendant.

**Le descendant**

Soit $\mu : L \to \mathbf{A}$ une forme linéaire. On définit le complexe de Koszul descendant $\mathrm{K}_\bullet(\mu)$

$$\cdots \longrightarrow \bigwedge^2 L \longrightarrow \bigwedge^1 L \longrightarrow \bigwedge^0 L \simeq \mathbf{A} \longrightarrow 0$$

muni de la différentielle

$$\partial : \bigwedge^d L \longrightarrow \bigwedge^{d-1} L \qquad \partial(x_1 \wedge \cdots \wedge x_d) \;=\; \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i-1}\, \mu(x_i)\, x_1 \wedge \cdots \wedge \not{x}_i \wedge \cdots \wedge x_d$$

définie à partir du produit intérieur droit $\bigwedge^\bullet(L) \times \bigwedge^1(L^\star) \to \bigwedge^{\bullet-1}(L)$ via $\partial = \bullet \llcorner \mu$. C'est l'unique anti-dérivation à gauche qui prolonge $\mu$. Plus précisément, $\partial : \bigwedge L \to \bigwedge L$ est une application linéaire, de degré $-1$, caractérisée par le fait que $\partial(x) = \mu(x)$ pour $x$ de degré 1 et par l'égalité suivante où $x$ et $y$ sont homogènes

$$\partial(x \wedge y) \;=\; \partial(x) \wedge y \;+\; (-1)^{\deg x}\, x \wedge \partial(y)$$

C'est par exemple avec cette égalité que l'on peut vérifier que $\partial \circ \partial = 0$. On peut étendre les scalaires à un module $M$ en définissant le complexe $\mathrm{K}_\bullet(\mu\,; M) = \mathrm{K}_\bullet(\mu) \otimes_{\mathbf{A}} M$.

**Le montant**

On définit le complexe de Koszul montant comme étant le dual du complexe descendant c'est-à-dire via $\mathrm{K}^\bullet(\mu) = \mathrm{Hom}\big(\mathrm{K}_\bullet(\mu),\, \mathbf{A}\big)$.

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \simeq \Big(\bigwedge^0 L\Big)^\star \longrightarrow \Big(\bigwedge^1 L\Big)^\star \longrightarrow \Big(\bigwedge^2 L\Big)^\star \longrightarrow \cdots$$

On peut aussi définir le complexe de Koszul montant à coefficients dans un module $M$ via $\mathrm{K}^\bullet(\mu\,; M) = \mathrm{Hom}\big(\mathrm{K}_\bullet(\mu),\, M\big)$. Signalons au passage que ce dernier complexe n'est pas égal à $\mathrm{K}^\bullet(\mu) \otimes M$. C'est cependant le cas si $L$ est libre de rang fini, car le morphisme $\mathrm{Hom}(K, \mathbf{A}) \otimes M \to \mathrm{Hom}(K, M)$ est un isomorphisme si $K$ est libre de rang fini (on peut donc prendre $K = \bigwedge^d L$).

**Proposition 1.1.** *Soit $\mu : L \to \mathbf{A}$ une forme linéaire et $\partial_\mu = \bullet \llcorner \mu$ la différentielle de son complexe de Koszul descendant. En notant $\delta_x = x \wedge \bullet$ pour $x \in L$, on a l'égalité*

$$\partial_\mu \circ \delta_x \;+\; \delta_x \circ \partial_\mu \;=\; \mu(x)\,\mathrm{Id}$$

*En particulier,* $\operatorname{Im}\mu$ *annule les modules de (co)homologie des complexes* $\mathrm{K}_\bullet(\mu\,;M)$ *et* $\mathrm{K}^\bullet(\mu\,;M)$*. Ce que l'on peut écrire de manière cryptique :*

$$\operatorname{Im}\mu\cdot \mathrm{H}_\bullet(\mu\,;M)=0 \qquad \textit{et} \qquad \operatorname{Im}\mu\cdot \mathrm{H}^\bullet(\mu\,;M)=0$$

***Preuve.*** Pour l'égalité, il suffit d'utiliser que $\partial_\mu$ est une anti-dérivation à gauche qui prolongue $\mu$. Autrement dit, pour $y\in\bigwedge^d L$, on a

$$(\partial_\mu\circ\delta_x)(y) \;=\; \partial_\mu(x\wedge y) \;=\; \mu(x)\wedge y+(-1)^1 x\wedge\partial_\mu(y) \;=\; \mu(x)y-(\delta_x\circ\partial_\mu)(y)$$

Ainsi, si $y\in\operatorname{Ker}\partial_\mu$, on a $\mu(x)y\in\operatorname{Im}\partial_\mu$. Ceci montre que $\operatorname{Im}\mu$ annule $\mathrm{H}_\bullet(\mu)$. Il suffit ensuite de tensoriser par $\mathrm{id}_M$ ou bien de transposer l'égalité pour obtenir que $\operatorname{Im}\mu$ annule $\mathrm{H}_\bullet(\mu\,;M)$ et $\mathrm{H}^\bullet(\mu\,;M)$. □

# 2 Dualités

## 2.1 Dualité canonique entre $\bigwedge^d L$ et $\bigwedge^d(L^\star)$

La dualité canonique entre $L$ et $L^\star$ définie par $\langle x\,|\,\mu\rangle=\mu(x)$ se prolonge en une dualité naturelle entre les puissances extérieures via :

$$\bigwedge^d L\times\bigwedge^d(L^\star) \;\longrightarrow\; \mathbf{A} \qquad\qquad (x_1\wedge\cdots\wedge x_d,\;\mu_1\wedge\cdots\wedge\mu_d) \;\longmapsto\; \det\mu_i(x_j)$$

Sur $\bigwedge L$, on dispose de la différentielle $\partial=\bullet\llcorner\mu$. Sur $\bigwedge(L^\star)$, on considère la différentielle $\delta=\mu\wedge\bullet$. Ces deux applications linéaires sont adjointes l'une de l'autre pour la dualité ci-dessus : pour tout $x\in\bigwedge^d L$ et $\nu\in\bigwedge^{d-1}(L^\star)$, on a

$$\langle\,\partial(x)\,|\,\nu\,\rangle \;=\; \langle\,x\,|\,\delta(\nu)\,\rangle \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \langle\,x\llcorner\mu\,|\,\nu\,\rangle \;=\; \langle\,x\,|\,\mu\wedge\nu\,\rangle$$

Pour vérifier cette égalité, on peut partir du terme de droite qui est, par définition, un certain déterminant et le développer par rapport à la première ligne.

**Remarque 2.1.** Une conséquence de cette dernière égalité : le petit diagramme ci-dessous commute où la flèche verticale est donnée par $\nu\mapsto\langle\,\bullet\,|\,\nu\,\rangle$

$$\begin{array}{ccc}
\bigwedge^{d-1}(L^\star) & \xrightarrow{\;\delta\;} & \bigwedge^{d}(L^\star) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\left(\bigwedge^{d-1} L\right)^\star & \xrightarrow{\;{}^{\mathrm{t}}\partial\;} & \left(\bigwedge^{d} L\right)^\star
\end{array}$$

Ainsi, *si la dualité est parfaite* (ce qui est le cas si $L$ est libre de rang fini), alors les flèches verticales sont des isomorphismes ; on obtient ainsi un complexe *canoniquement* isomorphe à $\mathrm{K}^\bullet(\mu)$ via

$$0\longrightarrow\mathbf{A}\simeq\bigwedge^0(L^\star)\longrightarrow\bigwedge^1(L^\star)\xrightarrow{\;\mu\wedge\bullet\;}\bigwedge^2(L^\star)\longrightarrow\cdots$$

## 2.2 Dualité entre $\bigwedge^d L$ et $\bigwedge^{n-d} L$ lorsque $L$ est libre de rang $n$

Soit $d$ et $d'$ deux entiers tels que $d+d'=n$. On considère la « forme » bilinéaire :

$$\bigwedge^d L\times\bigwedge^{d'} L \;\longrightarrow\; \bigwedge^n L, \qquad (x,\,y)\longmapsto x\wedge y$$

En choisissant un isomorphisme $\bigwedge^n L\simeq\mathbf{A}$, c'est-à-dire une orientation de $L$, on obtient les isomorphismes

$$\bigwedge^d L \;\longrightarrow\; \left(\bigwedge^{d'} L\right)^\star, \qquad x\;\longmapsto\;[x\wedge\bullet] \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \bigwedge^{d'} L \;\longrightarrow\; \left(\bigwedge^{d} L\right)^\star, \qquad y\;\longmapsto\;[\bullet\wedge y]$$

où $[z]\in\mathbf{A}$ désigne la coordonnée de $z\in\bigwedge^n L$ relativement à l'orientation choisie.

Bilan : on dispose ainsi de *deux* isomorphismes $\bigwedge^k L \longrightarrow \big(\bigwedge^{k'} L\big)^\star$ à savoir $x \longmapsto [x \wedge \bullet]$ et $y \longmapsto [\bullet \wedge y]$.

On souhaite superposer les complexes de Koszul descendant et montant en vu d'établir la self-duality du complexe de Koszul lorsque $L$ est libre. Cela revient à faire commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^d L & \xrightarrow{\quad\partial\quad} & \bigwedge^{d-1} L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Big(\bigwedge^{d'} L\Big)^\star & \xrightarrow{\quad{}^t\partial\quad} & \Big(\bigwedge^{d'+1} L\Big)^\star \end{array}$$

Toute la difficulté réside dans le choix de la flèche verticale : une histoire de signe, comme nous allons le voir. Tout d'abord, choisissons l'un des deux isomorphismes exhibés ci-dessus, par exemple $x \longmapsto [x \wedge \bullet]$. Soit $x \in \bigwedge^d L$ en haut à gauche. On descend avec l'application $[x \wedge \bullet]$ et on poursuit à l'horizontale pour tomber sur la forme linéaire $[x \wedge \partial(\bullet)]$. Si maintenant on parcourt le chemin dans l'autre sens (l'horizontale puis la verticale), on tombe sur $[\partial(x) \wedge \bullet]$. Pour que cela commute, on *aimerait* donc avoir $x \wedge \partial(z) = \partial(x) \wedge z$ pour tout $z \in \bigwedge^{d'+1} L$. Pour redresser cette pseudo-égalité, il suffit d'introduire un signe dans le morphisme vertical $\bigwedge^d L \longrightarrow \big(\bigwedge^{d'} L\big)^\star$, $x \longmapsto \varepsilon_d\,[x \wedge \bullet]$ où $\varepsilon_d$ est un signe à ajuster pour que l'on ait $\varepsilon_d\,[x \wedge \partial(z)] = \varepsilon_{d-1}\,[\partial(x) \wedge z]$. Or on a l'égalité $(-1)^{d-1} x \wedge \partial(z) = \partial(x) \wedge z$ (utiliser que $\partial$ est une antidérivation et que $x \wedge z$ appartient à $\bigwedge^{n+1} L$ donc est nul). Ainsi il suffit d'imposer la relation $\varepsilon_d = (-1)^{d-1}\varepsilon_{d-1}$. Le signe $\varepsilon_d = (-1)^{1+2+\cdots+d-1} = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}}$ convient.

Note : si on se fixe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ pour $L$, on peut identifier $L$ à $L^\star$ et aussi, grâce à la remarque 2.1, $\big(\bigwedge^{d'} L\big)^\star$ à $\bigwedge^{d'} L$. Avec cette identification, la flèche verticale est exactement $(-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} e \llcorner \bullet$ où $e = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. Avec l'autre choix (*i.e.* $y \longmapsto [\bullet \wedge y]$), la flèche verticale serait $(-1)^{\frac{d'(d'-1)}{2}} \bullet \lrcorner e$.

# 3 Le complexe de Koszul d'une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$

Ici on suppose que $L$ est un module libre de rang $n$ muni d'une base $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de sorte que l'on peut confondre $L$ et $\mathbf{A}^n$. La puissance $d$-ème extérieure de $\mathbf{A}^n$ est un $\mathbf{A}$-module libre que l'on munit de la base $(e_I)$ :

$$\bigwedge^d(\mathbf{A}^n) \;=\; \bigoplus_{\#I=d} \mathbf{A}\, e_I \qquad\qquad \text{où}\;\; e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d} \;\; \text{pour}\; I = (i_1 < \cdots < i_d)$$

**Le descendant**

Pour une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbf{A}$, on définit son complexe de Koszul descendant $\mathrm{K}_\bullet(\underline{a})$ comme étant $\mathrm{K}_\bullet(\mu)$ où $\mu : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ est la forme linéaire dont la matrice dans la base $\underline{e}$ est $[a_1 \;\cdots\; a_n]$. C'est donc un complexe de modules libres, de longueur $n+1$,

$$0 \longrightarrow \bigwedge^n(\mathbf{A}^n) \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \bigwedge^1(\mathbf{A}^n) \longrightarrow \bigwedge^0(\mathbf{A}^n) \longrightarrow 0$$

et dont la différentielle est $\partial = \bullet \llcorner a$ où $a = \sum a_i e_i$. En voici une description sur la base $\underline{e}$ :

$$\partial(e_I) \;=\; \bigoplus_{i \in I} (-1)^{\varepsilon_i(I)}\, a_i\, e_{I \setminus i}$$

où $\varepsilon_i(I)$ désigne le nombre d'éléments de $I$ strictement inférieurs à $i$.

Le complexe $\mathrm{K}_\bullet(\underline{a}\,; M)$ est par définition $\mathrm{K}_\bullet(\underline{a}) \otimes_{\mathbf{A}} M$.

**Le montant**

Pour une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbf{A}$, on définit son complexe de Koszul montant $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a})$ comme étant $\mathrm{K}^\bullet(\mu)$ où $\mu : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ est la forme linéaire (notée $a^\star$ ci-après) dont la matrice dans la base $\underline{e}$

est $[a_1 \ \cdots \ a_n]$. Grâce à l'isomorphisme *canonique* $\big(\bigwedge^d(\mathbf{A}^n)\big)^\star \simeq \bigwedge^d\big((\mathbf{A}^n)^\star\big)$ et à la remarque 2.1, le complexe de Koszul prend la forme suivante :

$$0 \longrightarrow \bigwedge^0\big((\mathbf{A}^n)^\star\big) \longrightarrow \bigwedge^1\big((\mathbf{A}^n)^\star\big) \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \bigwedge^n\big((\mathbf{A}^n)^\star\big) \longrightarrow 0$$

avec la différentielle $a^\star \wedge \bullet$ qui s'explicite sur la base duale $(e_I^\star)$ où $e_I^\star = e_{i_1}^\star \wedge \cdots \wedge e_{i_d}^\star$ de la façon suivante

$$\delta(e_I^\star) \ = \ \bigoplus_{i \notin I} (-1)^{\varepsilon_i(I)}\, a_i\, e_{I \vee i}^\star$$

Le complexe $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,; M)$ est par définition $\mathrm{Hom}(\mathrm{K}_\bullet(\underline{a}), M)$. Comme $\mathrm{K}_\bullet(\underline{a})$ est un complexe de modules libres, on a $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,; M) = \mathrm{K}^\bullet(\underline{a}) \otimes_{\mathbf{A}} M$ (confer ce qui a été dit à la page 1).

## 3.1 $\mathrm{K}_\bullet(\underline{a})$ est un complexe de modules libres !

On détype un peu les objets histoire de voir à quoi ressemblent les matrices. On masque donc un instant l'algèbre extérieure en considérant $\bigwedge^d(\mathbf{A}^n)$ comme un $\mathbf{A}$-module libre de rang $\binom{n}{d}$ que l'on équipe de la base $(e_I)_{\#I=d}$ indexée par les parties de $\{1,\dots,n\}$ ordonnée lexicographiquement.

Voici le complexe de Koszul descendant pour $n = 4$

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}^1 \xrightarrow{\partial_4} \mathbf{A}^4 \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{A}^6 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{A}^4 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{A}^1 \longrightarrow 0$$

avec les différentielles $\partial_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$

$$\partial_4 = \begin{bmatrix} -a_4 \\ a_3 \\ -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} \qquad \partial_3 = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 & . & . \\ -a_2 & . & a_4 & . \\ . & -a_2 & -a_3 & . \\ a_1 & . & . & a_4 \\ . & a_1 & . & -a_3 \\ . & . & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \qquad \partial_2 = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_3 & -a_4 & . & . & . \\ a_1 & . & . & -a_3 & -a_4 & . \\ . & a_1 & . & a_2 & . & -a_4 \\ . & . & a_1 & . & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

**Rangs attendus**

On pose $r_k = \binom{n-1}{k-1}$ de sorte que $r_k + r_{k+1} = \mathrm{rg}(\mathrm{K}_k) = \binom{n}{k}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Les mineurs d'ordre $r_k$ de $\partial_k$ sont, à 0 près et $\pm$ près, les monômes en $\underline{a}$ de degré $r_k$ de sorte que $\mathcal{D}_{r_k}(\partial_k) = \langle \underline{a} \rangle^{r_k}$. De plus, on a $\mathcal{D}_{r_k+1}(\partial_k) = 0$ (on peut raisonner avec des indéterminées car dans ce cas on sait que $\partial_k$ est stable de rang $r_k$ et ensuite spécialiser). En particulier, si un des $a_i$ est inversible, le noyau de $\partial_k$ est libre de rang $\mathrm{rg}(\mathrm{K}_k) - r_k = r_{k+1} = \binom{n-1}{k}$.

## 3.2 Self-duality of the Koszul complex

**Proposition 3.1.** *Les complexes de Koszul* $\mathrm{K}_\bullet(\underline{a})$ *et* $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a})$ *sont isomorphes. Autrement dit, le complexe* $\mathrm{K}_\bullet(\underline{a})$ *est isomorphe à son dual.*
*Plus généralement, les complexes de Koszul* $\mathrm{K}_\bullet(\underline{a}\,; M)$ *et* $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,; M)$ *sont isomorphes.*
*On a donc, pour tout entier* $i$*,*

$$\mathrm{H}_i(\underline{a}\,; M) \ \simeq \ \mathrm{H}^{n-i}(\underline{a}\,; M)$$

***Preuve.*** Confer la section 2.2 □

Ci-dessous sont superposés le complexe de Koszul descendant et le complexe de Koszul montant pour $n = 4$.

$$\bigwedge^4 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -a_4 \\ a_3 \\ -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}} \bigwedge^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_3 & a_4 & . & . \\ -a_2 & . & a_4 & . \\ . & -a_2 & -a_3 & . \\ a_1 & . & . & a_4 \\ . & a_1 & . & -a_3 \\ . & . & a_1 & a_2 \end{bmatrix}} \bigwedge^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -a_2 & -a_3 & -a_4 & . & . & . \\ a_1 & . & . & -a_3 & -a_4 & . \\ . & a_1 & . & a_2 & . & -a_4 \\ . & . & a_1 & . & a_2 & a_3 \end{bmatrix}} \bigwedge^1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}} \bigwedge^0$$

$$\bigwedge^0 \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}} \bigwedge^1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -a_2 & a_1 & . & . \\ -a_3 & . & a_1 & . \\ -a_4 & . & . & a_1 \\ . & -a_3 & a_2 & . \\ . & -a_4 & . & a_2 \\ . & . & -a_4 & a_3 \end{bmatrix}} \bigwedge^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_3 & -a_2 & . & a_1 & . & . \\ a_4 & . & -a_2 & . & a_1 & . \\ . & a_4 & -a_3 & . & . & a_1 \\ . & . & . & a_4 & -a_3 & a_2 \end{bmatrix}} \bigwedge^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{bmatrix}} \bigwedge^4$$

### 3.3 La suite $\underline{a}$ annule la (co)homologie Koszul

La proposition suivante est un cas particulier de la proposition 1.1 avec $\mu = [a_1 \cdots a_n]$.

**Proposition 3.2.** *La (co)homologie Koszul de $\underline{a}$ sur $M$ est tuée par l'idéal $\langle\underline{a}\rangle$. Autrement dit*

$$\underline{a}\,\mathrm{H}_\bullet(\underline{a}\,;M) = 0 \qquad \textit{et} \qquad \underline{a}\,\mathrm{H}^\bullet(\underline{a}\,;M) = 0$$

*En particulier, si $\underline{a}$ est unimodulaire i.e. $1 \in \langle\underline{a}\rangle$, alors le complexe de Koszul (descendant ou montant) de $\underline{a}$ sur $M$ est acyclique.*

## 4 Les complexes de Koszul de $\underline{a}$ et $\underline{b}$ quand $\langle\underline{a}\rangle = \langle\underline{b}\rangle$

Lorsque l'on dispose de deux suites $\underline{a}$ et $\underline{b}$ *de même longueur* avec $\langle\underline{b}\rangle \subset \langle\underline{a}\rangle$, il y a deux mécanismes pour relier directement et explicitement leur complexe de Koszul (en faisant intervenir une matrice exprimant $b_i$ comme combinaison linéaire des $a_j$) : c'est l'objet de la section 7.

Pour deux suites $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de longueur quelconque telles que $\langle\underline{b}\rangle \subset \langle\underline{a}\rangle$, on peut comparer le complexe de Koszul de $\underline{a}$ (ou de $\underline{b}$) avec celui de $(\underline{a},\underline{b})$. L'idée générale est de se ramener à deux suites *de même longueur* via les suites $\underline{a}' = (\underline{a},\underline{0}_m)$ et $\underline{b}' = (\underline{a},\underline{b})$ qui vérifient toujours $\langle\underline{b}'\rangle \subset \langle\underline{a}'\rangle$.

Par symétrie, lorsque $\langle\underline{a}\rangle = \langle\underline{b}\rangle$, on peut alors comparer les complexes de $\underline{a}$ et $\underline{b}$.

Ce qui suit est fortement inspiré de la proposition 1.6.21 de [BH98].

**Proposition 4.1.** *Soient $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ et $\underline{b} = (b_1,\ldots,b_m)$ deux suites d'éléments de $\mathbf{A}$.*
*Si $\langle\underline{b}\rangle \subset \langle\underline{a}\rangle$ alors*

$$\mathrm{K}^\bullet(\underline{a},\underline{b}\,;M) \;\simeq\; \mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,;M) \otimes_{\mathbf{A}} \bigwedge(\mathbf{A}^m)$$

*En particulier, si $\langle\underline{a}\rangle = \langle\underline{b}\rangle$ alors*

$$\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,;M) \otimes_{\mathbf{A}} \bigwedge(\mathbf{A}^m) \;\simeq\; \mathrm{K}^\bullet(\underline{b}\,;M) \otimes_{\mathbf{A}} \bigwedge(\mathbf{A}^n)$$

***Preuve.*** Soit $p = n + m$. On va comparer la suite $\underline{a}' = (\underline{a},\underline{0}_m)$ à la suite $\underline{b}' = (\underline{a},\underline{b})$, toutes deux de longueur $p$. Comme $\langle\underline{b}\rangle \subset \langle\underline{a}\rangle$, il existe une matrice $U \in \mathbb{M}_p(\mathbf{A})$ vérifiant $U\,{}^t\underline{a}' = {}^t\underline{b}'$ que l'on peut choisir triangle inférieure à diagonale unité. Cette matrice est inversible et induit donc un isomorphisme au niveau des complexes de Koszul : $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}') \simeq \mathrm{K}^\bullet(\underline{b}')$. Or $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}') \simeq \mathrm{K}^\bullet(\underline{a}) \otimes \mathrm{K}^\bullet(\underline{0}_m) \simeq \mathrm{K}^\bullet(\underline{a}) \otimes \bigwedge(\mathbf{A}^m)$. Ainsi $\mathrm{K}^\bullet(\underline{b}') \simeq \mathrm{K}^\bullet(\underline{a}) \otimes \bigwedge(\mathbf{A}^m)$. On obtient ce qui était annoncé en tensorisant par $M$.
Pour le « En particulier », il suffit d'échanger les rôles joués par $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sans oublier que $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a},\underline{b}) \simeq \mathrm{K}^\bullet(\underline{b},\underline{a})$. □

En prenant la cohomologie de ces complexes et en profitant du fait que $\bigwedge(\mathbf{A}^m)$ est un module plat, on obtient directement :

**Proposition 4.2.** *Soient $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ et $\underline{b} = (b_1,\ldots,b_m)$ deux suites de scalaires et $i$ un entier.*
*Si $\langle\underline{b}\rangle \subset \langle\underline{a}\rangle$ alors*

$$\mathrm{H}^i(\underline{a},\underline{b}\,;M) \;\simeq\; \mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M) \otimes_{\mathbf{A}} \bigwedge(\mathbf{A}^m) \quad \textit{donc} \quad \mathrm{H}^i(\underline{a},\underline{b}\,;M) \;\simeq\; \big(\mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M)\big)^{2^m}$$

*En particulier, si $\langle\underline{a}\rangle = \langle\underline{b}\rangle$ alors*

$$\mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M) \otimes_{\mathbf{A}} \bigwedge(\mathbf{A}^m) \;\simeq\; \mathrm{H}^i(\underline{b}\,;M) \otimes_{\mathbf{A}} \bigwedge(\mathbf{A}^n) \quad \textit{donc} \quad \big(\mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M)\big)^{2^m} \;\simeq\; \big(\mathrm{H}^i(\underline{b}\,;M)\big)^{2^n}$$

**Corollaire 4.3.** *Soient $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ et $\underline{b} = (b_1,\ldots,b_m)$ deux suites de scalaires et $i$ un entier.*
*Si $\langle\underline{b}\rangle \subset \langle\underline{a}\rangle$ alors $\mathrm{H}^i(\underline{a},\underline{b}\,;M) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M) = 0$.*
*Si $\langle\underline{a}\rangle = \langle\underline{b}\rangle$ alors $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{H}^i(\underline{b}\,;M) = 0$.*

# 5 La longue suite en (co)homologie Koszul

À l'aide de la construction mapping-cone et de l'identification $\mathrm{K}(\underline{a}, b\,; M) \simeq \mathrm{K}(b\,; \mathbf{A}) \otimes_{\mathbf{A}} \mathrm{K}(\underline{a}\,; M)$, on obtient facilement les longues suites exactes en homologie et cohomologie de Koszul. Pour les détails, confer l'appendice A.

**Proposition 5.1** (Longue suite en homologie Koszul)**.** *Soit $\underline{a}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{A}$.*

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_{i+1}(\underline{a}\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}_{i+1}(\underline{a}, b\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}_i(\underline{a}\,; M) \xrightarrow{\times b} \mathrm{H}_i(\underline{a}\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}_i(\underline{a}, b\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}_{i-1}(\underline{a}\,; M) \longrightarrow \cdots$$

**Proposition 5.2** (Longue suite en cohomologie Koszul)**.**

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(\underline{a}\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}(\underline{a}, b\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M) \xrightarrow{\times b} \mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(\underline{a}, b\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(\underline{a}\,; M) \longrightarrow \cdots$$

La proposition suivante nous sera utile pour démontrer l'invariance par radical de la Koszul-profondeur.

**Proposition 5.3.** *Soit $\underline{a}$ une suite et $b \in \mathbf{A}$. Soit $i$ un entier.*

1. *Si $\mathrm{H}^{i-1}(\underline{a}\,; M) = \mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M) = 0$ alors $\mathrm{H}^{i}(\underline{a}, b\,; M) = 0$.*
2. *Soit $e$ un entier tel que $b^e \in \langle \underline{a} \rangle$. Si $\mathrm{H}^{i}(\underline{a}, b\,; M) = 0$ alors $\mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M) = 0$.*

*On obtient les mêmes résultats en remplaçant l'élément $b$ par une suite $\underline{b}$.*

***Preuve.*** Le point 1 est immédiat en utilisant la longue suite exacte en cohomologie Koszul. Pour le point 2, on reprend également cette longue suite. Comme $\mathrm{H}^{i}(\underline{a}, b\,; M) = 0$, la flèche $\mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M) \xrightarrow{\times b} \mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M)$ est injective. Il en est de même de la flèche de multiplication par $b^e$. En utilisant que $b^e \in \langle \underline{a} \rangle$ et le fait que la cohomologie Koszul est tuée par $\langle \underline{a} \rangle$, on obtient $\mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M) = 0$. □

**Proposition 5.4.** *Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ deux suites d'éléments de $\mathbf{A}$. On suppose qu'il existe un entier $e$ tel que $\underline{b}^e \in \langle \underline{a} \rangle$ (ce qui est équivalent à $\sqrt{\underline{b}} \subset \sqrt{\underline{a}}$). Pour tout entier $k$, on a*

$$\mathrm{H}^{i}(\underline{b}\,; M) = 0, \quad \forall\, i < k \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M) = 0, \quad \forall\, i < k$$

*En particulier, si $\sqrt{\underline{a}} = \sqrt{\underline{b}}$ alors*

$$\mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M) = 0, \quad \forall\, i < k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{H}^{i}(\underline{b}\,; M) = 0, \quad \forall\, i < k$$

***Preuve.*** Supposons que $\mathrm{H}^{i}(\underline{b}\,; M) = 0$ pour tout $i < k$. Le premier point de la proposition 3.2 permet d'obtenir (en échangeant les rôles de $\underline{a}$ et $\underline{b}$ dans la proposition) $\mathrm{H}^{i}(\underline{b}, \underline{a}\,; M) = 0$ pour tout $i < k$. Et le deuxième point fournit $\mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M) = 0$ pour tout $i < k$. □

# 6 Profondeur mesurée par le complexe de Koszul

## 6.1 Invariance par radical de la profondeur

On reviendra largement sur cette notion au chapitre V. Soit $k$ un entier. On définit pour une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et un module $M$ l'assertion $\mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$ par l'annulation des $k$ premiers modules de *cohomologie* Koszul. Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, i < k, \quad \mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M) = 0}$$

En terme d'homologie Koszul, cela se traduit par

$$\mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, i < k, \quad \mathrm{H}_{n-i}(\underline{a}\,; M) = 0$$

**Définition 6.1.** *Une suite $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ est dite $M$-complètement sécante si* $\mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant n$.

Voici deux propriétés de la Koszul-profondeur que nous avons établies dans les propositions 5.3 et 5.4.

**Proposition 6.2.** *Soit $k$ un entier.*

1. *Soit $b \in \mathbf{A}$. Alors* $\mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k \implies \mathrm{Gr}(\underline{a}, b\,; M) \geqslant k$
2. *Mieux : si $\sqrt{\underline{b}} \subset \sqrt{\underline{a}}$ alors* $\mathrm{Gr}(\underline{b}\,; M) \geqslant k \implies \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$.

Le premier point est un cas particulier du deuxième. Nous avons tenu à l'écrire noir sur blanc, car il n'a pas le même impact psychologique que le second point (qui paraît déjà plus technique). Le deuxième point dit en particulier que la Koszul-profondeur est invariante par radical, ce que l'on peut résumer par l'implication suivante

$$\sqrt{\underline{a}} = \sqrt{\underline{b}} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \;=\; \mathrm{Gr}(\underline{b}\,; M)$$

## 6.2 La Gr-Down-Property

L'objectif de ce paragraphe est de généraliser une propriété bien connue du Grade à savoir

$$\text{(Down)} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k \\ b \text{ élément } M\text{-régulier} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M/bM) \geqslant k-1$$

La démonstration classique consiste à écrire la suite exacte courte de modules

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\times b} M \longrightarrow M/bM \longrightarrow 0$$

et à dérouler la suite exacte longue en cohomologie Koszul associée

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(\underline{a}\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(\underline{a}\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(\underline{a}\,; M/bM) \longrightarrow \mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M) \longrightarrow \cdots$$

L'hypothèse $\mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$ dit que $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$ pour tout $i < k$. Avec la longue suite exacte, on a donc

$$\mathrm{H}^{i-1}(\underline{a}\,; M/bM) = 0, \quad \forall\, i < k \qquad \text{ou encore} \qquad \mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,; M/bM) = 0, \quad \forall\, i < k-1$$

c'est-à-dire $\mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M/bM) \geqslant k-1$, ce qu'il fallait démontrer.

Le résultat et sa démonstration s'étendent naturellement à une suite $\underline{b}$ complètement sécante sur $M$.

**Proposition 6.3** (Gr-Down-Property)**.** *Pour tout entier $k$, on a l'implication*

$$\begin{array}{c} \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k \\ \underline{b} \text{ suite } M\text{-complètement sécante} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M/\underline{b}M) \geqslant k - \#\underline{b}$$

***Preuve.*** La preuve suit exactement celle faite pour $\#\underline{b} = 1$. Notons désormais $m = \#\underline{b}$. On commence par traduire l'hypothèse $\mathrm{Gr}(\underline{b}\,; M) \geqslant m$ avec le complexe de Koszul descendant $\mathrm{K}_\bullet(\underline{b}\,; M)$ qui fournit donc une résolution de $M/\underline{b}M$ :

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}_m \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \mathrm{K}_1 \longrightarrow \mathrm{K}_0 \longrightarrow M/\underline{b}M \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{K}_i = \bigwedge^i(\mathbf{A}^m) \otimes_{\mathbf{A}} M$.

Il s'agit maintenant de découper cette résolution en des suites exactes courtes (à 3 termes). Pour cela, on note $G_i = \operatorname{Im} d_i$ (cela reste valable pour $i = 0$, *i.e.* $G_0 = M/\underline{b}M$), de sorte que l'on dispose des suites exactes courtes de $\mathbf{A}$-modules que voici :

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}_m \longrightarrow \mathrm{K}_{m-1} \longrightarrow G_{m-1} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow G_{m-1} \longrightarrow \mathrm{K}_{m-2} \longrightarrow G_{m-2} \longrightarrow 0$$

$$\vdots$$

$$0 \longrightarrow G_1 \longrightarrow \mathrm{K}_0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow 0$$

Une remarque avant de continuer : on a l'implication

$$\mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; K_i) \geqslant k$$

En effet, il suffit de tensoriser $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,; M)$ par $\bigwedge^i(\mathbf{A}^m)$, ce qui n'altère pas la cohomologie du complexe (on tensorise par un $\mathbf{A}$-module libre donc plat).

On applique maintenant le même genre de raisonnement que pour le cas $m = 1$ à chaque suite exacte courte ci-dessus. On obtient donc successivement

$$\mathrm{Gr}(\underline{a}\,; G_{m-1}) \geqslant k-1, \qquad \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; G_{m-2}) \geqslant k-2, \qquad \ldots \qquad \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; G_0) \geqslant k-m$$

La dernière inégalité donne exactement le résultat. □

## 6.3 La Gr-Up-Property

**Proposition 6.4** (Gr-Up-Property)**.** *Pour tout entier $k$, on a l'implication*

$$\text{(Up)} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M/\underline{b}M) \geqslant k \\ \underline{b} \text{ suite } M\text{-complètement sécante} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Gr}(\underline{a}, \underline{b}\,; M) \geqslant k + \#\underline{b}$$

La preuve est conséquence du résultat général suivant (qui permet de retrouver la propriété (Down)) :

**Proposition 6.5.** *Soit $\underline{b}$ une suite de longueur $m$ complètement sécante sur $M$. Pour tout entier $i$, on a l'isomorphisme*

$$\mathrm{H}^{i+m}(\underline{a}, \underline{b}\,; M) \;\simeq\; \mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M/\underline{b}M)$$

***Preuve.*** On note $n$ la longueur de $\underline{a}$ et on considère le bicomplexe *descendant* concentré dans le premier quadrant

$$C_{p,q} \;=\; \mathrm{K}^{n-p}(\underline{a}\,; \mathbf{A}) \otimes \mathrm{K}^{m-q}(\underline{b}\,; M)$$

Le complexe total associé est $T_\bullet = \mathrm{K}^{n+m-\bullet}(\underline{a}, \underline{b}\,; M)$. La colonne d'indice $p$ est le complexe descendant $\mathrm{K}^{n-p}(\underline{a}\,; \mathbf{A}) \otimes \mathrm{K}^{m-\bullet}(\underline{b}\,; M)$. Comme $\underline{b}$ est complètement sécante sur $M$, les colonnes sont exactes en degrés $> 0$ et le complexe $X_\bullet$ est $\mathrm{K}^{n-\bullet}(\underline{a}\,; \mathbf{A}) \otimes M/\underline{b}M = \mathrm{K}^{n-\bullet}(\underline{a}\,; M/\underline{b}M)$. D'après la proposition IV-3.1, on obtient pour tout entier $j$ :

$$\mathrm{H}_j\big(\mathrm{K}^{n+m-\bullet}(\underline{a}, \underline{b}\,; M)\big) \;\simeq\; \mathrm{H}_j\big(\mathrm{K}^{n-\bullet}(\underline{a}\,; M/\underline{b}M)\big)$$

c'est-à-dire, pour tout entier $i$,

$$\mathrm{H}^{i+m}(\underline{a}, \underline{b}\,; M) \;\simeq\; \mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M/\underline{b}M)$$

□

**Corollaire 6.6.** *Soit $\underline{b}$ une suite de longueur $m$ complètement sécante sur $M$. Pour tout entier $k$, on a*

$$\mathrm{Gr}(\underline{a}, \underline{b}\,; M) \geqslant k+m \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M/\underline{b}M) \geqslant k$$

# 7 Les morphismes $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}) \leftrightarrow \mathrm{K}^\bullet(\underline{b})$ lorsque $\langle b_1, \dots, b_n\rangle \subset \langle a_1, \dots, a_n\rangle$

On considère deux suites $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de longueur $n$ et un endomorphisme $v$ de $\mathbf{A}^n$ envoyant $\underline{a}$ sur $\underline{b}$. Matriciellement

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

On dispose de deux morphismes de complexes

$$\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}) \rightleftarrows \mathrm{K}^\bullet(\underline{b})$$

dont la composée, dans un sens ou dans l'autre, est une homothétie de rapport $\det v$.

Avant de décrire ces deux morphismes, il convient de faire quelques rappels sur l'algèbre extérieure et de fixer les notations.

## 7.1 Le morphisme adjoint $\widetilde{\wedge}^d(v)$ de $\wedge^d(v)$

Soit $E$ un $\mathbf{A}$-module libre de rang $n$. Pour un entier $d \in [\![0, n]\!]$, l'application

$$\bigwedge^d(E) \times \bigwedge^{n-d}(E) \longrightarrow \bigwedge^n(E), \qquad (x_d, y_{n-d}) \longmapsto x_d \wedge y_{n-d}$$

est une dualité parfaite (en anglais, perfect pairing), *i.e.* c'est une application bilinéaire telle que les applications linéaires déduites

$$\bigwedge^d(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}\Big(\bigwedge^{n-d}(E), \bigwedge^n(E)\Big), \qquad x \longmapsto x \wedge \bullet$$

et

$$\bigwedge^{n-d}(E) \longrightarrow \mathrm{Hom}\Big(\bigwedge^{d}(E), \bigwedge^n(E)\Big), \qquad y \longmapsto \bullet \wedge y$$

sont des isomorphismes. Par conséquent, si $v \in \mathrm{End}(E)$, l'endomorphisme $\wedge^{n-d}(v)$ de $\bigwedge^{n-d}(E)$ possède un endomorphisme adjoint noté $\widetilde{\wedge}^d(v) \in \mathrm{End}\big(\bigwedge^d(E)\big)$.
Par définition, on a l'égalité suivante, qui caractérise $\widetilde{\wedge}^d(v)$

$$\widetilde{\wedge}^d(v)(x_d) \wedge y_{n-d} \;=\; x_d \wedge \wedge^{n-d}(v)(y_{n-d})$$

D'où l'on déduit

$$\boxed{\widetilde{\wedge}^d(v) \circ \wedge^d(v) \;=\; \wedge^d(v) \circ \widetilde{\wedge}^d(v) \;=\; \det(v)\,\mathrm{Id}_{\wedge^d(E)}}$$

De plus, pour $\alpha$ et $\beta \in \bigwedge(\mathbf{A}^n)$, on a l'égalité

$$\widetilde{\wedge}v\left(\wedge v(\alpha) \wedge \beta\right) \;=\; \alpha \wedge \widetilde{\wedge}v(\beta)$$

En effet, soit $y$ un vecteur test, *i.e.* de degré $n - a - b$ (où $a = \deg\alpha$ et $b = \deg\beta$) et vérifions que

$$\widetilde{\wedge}v\left(\wedge v(\alpha) \wedge \beta\right) \wedge y \;=\; \alpha \wedge \widetilde{\wedge}v(\beta) \wedge y$$

A gauche, cela vaut $\wedge v(\alpha) \wedge x \wedge \wedge v(y)$ et à droite, cela vaut $(-1)^{ab}\ \widetilde{\wedge}v(\beta) \wedge \alpha \wedge y$, c'est-à-dire en utilisant la définition de $\widetilde{\wedge}$ : $(-1)^{ab}\,\beta \wedge \wedge v(\alpha) \wedge \wedge v(y)$. En permutant les deux premiers termes, apparaît le signe $(-1)^{ab}$ et on retrouve ainsi la même chose qu'à gauche.

## 7.2 Le morphisme direct $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}) \to \mathrm{K}^\bullet(\underline{b})$

En degrés 0 et 1, il est facile de constater que c'est $v$ qui fait tourner le diagramme. Ainsi le candidat pour le morphisme de $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a})$ vers $\mathrm{K}^\bullet(\underline{b})$ est $\wedge(v)$. Petit dessin :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathrm{K}^0(\underline{a}) & \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}} & \mathrm{K}^1(\underline{a}) & \longrightarrow & \mathrm{K}^2(\underline{a}) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{K}^k(\underline{a}) & \xrightarrow{a\wedge\bullet} & \mathrm{K}^{k+1}(\underline{a}) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{K}^n(\underline{a}) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle \wedge^2(v)} & & \downarrow{\scriptstyle \wedge^k(v)} & & \downarrow{\scriptstyle \wedge^{k+1}(v)} & & \downarrow{\scriptstyle \wedge^n(v)} \\
\mathrm{K}^0(\underline{b}) & \xrightarrow[\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}]{} & \mathrm{K}^1(\underline{b}) & \longrightarrow & \mathrm{K}^2(\underline{b}) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{K}^k(\underline{b}) & \xrightarrow[b\wedge\bullet]{} & \mathrm{K}^{k+1}(\underline{b}) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{K}^n(\underline{b})
\end{array}$$

***Preuve de la commutativité.*** Soit $x \in \bigwedge^k(\mathbf{A}^n)$. On doit vérifier $\wedge^{k+1}(v)(a \wedge x) = b \wedge \wedge^k(v)(x)$ ce qui est évident car $v(a) = b$. □

## 7.3 Le morphisme cotransposé $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}) \leftarrow \mathrm{K}^\bullet(\underline{b})$

En degrés 0 et 1, il est tentant d'invoquer $\times \det v$ et $\widetilde{v}$, car on a

$$\widetilde{V} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \det V \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Cela amène donc de manière presque naturelle le morphisme $\widetilde{\wedge}(v) : \mathrm{K}^\bullet(\underline{b}) \to \mathrm{K}^\bullet(\underline{a})$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathrm{K}^0(\underline{a}) & \xrightarrow{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}} & \mathrm{K}^1(\underline{a}) & \longrightarrow & \mathrm{K}^2(\underline{a}) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{K}^k(\underline{a}) & \xrightarrow{a\wedge\bullet} & \mathrm{K}^{k+1}(\underline{a}) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{K}^n(\underline{a}) \\
\uparrow{\scriptstyle \times \det v} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{v}} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{\wedge}^2(v)} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{\wedge}^k(v)} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{\wedge}^{k+1}(v)} & & \uparrow{\scriptstyle \widetilde{\wedge}^n(v)=\mathrm{id}} \\
\mathrm{K}^0(\underline{b}) & \xrightarrow[\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}]{} & \mathrm{K}^1(\underline{b}) & \longrightarrow & \mathrm{K}^2(\underline{b}) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{K}^k(\underline{b}) & \xrightarrow{b\wedge\bullet} & \mathrm{K}^{k+1}(\underline{b}) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathrm{K}^n(\underline{b})
\end{array}$$

***Preuve de la commutativité.*** Soit $x \in \bigwedge^k(\mathbf{A}^n)$. On doit vérifier que l'on a

$$\widetilde{\wedge}^{k+1}(v)(v(a) \wedge x) = a \wedge \widetilde{\wedge}^k(v)(x)$$

c'est-à-dire pour un $(n-k-1)$-vecteur $y$ :

$$\widetilde{\wedge}^{k+1}(v)(v(a) \wedge x) \wedge y = a \wedge \widetilde{\wedge}^k(v)(x) \wedge y$$

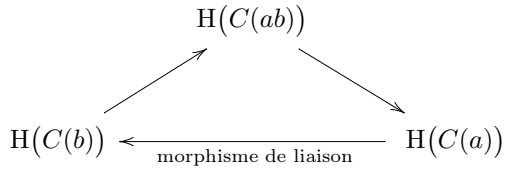
A gauche, cela vaut $v(a) \wedge x \wedge \wedge^{n-k-1}(v)(y)$ et à droite

$$\begin{aligned}
a \wedge \widetilde{\wedge}^k(v)(x) \wedge y &= (-1)^k \widetilde{\wedge}^k(v)(x) \wedge a \wedge y \\
&= (-1)^k x \wedge v(a) \wedge \wedge^{n-k-1}(v)(y) \\
&= (-1)^{2k} v(a) \wedge x \wedge \wedge^{n-k-1}(v)(y)
\end{aligned}$$

□

# 8 (Co)Homologie Koszul en $(a, b, ab)$

Etant donnés deux scalaires $a$ et $b$ et un complexe de $\mathbf{A}$-modules $C$, on vise, dans cette section, à établir une longue suite exacte en (co)homologie schématisée par le triangle exact suivant




où $C(a) = \mathrm{K}(a) \otimes C$ en désignant par $\mathrm{K}(a)$ le complexe de Koszul de l'élément $a$.

La chute étant précisée, voici le scénario. Sans surprise, parmi les acteurs figurent les complexes de Koszul élémentaires $\mathrm{K}(a)$ et $\mathrm{K}(b)$ (le complexe $C$, lui, n'arrive qu'une fois que le mal est fait !). Mais quel est donc l'élément déclencheur ? Il s'agit du complexe cône, noté $\mathrm{L}(\frac{a}{b})$, d'un certain morphisme $u$ faisant intervenir les complexes, translatés ou non, $\mathrm{K}(a)$ et $\mathrm{K}(b)$. Ce qui fait sa force, c'est d'être homotope au complexe $\mathrm{K}(ab)$. Ce complexe cône fournit, après tensorisation par $C$, la suite exacte courte de complexes

$$0 \to C(b) \to C(\tfrac{a}{b}) \to C(a) \to 0$$

où $C(\frac{a}{b})$ désigne le complexe $\mathrm{L}(\frac{a}{b}) \otimes C$, homotope au complexe $C(ab)$. Par conséquent, la longue suite exacte associée est exactement celle donnée par le triangle ci-dessus.

Précisons que le morphisme $u$ en question est :

$$\begin{array}{lccccc} \text{degrés} & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

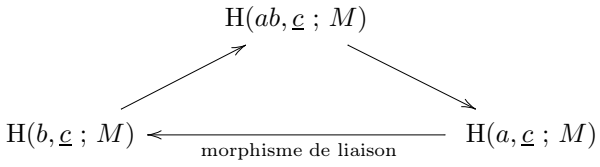
en montant :

$$\begin{array}{lccccccc} \mathrm{K}^\bullet(a) & & & 0 & \longrightarrow \mathbf{A} & \longrightarrow \mathbf{A} & \longrightarrow 0 \\ \downarrow u & & & & \downarrow \times 1 & & \\ \mathrm{K}^\bullet(b)[1] & & 0 & \longrightarrow \mathbf{A} & \longrightarrow \mathbf{A} & \longrightarrow 0 & \end{array}$$

et en descendant :

$$\begin{array}{lccccccc} \mathrm{K}_\bullet(a)[1] & & 0 & \longleftarrow \mathbf{A} & \longleftarrow \mathbf{A} & \longleftarrow 0 & \\ \downarrow u & & & & \downarrow \times 1 & & \\ \mathrm{K}_\bullet(b) & & & 0 & \longleftarrow \mathbf{A} & \longleftarrow \mathbf{A} & \longleftarrow 0 \end{array}$$

En prenant $C = \mathrm{K}(\underline{c}\,; M)$ où $\underline{c}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{A}$ et $M$ un $\mathbf{A}$-module, la longue suite devient




Dans la suite, on choisit de traiter le cas montant et donc de parler de cohomologie. Le traitement de l'homologie est similaire comme on peut le constater avec la présentation générale ci-dessus.

On fixe une fois pour toutes deux éléments $a$ et $b$ de $\mathbf{A}$.

## 8.1 La longue suite exacte en $(a, b, ab)$-cohomologie Koszul

**Un cadre général où $C^\bullet$ est un complexe montant de A-modules**

Soit $C^\bullet$ un complexe montant de $\mathbf{A}$-modules. On pose $C^\bullet(a) = \mathrm{K}^\bullet(a) \otimes C^\bullet$.

**Un complexe cône...**

On considère $u : \mathrm{K}^\bullet(a) \to \mathrm{K}^\bullet(b)[1]$ défini par :

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{degrés} & & -2 & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 \\
\mathrm{K}^\bullet(a) & & & & 0 & \longrightarrow & \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{A} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow u & & & & & & \downarrow \times 1 & & & & \\
\mathrm{K}^\bullet(b)[1] & & 0 & \longrightarrow & \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{A} & \longrightarrow & 0 & &
\end{array}$$

On note $\mathrm{L}^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ le complexe cône $\mathscr{C}(u)$ de $u$. C'est un complexe élémentaire dans le sens où il est en concentré en degré 0 et 1. La vecteur debout $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est là pour rappeler que les termes en degré 0 et 1 sont égaux à $\mathbf{A}^2$. En effet, le complexe est donné explicitement par :

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathrm{L}^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{A}^2 & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{smallmatrix}\right]} & \mathbf{A}^2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
\text{degrés} & & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 & &
\end{array}$$

**... et sa cohomologie**

**Proposition 8.1.** *Le complexe* $\mathrm{L}^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ *est homotopiquement équivalent à* $\mathrm{K}^\bullet(ab)$*. Il en est de même après tensorisation par* $C^\bullet$*. En particulier, on a* $\mathrm{H}\big(C^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)\big) \simeq \mathrm{H}\big(C^\bullet(ab)\big)$.

***Preuve.*** Il suffit de traiter l'équivalence homotopique de $\mathrm{L}^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ et $\mathrm{K}^\bullet(ab)$. La tensorisation par $C^\bullet$ est assurée par Bourbaki, Algèbre X, §4, n° 2, proposition 3. On considère les deux morphismes $f : \mathrm{L}^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \to \mathrm{K}^\bullet(ab)$ et $g : \mathrm{K}^\bullet(ab) \to \mathrm{L}^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ décrits ci-dessous. On va voir qu'ils sont réciproques l'un de l'autre à homotopie près, ce qui fera notre bonheur.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{A}^2 & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{smallmatrix}\right]} & \mathbf{A}^2 \\
{\scriptstyle [0\ 1]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [-1\ \ a]} \\
\mathbf{A} & \xrightarrow{\times ab} & \mathbf{A}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\mathrm{L}^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \\
\downarrow f \\
\mathrm{K}^\bullet(ab)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbf{A}^2 & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{smallmatrix}\right]} & \mathbf{A}^2 \\
{\scriptstyle \left[\begin{smallmatrix} -b \\ 1 \end{smallmatrix}\right]}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]} \\
\mathbf{A} & \xrightarrow{\times ab} & \mathbf{A}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\mathrm{L}^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \\
\uparrow g \\
\mathrm{K}^\bullet(ab)
\end{array}$$

Un petit calcul matriciel montre que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{K}^\bullet}$. Voilà à quoi ressemble $g \circ f$ :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{A}^2 & \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{smallmatrix}\right]} & \mathbf{A}^2 & \longrightarrow & 0 & \qquad & \mathrm{L}^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \\
 & & {\scriptstyle \left[\begin{smallmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle h} & \downarrow{\scriptstyle \left[\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]} & & & & \downarrow{\scriptstyle g\circ f} \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{A}^2 & \xrightarrow[\left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{smallmatrix}\right]]{} & \mathbf{A}^2 & \longrightarrow & 0 & \qquad & \mathrm{L}^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)
\end{array}$$

On va définir une application $h : \mathrm{L}^\bullet \to \mathrm{L}^\bullet$ de degré $-1$ de sorte que $\partial \circ h + h \circ \partial = \mathrm{id}_{\mathrm{L}^\bullet} - g \circ f$. Seul $h : \mathrm{L}^1 \to \mathrm{L}^0$ est à définir : l'application $\mathbf{A}$-linéaire définie par la matrice $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ fait l'affaire (il suffit de faire deux petits calculs pour s'en convaincre). □

**La suite exacte courte du complexe cône...**

Comme $\mathrm{L}^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est le complexe cône de $u : \mathrm{K}^\bullet(a) \to \mathrm{K}^\bullet(b)[1]$, on dispose de la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}^\bullet(b) \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]} \mathrm{L}^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{[1\ 0]} \mathrm{K}^\bullet(a) \longrightarrow 0$$

dont la tensorisée par $C^\bullet$, que voici, est encore exacte

$$0 \longrightarrow C^\bullet(b) \longrightarrow C^\bullet\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow C^\bullet(a) \longrightarrow 0$$

Cette dernière suite est celle associée au complexe cône de $u \otimes \mathrm{id}_C$. En effet, l'identification canonique $\mathscr{C}(u) \otimes C^\bullet = \mathscr{C}(u \otimes \mathrm{id}_C)$ (cf. Bourbaki, Algèbre X, §4, n° 3, lemme 2. Adapter les calculs faits par Bourbaki à notre définition du complexe cône) se réécrit $C^\bullet(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}) = \mathscr{C}(u \otimes \mathrm{id}_C)$ où $u \otimes \mathrm{id}_C : C^\bullet(a) \to C^\bullet(b)[1]$.

**. . . et sa longue suite exacte**

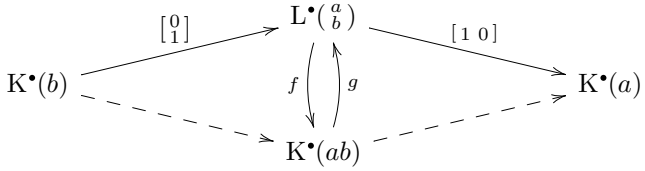
**Proposition 8.2.** *On dispose d'une longue suite exacte*

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^k\big(C^\bullet(b)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^k\big(C^\bullet(ab)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^k\big(C^\bullet(a)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}\big(C^\bullet(b)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}\big(C^\bullet(ab)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}\big(C^\bullet(a)\big) \longrightarrow \cdots$$

*dans laquelle le morphisme de liaison est* $\mathrm{H}(u \otimes \mathrm{id}_C)$.

***Preuve.*** Cette longue suite est obtenue à partir de la suite exacte courte de complexes ci-dessus qui est la suite exacte courte d'un complexe cône. Et, dans ces conditions, on sait bien que le morphisme de liaison est le morphisme issu du complexe cône. □

En vue d'identifier les flèches dans la longue suite ci-dessus, on défait l'équivalence homotopique, ou plutôt on l'explicite. Restons avec les complexes élémentaires. Il suffit ensuite de tensoriser partout par $\mathrm{id}_C$. On commence par reprendre la suite exacte courte de complexes faisant intervenir $\mathrm{K}^\bullet(b)$, $\mathrm{L}^\bullet(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})$ et $\mathrm{K}^\bullet(a)$ en y ajoutant le complexe $\mathrm{K}^\bullet(ab)$ ainsi que la manifestation de son équivalence homotopique avec $\mathrm{L}^\bullet(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})$ telle qu'elle a été traduite dans la preuve de la proposition 8.1, c'est-à-dire deux morphismes $f$ et $g$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_\mathrm{K}$ et $g \circ f \sim \mathrm{id}_\mathrm{L}$.




Il s'agit d'identifier les flèches pointillés *i.e.* $\mathrm{K}^\bullet(b) \xrightarrow{f \circ \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]} \mathrm{K}^\bullet(ab)$ à gauche et $\mathrm{K}^\bullet(ab) \xrightarrow{[1\ 0] \circ g} \mathrm{K}^\bullet(a)$ à droite, ce que l'on fait ci-dessous :

**Le cas particulier** $\mathrm{K}^\bullet(\underline{c}\,; M)$ **avec** $\underline{c} = (c_2, \ldots, c_n)$

**Proposition 8.3** (La longue suite exacte en $(a, b, ab)$-cohomologie Koszul)**.** *Soit $a$, $b$ deux éléments de* $\mathbf{A}$ *et* $\underline{c} = (c_2, \ldots, c_n)$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{A}$*. Pour un* $\mathbf{A}$*-module* $M$*, on dispose de la longue suite exacte :*

$$\mathscr{W}_{a,b} \qquad \cdots \longrightarrow \mathrm{H}^k(b, \underline{c}\,;\, M) \longrightarrow \mathrm{H}^k(ab, \underline{c}\,;\, M) \longrightarrow \mathrm{H}^k(a, \underline{c}\,;\, M) \xrightarrow{\mathscr{S}nake_k} \mathrm{H}^{k+1}(b, \underline{c}\,;\, M) \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}(ab, \underline{c}\,;\, M) \longrightarrow \mathrm{H}^{k+1}(a, \underline{c}\,;\, M) \longrightarrow \cdots$$

*où le morphisme de liaison* $\mathscr{S}nake$ *est* $\mathrm{H}\big((e_1 \wedge \bullet) \otimes \mathrm{id}_M\big)$.

***Preuve.*** Il « suffit » d'appliquer ce qui précède à $C^\bullet = \mathrm{K}^\bullet(\underline{c}\,; M)$. Donnons quelques détails pour l'identification du morphsime de liaison en supposant $M = \mathbf{A}$ (il n'est pas difficile de tensoriser par $M$, là où il faut). On sait que $C^\bullet(a) = \mathrm{K}^\bullet(a) \otimes \mathrm{K}^\bullet(\underline{c})$ s'identifie à $\mathrm{K}^\bullet(a, \underline{c})$. En particulier, les $\mathbf{A}$-modules sous-jacents $\bigwedge(\mathbf{A}) \otimes \bigwedge(\mathbf{A}^{n-1})$ et $\bigwedge(\mathbf{A}^n)$ sont isomorphes via

$$\bigwedge(\mathbf{A}^n) \ \ni \ e_I \quad \longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1_0 \otimes e_I & \text{si } 1 \notin I \\ e_1 \otimes e_{I\setminus 1} & \text{si } 1 \in I \end{array} \right. \ \in \ \bigwedge(\mathbf{A}) \otimes \bigwedge(\mathbf{A}^{n-1})$$

où on a noté $1_0$ la base canonique de $\bigwedge^0(\mathbf{A})$ et $e_1$ celle de $\bigwedge^1(\mathbf{A})$.

Rappelons que $u \otimes \mathrm{id}_C : C^\bullet(a) \to C^\bullet(b)[1]$ réalise $1_0 \otimes y \mapsto e_1 \otimes y$ et $e_1 \otimes y \mapsto 0$ pour $y \in C^\bullet$. Ainsi $u \otimes \mathrm{id}_C$ réalise $1_0 \otimes e_I \mapsto e_1 \otimes e_I$ et $e_1 \otimes e_{I\setminus 1} \mapsto 0$. Avec l'isomorphisme ci-dessus, on voit que $u \otimes \mathrm{id}_C$ agit sur $\bigwedge(\mathbf{A}^n)$ via $e_I \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} e_{1\vee I} & \text{si } 1 \notin I \\ 0 & \text{si } 1 \in I \end{array} \right.$ ce qui n'est pas autre chose que $e_I \mapsto e_1 \wedge e_I$. □

**Remarque 8.4.** Grâce au travail d'identification des flèches fait à la page précédente, on constate que la flèche $\mathrm{H}(b, \underline{c}\,; M) \to \mathrm{H}(ab, \underline{c}\,; M)$ est issue du morphisme $\wedge v_a \otimes \mathrm{id}_M$ et que la flèche $\mathrm{H}(b, \underline{c}\,; M) \to \mathrm{H}(ab, \underline{c}\,; M)$ est issue du morphisme $-\widetilde{\wedge} v_b$.

## 8.2 De la cohomologie Koszul de $ab$ à celles de $a$ et $b$ et vice-versa

Grâce à la longue suite exacte en $(a, b, ab)$-cohomologie Koszul, on obtient directement les résultats suivants (valables également en homologie, bien sûr).

**Proposition 8.5** (Le $(a, b, ab)$-trick en cohomologie Koszul)**.** *Soit $a$, $b$ deux éléments de $\mathbf{A}$ et $\underline{c} = (c_2, \ldots, c_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module et $k$ un entier.*

*En cohomologie Koszul, on a*

$$\mathrm{H}^k(a, \underline{c}\ ; M) = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{H}^k(b, \underline{c}\ ; M) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{H}^k(ab, \underline{c}\ ; M) = 0$$

**Corollaire 8.6.** *Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$ et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une suite d'exposants de $\mathbb{N}$. Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module et $k$ un entier. En notant $\underline{a}^e = (a_1^{e_1}, \ldots, a_n^{e_n})$, on a*

$$\mathrm{H}^k(\underline{a}\,; M) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{H}^k(\underline{a}^e\,; M) = 0$$

On souhaite établir la réciproque du $(a, b, ab)$-trick en cohomologie Koszul (cf. proposition 8.5). On va voir qu'il s'agit de symétriser la situation.

**Proposition 8.7.** *Soit $a$, $b$ deux éléments de $\mathbf{A}$ et $\underline{c} = (c_2, \ldots, c_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module et $k$ un entier.*

*En cohomologie Koszul, on a*

$$\mathrm{H}^k(ab, \underline{c}\ ; M) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{H}^k(a, \underline{c}\ ; M) = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{H}^k(b, \underline{c}\ ; M) = 0$$

***Preuve.*** Pour alléger les notations, on travaille sur l'anneau. L'hypothèse étant symétrique en $a$ et $b$, il suffit de prouver que $\mathrm{H}^k(a, \underline{c}) = 0$. Pour y parvenir, on aura « quand même » besoin d'échanger les rôles de $a$ et $b$.

Supposons $\mathrm{H}^k(ab, \underline{c}) = 0$. La suite $\mathscr{W}_{b,a}$ fournit une surjection $\mathscr{S}nake_{k-1} : \mathrm{H}^{k-1}(b, \underline{c}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^k(a, \underline{c})$. Et $\mathscr{W}_{a,b}$ fournit une injection $\mathscr{S}nake_k : \mathrm{H}^k(a, \underline{c}) \hookrightarrow \mathrm{H}^{k+1}(b, \underline{c})$. On est donc dans la situation suivante :

$$\mathrm{H}^{k-1}(b, \underline{c}) \xrightarrow{\ \mathscr{S}nake_{k-1}\ } \mathrm{H}^k(a, \underline{c}) \xrightarrow{\ \mathscr{S}nake_k\ } \mathrm{H}^{k+1}(b, \underline{c})$$

Or $\mathscr{S}nake = \mathrm{H}(e_1 \wedge \bullet)$ donc $\mathscr{S}nake_k \circ \mathscr{S}nake_{k-1} = 0$. Tout cela mis bout à bout, on obtient $\mathrm{H}^k(a, \underline{c}) = 0$.

On vient d'utiliser le résultat suivant : « *Pour deux morphismes de complexes $C' \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} C''$, on a* $\mathrm{H}(v \circ u) = \mathrm{H}(v) \circ \mathrm{H}(u)$ », que l'on a appliqué à $C' = \mathrm{K}(b, \underline{c})$, $C = \mathrm{K}(a, \underline{c})[1]$ et $C'' = \mathrm{K}(b, \underline{c})[2]$. □

**Corollaire 8.8.** *Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$ et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une suite d'exposants de $\mathbb{N}^\star$. Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module et $k$ un entier. En notant $\underline{a}^e = (a_1^{e_1}, \ldots, a_n^{e_n})$, on a*

$$\mathrm{H}^k(\underline{a}^e\,; M) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{H}^k(\underline{a}\,; M) = 0$$

## 8.3 Une approche élémentaire avec du calcul extérieur

On se propose de reconstruire à la main la longue suite exacte $\mathcal{W}_{a,b}$ (avec $M = \mathbf{A}$) en utilisant uniquement du calcul extérieur. Pas d'outils homologiques, donc.

Le contexte est le même : $a$ et $b$ deux éléments de $\mathbf{A}$ et $\underline{c} = (c_2, \dots, c_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. Dans la suite, il sera commode de considérer les vecteurs de $\mathbf{A}^n$ suivants

$$\underline{a} = (a, c_2, \dots, c_n), \qquad \underline{b} = (b, c_2, \dots, c_n), \qquad \underline{ab} = (ab, c_2, \dots, c_n)$$

et on notera encore $\underline{c}$ le *vecteur* de $\mathbf{A}^n$ égal à $(0, c_2, \dots, c_n)$.

On désigne par $v_a$ l'endomorphisme de $\mathbf{A}^n$ canoniquement associé à $\mathrm{diag}(a, 1, \dots, 1)$. Idem pour $v_b$. Autrement dit,

$$v_a(e_i) = \begin{cases} a\,e_1 & \text{si } i = 1 \\ e_i & \text{si } i \neq 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad v_b(e_i) = \begin{cases} b\,e_1 & \text{si } i = 1 \\ e_i & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$$

On étend ces endomorphismes à $\bigwedge(\mathbf{A}^n)$ de la façon suivante :

$$\wedge v_a(e_I) = \begin{cases} a\,e_I & \text{si } 1 \in I \\ e_I & \text{si } 1 \notin I \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\wedge} v_b(e_I) = \begin{cases} e_I & \text{si } 1 \in I \\ b\,e_I & \text{si } 1 \notin I \end{cases}$$

Ceci peut s'écrire de manière condensée à l'aide du produit intérieur (on a privilégié le produit intérieur droit pour rappeler la différentielle du Koszul descendant) :

$$\wedge v_a(x) \;=\; a\,e_1 \wedge (x \llcorner e_1) + (e_1 \wedge x) \llcorner e_1 \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\wedge} v_b(x) \;=\; e_1 \wedge (x \llcorner e_1) + (b\,e_1 \wedge x) \llcorner e_1$$

Pour alléger l'écriture, on notera parfois $x^+ = e_1 \wedge (x \llcorner e_1)$ et $x^- = (e_1 \wedge x) \llcorner e_1$ de sorte que

$$\wedge v_a(x) \;=\; ax^+ + x^- \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\wedge} v_b(x) \;=\; x^+ + bx^-$$

On constate que les égalités ci-dessus correspondent à la décomposition de $E = \bigwedge(\mathbf{A}^n)$ que voici $E = e_1 \wedge E \oplus E \llcorner e_1$. Relativement à cette décomposition, $\bullet^+$ (resp. $\bullet^-$) n'est ni plus ni moins que le projecteur sur le premier (resp. deuxième) facteur. Pour $x$ et $y$ deux éléments de $\bigwedge(\mathbf{A}^n)$, on a bien sûr les règles de calcul :

$$(x \wedge y)^+ = x^+ \wedge y^- + x^- \wedge y^+ \qquad \text{et} \qquad (x \wedge y)^- = x^- \wedge y^-$$

**Proposition 8.9.** *On dispose de deux morphismes entre complexes de Koszul :*

$$\mathrm{K}^\bullet(b, \underline{c}) \xrightarrow{\wedge v_a} \mathrm{K}^\bullet(ab, \underline{c}) \xrightarrow{\widetilde{\wedge} v_b} \mathrm{K}^\bullet(a, \underline{c})$$

*(i) L'expression de la composée est :*

$$(\heartsuit) \qquad \big(\widetilde{\wedge} v_b \circ \wedge v_a\big)(x) \;=\; \underline{a} \wedge (x \llcorner e_1) + (\underline{b} \wedge x) \llcorner e_1$$

*(ii) En cohomologie, la composée* $\mathrm{H}^k(b, \underline{c}) \xrightarrow{\mathrm{H}(\wedge v_a)} \mathrm{H}^k(ab, \underline{c}) \xrightarrow{\mathrm{H}(\widetilde{\wedge} v_b)} \mathrm{H}^k(a, \underline{c})$ *est nulle.*

***Preuve.***
$(i)$ En composant, on obtient l'expression $\big(\widetilde{\wedge} v_b \circ \wedge v_a\big)(x) \;=\; a\,e_1 \wedge (x \llcorner e_1) + (b\,e_1 \wedge x) \llcorner e_1$. Posons $A = a\,e_1 \wedge (x \llcorner e_1)$ et $B = (b\,e_1 \wedge x) \llcorner e_1$ de sorte que $\big(\widetilde{\wedge} v_b \circ \wedge v_a\big)(x) = A + B$.

En utilisant que $\underline{b} = b\,e_1 + \underline{c}$, on obtient $B = (\underline{b} \wedge x) \llcorner e_1 - (\underline{c} \wedge x) \llcorner e_1$. Or $\bullet \llcorner e_1$ est une anti-dérivation à gauche donc $(\underline{c} \wedge x) \llcorner e_1 = (\underline{c} \llcorner e_1) \wedge x + (-1)^1 \underline{c} \wedge (x \llcorner e_1) = -\underline{c} \wedge (x \llcorner e_1)$, la dernière égalité étant due au fait que $\underline{c} \llcorner e_1 = 0$. D'où $A + B = \big(A + \underline{c} \wedge (x \llcorner e_1)\big) + (\underline{b} \wedge x) \llcorner e_1$. Mais $A + \underline{c} \wedge (x \llcorner e_1) = a\,e_1 \wedge (x \llcorner e_1) + \underline{c} \wedge (x \llcorner e_1) = \underline{a} \wedge (x \llcorner e_1)$. Et on obtient bien le résultat, à savoir $A + B = \underline{a} \wedge (x \llcorner e_1) + (\underline{b} \wedge x) \llcorner e_1$.

$(ii)$ Soit $x \in \bigwedge^k$ tel que $\underline{b} \wedge x = 0$. D'après $(\heartsuit)$, on a $\big(\widetilde{\wedge} v_b \circ \wedge v_a\big)(x) = \underline{a} \wedge (x \llcorner e_1) + 0 \llcorner e_1 = \underline{a} \wedge z$ avec $z = x \llcorner e_1 \in \bigwedge^{k-1}$. □

En fait, on a mieux que $(ii)$ !

**Proposition 8.10.** *La suite ci-dessous est exacte*

$$\mathrm{H}^k(b,\underline{c}) \xrightarrow{\mathrm{H}(\wedge v_a)} \mathrm{H}^k(ab,\underline{c}) \xrightarrow{\mathrm{H}(\widetilde{\wedge} v_b)} \mathrm{H}^k(a,\underline{c})$$

*En particulier, si* $\mathrm{H}^k(a,\underline{c})=0$ *et* $\mathrm{H}^k(b,\underline{c})=0$ *alors* $\mathrm{H}^k(ab,\underline{c})=0$.

***Preuve.*** Considérons un élément au milieu, c'est-à-dire un élément $y\in\bigwedge^k$ tel que $\underline{ab}\wedge y=0$. On suppose que cet élément est dans le noyau de la flèche de droite — c'est-à-dire que $\widetilde{\wedge}v_b(y)=\underline{a}\wedge z$ pour un certain $z\in\bigwedge^{k-1}$ — et on veut montrer qu'il est dans l'image de la flèche de gauche, c'est-à-dire que $y=\wedge v_a(x) \bmod \mathrm{Im}(\underline{ab}\wedge\bullet)$ pour un certain élément $x\in\bigwedge^k$ vérifiant $\underline{b}\wedge x=0$.

En examinant le cas $k=1$ au brouillon, on constate que $x=e_1\wedge z+y^-$ est candidat. Ci-dessous les deux vérifications à faire pour élire $x$. A gauche, on utilise ① : $\big(\widetilde{\wedge}v_b(y)=\underline{a}\wedge z\big)^-$ et ② : $\big(\underline{ab}\wedge y=0\big)^-$. A droite, on exploite ③ : $\big(\widetilde{\wedge}v_b(y)=\underline{a}\wedge z\big)^+$.

$$\begin{array}{rcl}
\underline{b}\wedge x &=& \underline{b}\wedge e_1\wedge z+\ \underline{b}\wedge y^-\\
&=& \underline{c}\wedge e_1\wedge z^-+\big(be_1\wedge y^-+\underline{c}\wedge y^-\big)\\
&=& e_1\wedge(by^--\underline{c}\wedge z^-)+\underline{c}\wedge y^-\\
&\overset{①\text{ et }②}{=}& e_1\wedge 0\ +\ 0\\
&=& 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
y-\wedge v_a(x) &=& y-\wedge v_a(e_1\wedge z)-\wedge v_a(y^-)\\
&=& y-ae_1\wedge z^--y^-\\
&=& y^+-ae_1\wedge z^-\\
&\overset{③}{=}& \underline{c}\wedge z^+\\
&=& \underline{ab}\wedge z^+
\end{array}$$

Bien que la preuve du « En particulier » soit immédiate, on explicite cette implication en vue de la section suivante. Soit $y\in\bigwedge^k$ tel que $\underline{ab}\wedge y=0$. Comme $\mathrm{H}^k(a,\underline{c})=0$, l'image dans ce quotient de $\widetilde{\wedge}v_b(y)$ est nulle, autrement dit il existe $z\in\bigwedge^{k-1}$ tel que $\widetilde{\wedge}v_b(y)=\underline{a}\wedge z$. On se retrouve ainsi dans la situation ci-dessus et on peut donc mener les mêmes calculs. L'égalité de gauche $\underline{b}\wedge x=0$ combinée avec l'hypothèse $\mathrm{H}^k(b,\underline{c})=0$ fournit un $t\in\bigwedge^{k-1}$ tel que $x=\underline{b}\wedge t$. L'élément $\wedge v_a(x)$ s'écrit donc $v_a(\underline{b})\ \wedge\ \wedge v_a(t)=\underline{ab}\ \wedge\ \wedge v_a(t)$. Ainsi, l'égalité de la colonne de droite prend la forme $y=\underline{ab}\wedge\big(\wedge v_a(t)+z^+\big)$. □

Terminons cette section en montrant que l'on peut obtenir toute la longue suite exacte $\mathscr{W}_{a,b}$ (on reste avec $M=\mathbf{A}$ de sorte que $\mathscr{S}_{\mathrm{nake}}=e_1\wedge\bullet$) :

$$\cdots\longrightarrow \mathrm{H}^k(b,\underline{c})\xrightarrow{\mathrm{H}(\wedge v_a)}\mathrm{H}^k(ab,\underline{c})\xrightarrow{\mathrm{H}(\widetilde{\wedge}v_b)}\mathrm{H}^k(a,\underline{c})\xrightarrow{\mathscr{S}_{\mathrm{nake}}}\mathrm{H}^{k+1}(b,\underline{c})\longrightarrow\mathrm{H}^{k+1}(ab,\underline{c})\longrightarrow\mathrm{H}^{k+1}(a,\underline{c})\longrightarrow\cdots$$

en ayant recourt uniquement à du calcul extérieur. La proposition précédente montre l'exactitude au milieu, *i.e.* en $\mathrm{H}^k(ab,\underline{c})$. Reste à établir les deux autres exactitudes.

**Exactitude en** $\mathrm{H}^k(a,\underline{c})$**.** Soit $z\in\bigwedge^k$ tel que $\underline{a}\wedge z=0$. On suppose que $e_1\wedge z=\underline{b}\wedge x$ pour un certain $x\in\bigwedge^k$ et on veut montrer que $z=\widetilde{\wedge}v_b(y)$ modulo $\mathrm{Im}(\underline{a}\wedge\bullet)$ pour un certain $y\in\bigwedge^k$ vérifiant $\underline{ab}\wedge y=0$. On pose $y=z^+ +\wedge v_a(x)$. On vérifie que $\underline{ab}\wedge y=0$ et $\widetilde{\wedge}v_b(y)-z=\underline{a}\wedge ?$ avec $?=x\llcorner e_1$.

$$\begin{array}{rcl}
\underline{ab}\wedge y &=& \underline{ab}\wedge z^+\ +\ \underline{ab}\wedge\wedge v_a(x)\\
&=& \underline{c}\wedge z^+\ +\ \wedge v_a(\underline{b}\wedge x)\\
&\overset{\text{Hyp}}{=}& \underline{c}\wedge z^+\ +\ \wedge v_a(e_1\wedge z)\\
&=& \underline{c}\wedge z^+\ +\ ae_1\wedge z^-\\
&\overset{\text{Hyp}}{=}& (\underline{a}\wedge z)^+\\
&=& 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\widetilde{\wedge}v_b(y)-z &=& \widetilde{\wedge}v_b(y-z^+)-z^-\\
&=& \widetilde{\wedge}v_b\big(\wedge v_a(x)\big)-(e_1\wedge z)\llcorner e_1\\
&\overset{\text{Hyp}}{=}& \widetilde{\wedge}v_b\big(\wedge v_a(x)\big)-(\underline{b}\wedge x)\llcorner e_1\\
&\overset{\heartsuit}{=}& \underline{a}\wedge(x\llcorner e_1)
\end{array}$$

**Exactitude en $\mathrm{H}^k(b, \underline{c})$.** Soit $x \in \bigwedge^k$ tel que $\underline{b} \wedge x = 0$. On suppose que $\wedge v_a(x) = \underline{ab} \wedge y$ pour un certain $y \in \bigwedge^{k-1}$ et on veut montrer que $x = e_1 \wedge z$ modulo $\mathrm{Im}(\underline{b} \wedge \bullet)$ pour un certain $z \in \bigwedge^{k-1}$ vérifiant $\underline{a} \wedge z = 0$. L'élément $z = -\widetilde{\wedge} v_b(y) + x \llcorner e_1$ convient. En effet, on vérifie que $\underline{a} \wedge z = 0$ et que $x - e_1 \wedge z = \underline{b} \wedge y^-$.

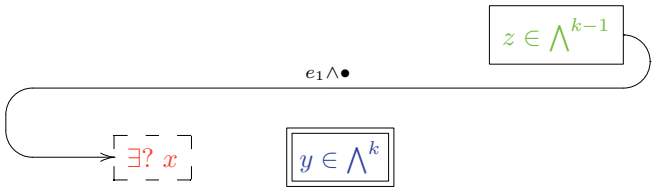
$$
\begin{aligned}
\underline{a} \wedge z &= -\underline{a} \wedge \widetilde{\wedge} v_b(y) + \underline{a} \wedge (x \llcorner e_1) \\
&= -\widetilde{\wedge} v_b\big(v_b(\underline{a}) \wedge y\big) + \underline{a} \wedge (x \llcorner e_1) \\
&= -\widetilde{\wedge} v_b\big(\underline{ab} \wedge y\big) + \underline{a} \wedge (x \llcorner e_1) \\
&\overset{\text{Hyp}}{=} -\widetilde{\wedge} v_b\big(\wedge v_a(x)\big) + \underline{a} \wedge (x \llcorner e_1) \\
&\overset{\heartsuit}{=} -(\underline{b} \wedge x) \llcorner e_1 \\
&\overset{\text{Hyp}}{=} -0 \llcorner e_1 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x - e_1 \wedge z &= x + e_1 \wedge \widetilde{\wedge} v_b(y) - e_1 \wedge (x \llcorner e_1) \\
&= x^- + e_1 \wedge b y^- \\
&\overset{\text{Hyp}}{=} \underline{c} \wedge y^- + e_1 \wedge b y^- \\
&= \underline{b} \wedge y^-
\end{aligned}
$$

**Au fait, comment ça marche tous ces calculs ?**

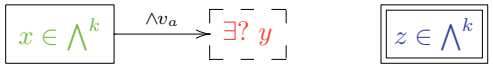
Pour récapituler l'exactitude de $\mathcal{W}_{a,b}$ de manière explicite, voici comment on pourrait présenter les choses. On représente en bleu doublement encadré l'élément initial, en vert simplement encadré l'élément qui provient de l'hypothèse : « bleu est dans le noyau de », et en rouge encadré de pointillés, l'élément à trouver dont bleu est l'image.

- Au milieu



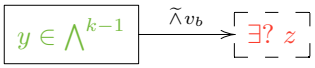

Prendre $x \ = \ e_1 \wedge z \ + \ y^-$

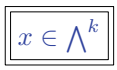
- A droite




Prendre $y \ = \ \wedge v_a(x) \ + \ z^+$

- A gauche




Prendre $z \ = \ -\widetilde{\wedge} v_b(y) \ + \ x \llcorner e_1$

Ces schémas sont censés illustrer le principe suivant. On part d'un élément bleu, qui est dans le noyau d'une flèche, *i.e.* s'envoie sur 0 dans un certain H(...) qui est un quotient par Im(...), donc il existe un élément vert à l'étage, au-dessus du 0.

On veut obtenir l'élément bleu comme l'image d'un élément rouge. Je dis simplement que l'élément rouge ne peut pas venir de n'importe où ! Il est construit à partir de l'image de l'élément vert et d'un petit terme correctif bâti à partir de l'élément bleu.

## 8.4 Le cas particulier $k = 1$ du $(a, b, ab)$-trick

En guise de conclusion, voici une preuve élémentaire, sous une présentation « matricielle », du $(a, b, ab)$-trick pour $k = 1$. Pour chaque égalité, on fait figurer en parallèle la forme matricielle et son pendant dans l'algèbre extérieure. Cette présentation est censée rendre les calculs de la section précédente plus humains (digestes ?).

**Proposition 8.11.** *On a l'implication*

$$\mathrm{H}^1(a, \underline{c}\ ; M) = 0 \quad et \quad \mathrm{H}^1(b, \underline{c}\ ; M) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{H}^1(ab, \underline{c}\ ; M) = 0$$

*Comme le $(a, b, ab)$-trick est facile pour $k = 0$, on a en particulier l'implication*

$$\mathrm{Gr}(a, \underline{c}; M) \geqslant 2 \quad et \quad \mathrm{Gr}(b, \underline{c}; M) \geqslant 2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Gr}(ab, \underline{c}; M) \geqslant 2$$

***Preuve.*** On présente la preuve dans le cas $M = \mathbf{A}$ pour éviter d'alourdir les notations avec l'usage du produit tensoriel. Soit $y = (y_1, \ldots, y_n)$ un habitant de $\mathbf{A}^n$ tel que

$$\begin{pmatrix} ab \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \qquad \Big| \qquad \underline{a} \wedge y = 0$$

On veut montrer que $y$ est colinéaire à $\underline{ab}$. Comme on veut utiliser les hypothèses (!), on distribue $b$ à droite sur les $n-1$ derniers termes. Autrement dit, par un jeu d'écriture, l'égalité ci-dessus se réécrit :

$$\begin{pmatrix} a \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ by_2 \\ \vdots \\ by_n \end{pmatrix} = 0 \qquad \Big| \qquad \underline{a} \wedge \widetilde{\wedge} v_b(y) = 0$$

On utilise ici que $\mathrm{H}^1(\underline{a}) = 0$, donc il existe un $z \in \bigwedge^0(\mathbf{A}^n)$ tel que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ by_2 \\ \vdots \\ by_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az \\ c_2 z \\ \vdots \\ c_n z \end{pmatrix} \qquad \Big| \qquad \widetilde{\wedge} v_b(y) = \underline{a} \wedge z$$

Maintenant, on met au chaud la première ligne $y_1 = az$ et on fixe très fort du regard les $(n-1)$-dernières lignes : il y a du $b$ partout à gauche et du $z$ partout à droite, ce que l'on réécrit

$$\begin{pmatrix} b \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} z \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0 \qquad \Big| \qquad \begin{array}{l} \underline{b} \wedge x = 0 \\ \text{avec } x = e_1 \wedge z + y^- \end{array}$$

On utilise à présent que $\mathrm{H}^1(\underline{b}) = 0$, d'où l'existence d'un $t \in \bigwedge^0(\mathbf{A}^n)$ tel que

$$\begin{pmatrix} z \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bt \\ c_2 t \\ \vdots \\ c_n t \end{pmatrix} \qquad \Big| \qquad \underline{x} = \underline{b} \wedge t$$

On extrait la première ligne qui, combinée avec l'encadré, donne $y_1 = abt$ et on garde les $(n-1)$-dernières. Bref, on obtient :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abt \\ c_2 t \\ \vdots \\ c_n t \end{pmatrix} \qquad \Big| \qquad \begin{array}{l} y = \underline{ab} \wedge t^- + \underline{ab} \wedge (\overbrace{at^+ + z^+}^{=0}) \\ y = \underline{ab} \wedge (\wedge v_a(t) + z^+) \end{array}$$

C'est exactement ce que l'on voulait ! □

# Chapitre II

# Le complexe de Čech

## 1 Définition du complexe de Čech

**Une définition globale**

Pour une suite $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, on définit son complexe de Čech $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(\mathbf{A})$

$$0 \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^0_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^1_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \longrightarrow 0$$

Le terme $\check{\mathrm{C}}^k_{\underline{a}}(\mathbf{A})$ de degré $k$ est une somme directe de localisés $\mathbf{A}_{a_I}$ de $\mathbf{A}$. Précisément :

$$\check{\mathrm{C}}^k_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \;=\; \bigoplus_{\#I=k} \mathbf{A}_{a_I} \qquad \text{où } I \text{ est une partie de } \{1,\dots,n\} \;\text{ et }\; a_I = \prod_{i\in I} a_i$$

La différentielle est donnée par

$$d : \bigoplus_{\#I=k} \mathbf{A}_{a_I} \longrightarrow \bigoplus_{\#J=k+1} \mathbf{A}_{a_J}, \qquad x_I \mapsto \bigoplus_{j\notin I} (-1)^{\varepsilon_j(I)}\,(x_I)_{I\vee j}$$

où $\varepsilon_j(I)$ est le nombre d'éléments de $I$ strictement inférieurs à $j$.

Ce complexe a un lien de parenté évident avec le complexe de Koszul montant de $\underline{a}$ tout en étant différent bien entendu. La suite $\underline{a}$ n'intervient pas dans la différentielle du complexe de Čech mais elle intervient dans ses termes. C'est exactement le contraire qui arrive pour le complexe de Koszul.

Il n'est pas difficile d'étendre les scalaires à un module $M$ et de définir $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(M)$ comme étant $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbf{A}} M$. Dit autrement, il s'agit de remplacer $\mathbf{A}_{a_I}$ par $M_{a_I}$ (voir la description donnée à la page 33).

**Via le produit tensoriel de complexes élémentaires**

Il est indispensable de disposer de plusieurs approches du complexe de Čech. Par exemple, avec la définition ci-dessus, vérifier que $d \circ d = 0$ est relativement fastidieux. C'est en revanche immédiat avec la description donnée par le produit tensoriel de complexes élémentaires. En suivant la définition initiale, le complexe élémentaire $\check{\mathrm{C}}^\bullet_a(\mathbf{A})$ d'un scalaire $a$ s'explicite de la façon suivante :

$$\check{\mathrm{C}}^k_a(\mathbf{A}) \;=\; \begin{cases} \mathbf{A} & \text{si } k=0 \\ \mathbf{A}_a & \text{si } k=1 \end{cases} \qquad\qquad d(x) \;=\; \begin{cases} x_a & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k=1 \end{cases}$$

Ci-dessous, nous mettons en isomorphie le complexe $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(\mathbf{A})$ et le produit tensoriel des complexes élémentaires $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{a_i}(\mathbf{A})$. Par définition, ce produit tensoriel est une somme directe de :

$$(\diamond) \qquad \check{\mathrm{C}}^{k_1}_{a_1} \otimes \check{\mathrm{C}}^{k_2}_{a_2} \otimes \cdots \otimes \check{\mathrm{C}}^{k_n}_{a_n} \quad \text{avec } k_j \in \{0,1\}$$

et la différentielle (voir cette formule générale dans Bourbaki, Algèbre homologique, p. 63) est donnée par :

$$(\diamond\diamond) \qquad d(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k_1+\cdots+k_{i-1}} x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes d(x_i) \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n$$

Chaque complexe élémentaire est défini par :

$$\check{\mathrm{C}}^{k_i}_{a_i} \;=\; \begin{cases} \mathbf{A} & \text{si } k_i = 0 \\ \mathbf{A}_{a_i} & \text{si } k_i = 1 \end{cases} \qquad\qquad d(x_i) \;=\; \begin{cases} (x_i)_{a_i} & \text{si } k_i = 0 \\ 0 & \text{si } k_i = 1 \end{cases}$$

Notons $I = \{i \mid k_i = 1\}$ de sorte que $i \notin I \Leftrightarrow k_i = 0$. Le produit tensoriel $(\diamond)$ s'identifie alors à $\bigotimes_{i\in I} \mathbf{A}_{a_i} \simeq \mathbf{A}_{a_I}$. Examinons à présent la différentielle $(\diamond\diamond)$. Intervient la quantité $k_1 + \cdots + k_{i-1}$ qui est le nombre d'éléments de $I$ strictement inférieurs à $i$ noté $\varepsilon_i(I)$. De plus, la somme porte sur les $i$ tels que $k_i = 0$ c'est-à-dire sur les $i \notin I$ (car les $i \in I$ contribuent à 0). Ainsi en notant $y \in \mathbf{A}_{a_I}$ l'élément correspondant à l'élément $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ du produit tensoriel $(\diamond)$, on a :

$$d(y) = \sum_{i\notin I} (-1)^{\varepsilon_i(I)} y_i \qquad \text{avec} \qquad y_i \leftrightarrow x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes (x_i)_{a_i} \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n$$

On voit alors que $y_i$ n'est autre que l'image de $y$ par le morphisme de localisation $\mathbf{A}_{a_I} \to \mathbf{A}_{a_{I\vee i}}$ ce que nous avons noté $y_{I\vee i}$. Finalement,

$$d(y) \;=\; \sum_{i\notin I} (-1)^{\varepsilon_i(I)}\, y_{I\vee i}$$

ce qui est très exactement la différentielle donnée sur $\check{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\underline{a}}(\mathbf{A})$.

## 2 Propriétés élémentaires de la cohomologie de Čech

**Proposition 2.1.** *Soit $b$ l'un des $a_\ell$ et considérons la sous-suite $\underline{a}' = \underline{a}\backslash\{b\}$ de $\underline{a}$. Pour tout $\mathbf{A}$-module $M$, on dispose de la suite exacte longue en cohomologie de Čech,*

$$\cdots \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i-1}_{\underline{a}'}(M)_b \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}'}(M) \xrightarrow{\textit{localisation}} \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}'}(M)_b \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{a}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{a}'}(M) \longrightarrow \cdots$$

***Preuve.*** Une preuve différente de III-2.6 consiste à réaliser $\check{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\underline{a}}(M) \simeq \check{\mathrm{C}}^{\bullet}_{b}(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbf{A}} \check{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\underline{a}'}(M)$ comme le complexe cône $\mathcal{C}$ du morphisme de localisation $\check{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\underline{a}'}(M) \to \check{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\underline{a}'}(M)_b$ et à exploiter la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\underline{a}'}(M)_b[-1] \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\underline{a}'}(M) \longrightarrow 0$$

On déroule la longue suite exacte en cohomologie associée dont on sait que le morphisme de liaison est donné par la localisation en $b$. Voir l'appendice A-2. pour la définition du mapping cone montant. □

**Proposition 2.2.** *Les modules $\check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M)$ sont de $\langle\underline{a}\rangle$-torsion, i.e. $\check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M)_b = 0$ pour tout $b$ élément de $\underline{a}$.*

***Preuve.*** On propose une démonstration différente de celle donnée en III-2.6. Il s'agit de montrer que $\check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M)_{a_\ell} = 0$ pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$. Comme on sait que $\check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M)_{a_\ell} \simeq \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M_{a_\ell})$, on peut se permettre de supposer que $a_\ell$ est inversible. On se ramène donc à montrer l'implication $a_\ell$ inversible $\Rightarrow \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M) = 0$. Pour simplifier, on fait la démonstration avec $\ell = 1$. Désormais $a_1$ est inversible. Pour une partie $I$ contenant 1, on notera $\mathrm{loc}_I^{-1}$ l'inverse du morphisme de localisation $\mathrm{loc}_I : M_{I\backslash 1} \to M_I$, qui existe bien car $a_1$ est inversible.

On définit une application linéaire $h : \check{\mathrm{C}}^i_{\underline{a}}(M) \to \check{\mathrm{C}}^{i-1}_{\underline{a}}(M)$ en posant, pour $x_I \in M_I$ :

$$h(x_I) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \notin I \\ x_{I\setminus 1} & \text{si } 1 \in I \text{ et en posant } x_{I\setminus 1} = \mathrm{loc}_I^{-1}(x_I) \end{cases}$$

On va vérifier que $h$ est une homotopie contractante *i.e.* que $d \circ h + h \circ d = \mathrm{id}$, de sorte que le complexe sera acyclique. Soit $x_I$ un élément de $M_I$ et déterminons $(d \circ h + h \circ d)(x_I)$.

Cas où $1 \notin I$. On a $(d \circ h)(x_I) = 0$ et $(h \circ d)(x_I) = h\big(\bigoplus_{i\notin I}(-1)^{\varepsilon_i(I)}\, x_{I\vee i}\big)$. La seule contribution dans ce dernier terme est pour $i = 1$ (car $1 \notin I$) et vaut $\mathrm{loc}_I^{-1}(x_{I\vee 1}) = x_I$.

Cas où $1 \in I$. On pose $x_{I\setminus 1} = \mathrm{loc}_I^{-1}(x_I)$. D'une part, en notant $\nu_i = \varepsilon_i(I \setminus 1)$, on a

$$(d \circ h)(x_I) \;=\; d(x_{I\setminus 1}) \;=\; \bigoplus_{i\notin I\setminus 1} (-1)^{\nu_i}\, x_{(I\setminus 1)\vee i} \;=\; x_I \,\oplus\, \bigoplus_{i\notin I} (-1)^{\nu_i}\, x_{(I\setminus 1)\vee i}$$

D'autre part, en notant $\mu_i = \varepsilon_i(I)$, on a

$$(h \circ d)(x_I) \;=\; h\Big(\bigoplus_{i\notin I} (-1)^{\mu_i}\, x_{I\vee i}\Big)$$

Dans cette dernière somme, on a $1 \in I \vee i$ (car $1 \in I$) donc $h(x_{I\vee i}) = x_{(I\setminus 1)\vee i}$. De plus $\mu_i = \nu_i + 1$ (car $(I \setminus 1) \vee i$ versus $I \vee i$) ainsi cette somme est exactement égale à l'opposé de la somme ci-dessus. On obtient donc $(d \circ h + h \circ d)(x_I) = x_I$. □

Pour la preuve de la proposition suivante, voir la proposition III-2.6.

**Proposition 2.3.** *La cohomologie de Čech est invariante par radical et donc a fortiori par idéal, c'est-à-dire que pour deux suites $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de $\mathbf{A}$, on a*

$$\sqrt{\underline{a}} \;=\; \sqrt{\underline{b}} \quad\Longrightarrow\quad \check{\mathrm{H}}^\bullet_{\underline{a}}(M) \;\simeq\; \check{\mathrm{H}}^\bullet_{\underline{b}}(M).$$

# 3 Cohomologie de Čech et profondeur

## 3.1 La fameuse propriété de « depth-sensitivity of the Čech complex »

La cohomologie de Čech est sensible à la profondeur. Une première façon de le sentir consiste à montrer à la main que si l'idéal contient une suite $M$-régulière de longueur $k$ alors la cohomologie de Čech s'annule en les $k$ premiers degrés cohomologiques, *i.e.* $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ pour tout $i < k$. Quand je dis « à la main », j'y vais un peu fort car il est quand même plus reposant de raisonner par récurrence en utilisant la longue suite exacte.

**Proposition 3.1.** *Si $\langle \underline{a} \rangle$ contient une suite $M$-régulière de longueur $k$ alors $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ pour tout $i < k$.*

***Preuve.*** On procède par récurrence sur $k$. Pour $k = 0$, il n'y a rien à démontrer. On suppose $k \geqslant 1$. Soit $(b_1, \ldots, b_k)$ une suite $M$-régulière contenue dans $\langle \underline{a} \rangle$. Tout d'abord $\check{\mathrm{H}}^0_{\underline{a}}(M) = 0$ ; en effet, par définition, on a

$$\check{\mathrm{H}}^0_{\underline{a}}(M) \;=\; \{x \in M \mid \exists\, e \text{ tel que } \langle \underline{a} \rangle^e x = 0\}$$

Ainsi pour un élément $x \in \check{\mathrm{H}}^0_{\underline{a}}(M)$, il existe $e$ tel que $b_1^e x = 0$, donc $x = 0$ car $b_1$ est $M$-régulier.

Montrons maintenant que $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ pour $1 \leqslant i < k$ en prouvant que $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) \xrightarrow{\times b_1} \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)$ est injective. Pour cela, on considère la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\times b_1} M \longrightarrow M/b_1M \longrightarrow 0$$

qui induit une longue suite exacte en cohomologie dont voici un extrait :

$$\cdots \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i-1}_{\underline{a}}(M/b_1M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) \xrightarrow{\times b_1} \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) \longrightarrow \cdots$$

Comme la suite $(b_2,\dots,b_k)$ est une suite $(M/b_1M)$-régulière contenue dans $\langle \underline{a}\rangle$, la récurrence donne $\check{\mathrm{H}}^{i-1}_{\underline{a}}(M/b_1M)=0$ et la multiplication par $b_1$ sur $\check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M)$ est injective comme annoncé. On termine en utilisant que tout élément de $\check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M)$ est annulé par une puissance de $b_1$ : soit $x\in\check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M)$, il existe $e$ tel que $b_1^e x=0$ donc $b_1^{e-1}x=0$ par ce qui précède, puis $x=0$. □

En fait, on a bien plus général que ce résultat. Il s'avère que l'annulation des $k$ premiers modules de cohomologie de Čech est équivalente à l'annulation des $k$ premiers modules de cohomologie Koszul, ce qui peut donc s'écrire avec la notation Gr du premier chapitre (confer page 6) :

$$\mathrm{Gr}(\underline{a}\,;M)\geqslant k \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, i<k,\quad \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M)=0$$

C'est l'objet de la proposition qui figure en V-2.1. La preuve du sens ⇒ est montrée au chapitre IV en utilisant le bicomplexe Koszul-Čech (cf. proposition IV-4.1).

Il n'est pas inintéressant de se faire la main sur le cas $k=2$ en montrant directement l'équivalence entre la nullité de la cohomologie Koszul et la nullité de la cohomologie de Čech.

**Le cas $k=2$**

▷ Passer de Koszul à Čech. Supposons que $\mathrm{H}^0(\underline{a}\,;M)=0$ et $\mathrm{H}^1(\underline{a}\,;M)=0$.

Tout d'abord, on a $\check{\mathrm{H}}^{0}_{\underline{a}}(M)=0$. En effet, soit $x\in M$ tel qu'il existe un exposant $e$ vérifiant $a_i^e x=0$ pour tout $i$. Alors $\langle \underline{a}\rangle^N x=0$ pour un certain entier $N$. Comme $\mathrm{H}^0(\underline{a}\,;M)=0$ *i.e.* $\mathrm{Ann}_M(\underline{a})=0$, on en déduit que $\langle \underline{a}\rangle^{N-1}x=0$. On finit donc par obtenir $x=0$.

Soit $(x'_1,\dots,x'_n)\in\bigoplus M_{a_i}$ tel que $x'_i=x'_j$ dans le double localisé $M_{a_ia_j}$. En travaillant un peu, on peut trouver un exposant $e$ et des éléments $x_i\in M$ tels que $x'_i=\frac{x_i}{a_i^e}$ avec $a_i^e x_j=a_j^e x_i$ dans $M$. Comme $\mathrm{H}^1(\underline{a}^e\,;M)=0$ (car[1] $\mathrm{H}^1(\underline{a}\,;M)=0$), on en déduit qu'il existe un élément $x\in M$ tel que $x_i=a_i^e x$ c'est-à-dire tel que $x'_i=x$ dans le localisé $M_{a_i}$. Ainsi $(x'_1,\dots,x'_n)$ est l'image de $x\in M$ par la première différentielle du complexe de Čech. Autrement dit $\check{\mathrm{H}}^{1}_{\underline{a}}(M)=0$.

▷ Passer de Čech à Koszul. Supposons que $\check{\mathrm{H}}^{0}_{\underline{a}}(M)=0$ et $\check{\mathrm{H}}^{1}_{\underline{a}}(M)=0$.

On obtient facilement que $\mathrm{H}^0(\underline{a}\,;M)=0$. Pour montrer que $\mathrm{H}^1(\underline{a}\,;M)=0$, considérons des éléments $x_i\in M$ tels que $a_ix_j\overset{\star}{=}a_jx_i$. On définit $x'_i=\frac{x_i}{a_i}\in M_{a_i}$. D'après $\star$, on a $x'_i=x'_j$ dans $M_{a_ia_j}$. L'hypothèse dit alors qu'il existe $x\in M$ tel que $x=x'_i$ dans $M_{a_i}$ c'est-à-dire tel que $a_i^e(x_i-a_ix)\overset{\diamond}{=}0$ dans $M$ pour un certain $e$. On aimerait montrer que $x_i-a_ix=0$. Pour cela, il suffirait que ce dernier élément soit annulé par des $a_j^\bullet$ (car $\check{\mathrm{H}}^{0}_{\underline{a}}(M)=0$), ce qui est bien le cas :

$$a_ix_j\overset{\star}{=}a_jx_i \quad\Longrightarrow\quad a_j(x_i-a_ix)=a_i(x_j-a_jx) \quad\overset{\times a_j^e}{\Longrightarrow}\quad a_j^{e+1}(x_i-a_ix)=a_i\underbrace{a_j^e(x_j-a_jx)}_{\overset{\diamond}{=}0}$$

## 3.2 Résultats préparatoires pour la profondeur du produit de deux idéaux

Soit $\underline{a}=(a_1,\dots,a_n)$ et $\underline{b}=(b_1,\dots,b_m)$ deux suites de scalaires et $M$ un $\mathbf{A}$-module. On a un morphisme canonique surjectif de complexes de Čech :

$$\check{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\underline{a},\underline{b}}(M)\;\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\;\check{\mathrm{C}}^{\bullet}_{\underline{a}}(M)$$

qui, en cohomologie, donne un morphisme canonique $\check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a},\underline{b}}(M)\to\check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a}}(M)$.

**Lemme 3.2.** *Si* $\mathrm{Gr}(\underline{a}\,;M)\geqslant k$ *alors le morphisme canonique* $\check{\mathrm{H}}^{k}_{\underline{a},\underline{b}}(M)\to\check{\mathrm{H}}^{k}_{\underline{a}}(M)$ *est injectif.*

***Première preuve.*** Commençons par faire la preuve pour une suite $\underline{b}$ réduite à un élément $b$. L'hypothèse fournit $\check{\mathrm{H}}^{k-1}_{\underline{a}}(M)=0$. La suite exacte $\check{\mathrm{H}}^{k-1}_{\underline{a}}(M)_b\to\check{\mathrm{H}}^{k}_{\underline{a},b}(M)\to\check{\mathrm{H}}^{k}_{\underline{a}}(M)$ extraite de la longue suite de la proposition 2.1 permet de conclure. Pour une suite $\underline{b}=(b_1,b_2)$, on reprend le raisonnement précédent avec la suite $\underline{a},b_1$ et l'élément $b_2$. Signalons que l'on a bien $\check{\mathrm{H}}^{k-1}_{\underline{a},b_1}(M)=0$ car $\mathrm{Gr}(\underline{a},b_1\,;M)\geqslant k$ (utiliser $\mathrm{Gr}(\underline{a}\,;M)\geqslant k$ et le point 1 de la proposition I-6.2). □

1. L'implication $\mathrm{H}^1(\underline{a}\,;M)=0\Rightarrow\mathrm{H}^1(\underline{a}^e\,;M)=0$ n'est pas une évidence. Confer le corollaire I-8.6.

***Seconde preuve.*** On peut fournir une preuve directe sans passer par la considération d'une suite réduite à un élément en utilisant le chapitre IV. On considère le bicomplexe $K^{p,q} = \check{\mathrm{C}}^p_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A}) \otimes M$ dont le complexe total est $T^\bullet = \check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a},\underline{b}}(M)$. La ligne $q$ est le complexe $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(M) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A})$. En utilisant l'hypothèse, on a donc exactitude en ligne en les points $(p,q)$ avec $p < k$. On en déduit qu'il y a exactitude en ligne sur la diagonale $k$ excepté sur l'axe des abscisses. La proposition IV-2.1 adaptée au cas des lignes dit que le morphisme $\mathrm{H}^k(T^\bullet) \to \mathrm{H}^k(K^{\bullet,0})$, qui est ici $\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a},\underline{b}}(M) \to \check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M)$, est injectif. □

**Bref aperçu sur la suite exacte de Mayer-Vietoris, cf. chapitre III**

La longue suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\cdots \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a},\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) \oplus \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{ab}}(M) \longrightarrow \cdots$$

est obtenue à partir de la suite exacte courte de complexes, baptisée « suite exacte courte de Čech-Mayer-Vietoris » :

$$0 \longrightarrow \check{\mathrm{C}}(\Delta) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{ab}} \oplus \check{\mathrm{C}}_{\underline{b},\,\underline{ab}} \longrightarrow \check{\mathrm{C}}_{\underline{ab}} \longrightarrow 0 \qquad \text{(Č-M-V)}$$

où $\Delta$ est le complexe simplicial $\mathcal{P}(\underline{a},\,\underline{ab}) \cup \mathcal{P}(\underline{b},\,\underline{ab})$ et où $\check{\mathrm{C}}(\Delta)$ est le sous-complexe de $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{b},\,\underline{ab}}$ indexé par les faces de $\Delta$. Dans la suite exacte courte ci-dessus, toutes les flèches sont canoniques issues de $\check{\mathrm{C}}_{\text{suite}} \twoheadrightarrow \check{\mathrm{C}}_{\text{sous-suite}}$. La section III-4 montre que le complexe $\check{\mathrm{C}}(\Delta)$ a même cohomologie que le complexe $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{b},\,\underline{ab}}$ qui lui-même a même cohomologie que $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{b}}$ (les isomorphismes étant bien sûr canoniques). Au milieu, les complexes $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{ab}}$ et $\check{\mathrm{C}}_{\underline{b},\,\underline{ab}}$ ont respectivement même cohomologie que $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}$ et $\check{\mathrm{C}}_{\underline{b}}$ toujours via les flèches canoniques. Ainsi, dans la suite exacte de Mayer-Vietoris, toutes les flèches sont canoniques.

**Vers la profondeur du produit de deux suites**

Pour établir l'égalité $\mathrm{Gr}(\underline{ab}\,;M) = \min\big(\mathrm{Gr}(\underline{a}\,;M),\,\mathrm{Gr}(\underline{b}\,;M)\big)$ (cf. proposition V-3.1), nous aurons besoin du résultat suivant :

**Proposition 3.3.** *Si* $\mathrm{Gr}(\underline{a}\,;M) \geqslant k$ *alors* $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{b}}(M) \simeq \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{ab}}(M)$ *pour tout* $i < k$.

***Preuve.*** La suite exacte de Mayer-Vietoris est

(MV)
$$\cdots \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a},\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) \oplus \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{ab}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{a},\underline{b}}(M) \longrightarrow \cdots$$

Pour $i < k-1$, on a $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ et $\check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{a},\underline{b}}(M) = 0$ car $\mathrm{Gr}(\underline{a}\,;M) \geqslant k$. La suite (MV) fournit alors $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{b}}(M) \simeq \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{ab}}(M)$. Enfin pour $i = k-1$, la suite (MV) s'écrit

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \oplus \check{\mathrm{H}}^{k-1}_{\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{k-1}_{\underline{ab}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a},\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M) \oplus \check{\mathrm{H}}^k_{\underline{b}}(M) \longrightarrow \cdots$$

La flèche $\check{\mathrm{H}}^{k-1}_{\underline{b}}(M) \to \check{\mathrm{H}}^{k-1}_{\underline{ab}}(M)$ est donc injective. Montrons qu'elle est aussi surjective. Le lemme 3.2 dit que la flèche $\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a},\underline{b}}(M) \to \check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M)$ est injective, donc $\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a},\underline{b}}(M) \to \check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M) \oplus \check{\mathrm{H}}^k_{\underline{b}}(M)$ l'est aussi. Par conséquent, la flèche $\check{\mathrm{H}}^{k-1}_{\underline{b}}(M) \to \check{\mathrm{H}}^{k-1}_{\underline{ab}}(M)$ est surjective. □

# 4 Cohomologie de Čech d'un S-module gradué $M$ où $\mathbf{S} = \mathbf{k}[\underline{X}]$

Ici l'anneau de base est un anneau de polynômes $\mathbf{S} = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ monté sur un corps $\mathbf{k}$. Étant donné un $\mathbf{S}$-module gradué de présentation finie, on va donner quelques informations bien connues sur les $\mathbf{S}$-modules $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)$. Certes, ils ne sont pas de type fini, mais leurs composantes homogènes $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)_d$ sont des $\mathbf{k}$-espaces vectoriels de dimension finie et sont même nulles pour $d$ assez grand (théorème d'annulation de Serre). Pour un entier $e$ bien choisi, on peut même mettre ces composantes homogènes en isomorphie avec les composantes homogènes de la cohomologie Koszul $\mathrm{H}^i(\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\,; M)_d$, où $\underline{X}^{\boldsymbol{e}} = (X_1^e, \ldots, X_n^e)$. Tout ceci passe évidemment par l'étude du cas $M = \mathbf{S}$ : c'est l'objet de la première sous-section.

## 4.1 Le module $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S})$

Comme la suite $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ des indéterminées est régulière, le complexe de Čech $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{X}}(\mathbf{S})$ est acyclique en degrés $< n$, c'est-à-dire $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(\mathbf{S}) = 0$ pour tout $i < n$. Dans ce qui suit, nous allons décrire le dernier module, à savoir $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S})$, qui est non seulement un $\mathbf{S}$-module, mais aussi un $\mathbf{S}$-module *gradué* ($\mathbf{S} = \mathbf{k}[\underline{X}]$ est gradué avec sa graduation naturelle). Ici $\mathbf{k}$ n'est pas nécessairement un corps.

### Une première description via une k-base

On rappelle que la dernière flèche du complexe de Čech de $\underline{X}$ est donnée par

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{S}_{X_1 \cdots X_{i-1} X_{i+1} \cdots X_n} \longrightarrow \mathbf{S}_{X_1 \cdots X_n}, \qquad \bigoplus_{i=1}^{n} F_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (F_i)_{X_1 \cdots X_n}$$

En notant $\mathbf{S}_{\widehat{X_i}}$ l'image de $\mathbf{S}_{X_1 \cdots X_{i-1} X_{i+1} \cdots X_n}$ dans $\mathbf{S}_{X_1 \cdots X_n}$, on a alors

$$\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S}) \;=\; \frac{\mathbf{S}_{X_1 \cdots X_n}}{\mathbf{S}_{\widehat{X_1}} + \cdots + \mathbf{S}_{\widehat{X_n}}}$$

Pour cerner ce $\mathbf{S}$-module, regardons-le en tant que $\mathbf{k}$-module. Le numérateur admet pour $\mathbf{k}$-base les monômes $X^\beta$ avec $\beta \in \mathbb{Z}^n$ tandis que le dénominateur admet pour $\mathbf{k}$-base les monômes $X^\beta$ avec $\beta \in \mathbb{Z}^n$ possédant un indice $i$ tel que $\beta_i \geqslant 0$. Le quotient admet donc comme $\mathbf{k}$-base les $X^\beta$ avec $\beta_i < 0$ pour tout $i$ — ce que nous noterons $\beta \prec 0$ — ou encore les $\frac{1}{X_1 \cdots X_n}\, X^\gamma$ avec $\gamma \preccurlyeq 0$. Ainsi

$$\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S}) \;=\; \frac{1}{X_1 \cdots X_n}\, \mathbf{k}\left[\frac{1}{X_1}, \ldots, \frac{1}{X_n}\right]$$

et la structure de $\mathbf{S}$-module est donnée par ce qui suit où $\alpha \succcurlyeq 0$ et $\beta \prec 0$

$$X^\alpha \cdot X^\beta \;=\; \begin{cases} X^{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha + \beta \prec 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### Une description de chaque composante homogène

Le module $\check{\mathrm{H}} = \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S})$ est un $\mathbf{S}$-module gradué de manière évidente si bien que le produit d'un polynôme homogène de degré $e$ par un élément de $\check{\mathrm{H}}$ homogène de degré $e'$ fournit un élément de $\check{\mathrm{H}}$ homogène de degré $e + e'$. En particulier pour $e + e' = -n$, le produit fournit une forme bilinéaire (en identifiant $\mathbf{k}\frac{1}{X_1 \cdots X_n}$ à $\mathbf{k}$)

$$\Theta : \; \mathbf{S}_e \;\times\; \check{\mathrm{H}}_{e'} \quad \longrightarrow \quad \check{\mathrm{H}}_{-n} \,=\, \mathbf{k}\,\frac{1}{X_1 \cdots X_n}$$

C'est une dualité parfaite qui induit en particulier l'isomorphisme $\boxed{\check{\mathrm{H}}_{e'} \simeq (\mathbf{S}_{-e'-n})^\star}$. Pour le voir, il suffit de vérifier que les $\mathbf{k}$-bases canoniques de $\mathbf{S}_e$ et $\check{\mathrm{H}}_{e'}$ sont duales (relativement à $\Theta$) l'une de l'autre pour $e + e' = -n$. Soit $\alpha \succcurlyeq 0$ tel que $|\alpha| = e$ et $\beta \prec 0$ tel que $|\beta| = e'$. Si $e + e' = -n$, on a l'équivalence $\alpha + \beta \prec 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = -\mathbb{1}$. Ainsi $\Theta(X^\alpha, X^\beta)$ vaut $\frac{1}{X_1 \cdots X_n}$ si et seulement si $\alpha + \beta = -\mathbb{1}$ et vaut 0 sinon.

**Une description globale**

Il existe une réalisation de ce **S**-module gradué $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S})$ en termes de formes **k**-linéaires d'un certain **S**-module gradué $E$ (en fait, $E$ sera l'anneau **S** lui-même, mais twisté à cause du facteur $\frac{1}{X_1\cdots X_n}$). Cette réalisation correspond à la structure de **k**-dual gradué de $E$, noté $E^\vee$. Redonnons quelques détails.

Pour un **S**-module $E$, on note $E^\star_{\mathbf{k}} = \mathrm{Hom}(E, \mathbf{k})$ l'ensemble des formes **k**-linéaires définies sur le **k**-module $E$. On peut en faire un **S**-module via $P \cdot \mu : E \to \mathbf{k}$, $x \mapsto \mu(Px)$, où $\mu \in E^\star_{\mathbf{k}}$ et $P \in \mathbf{S}$. Lorsque $E$ est un **S**-module gradué, on note $E^\vee$ le sous-**S**-module de $E^\star_{\mathbf{k}}$ constitué des formes **k**-linéaires nulles sur les $E_i$ sauf pour un nombre fini de $i$. On le gradue par

$$E^\vee_d = \{\text{formes } \mathbf{k}\text{-linéaires } E \to \mathbf{k} \text{ nulles sur tous les } E_i \text{ avec } i \neq -d\}$$

de sorte que $E^\vee_d$ est canoniquement isomorphe à $(E_{-d})^\star = \mathrm{Hom}(E_{-d}, \mathbf{k})$. Pour $t \in \mathbb{Z}$, on a $E^\vee(t) = E(-t)^\vee$.

**Aparté.** Donnons la structure complète de $E^\vee$ pour $E = \mathbf{S}$. Pour $\beta \in \mathbb{N}^n$ (*i.e.* pour $\beta \succcurlyeq 0$), notons $\mu_\beta : \mathbf{S} \to \mathbf{k}$ la forme linéaire définie par :

$$\mu_\beta(X^{\beta'}) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \beta' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui est donc homogène de degré $-|\beta|$ en tant qu'élément de $\mathbf{S}^\vee$. Ces formes linéaires $(\mu_\beta)_{\beta \succcurlyeq 0}$ forment une **k**-base de $\mathbf{S}^\vee$ et la structure de **S**-module de $\mathbf{S}^\vee$ est donnée par

$$X^\alpha \cdot \mu_\beta \;=\; \begin{cases} \mu_{\beta-\alpha} & \text{si } \beta - \alpha \succcurlyeq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc un isomorphisme de **S**-module gradués

$$\mathbf{S}^\vee \;\longrightarrow\; \mathbf{k}\left[\frac{1}{X_1}, \ldots, \frac{1}{X_n}\right] = \mathbf{k}[\underline{X}^{-1}]$$

qui envoie $\mu_\beta$ sur $X^{-\beta}$ (la description est faite via les **k**-bases canoniques). Quitte à être redondants, rappelons que la structure de **S**-module gradué de $\mathbf{k}[\underline{X}^{-1}]$ est donnée par ce qui suit où $\alpha \succcurlyeq 0$ et $-\beta \preccurlyeq 0$

$$X^\alpha \cdot X^{-\beta} \;=\; \begin{cases} X^{\alpha-\beta} & \text{si } \alpha - \beta \preccurlyeq 0, \textit{ i.e. } \beta - \alpha \succcurlyeq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La structure de **S**-module gradué est donc bien la même de chaque côté. **Fin de l'aparté**

Revenons à $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S})$. En le considérant comme **k**-module, on a vu que $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S}) = \frac{1}{X_1\cdots X_n}\,\mathbf{k}[\underline{X}^{-1}]$. En s'inspirant de l'aparté, il est clair que l'application suivante, décrite sur les **k**-bases canoniques respectives,

$$\mathbf{S}(-n)^\vee \quad\longrightarrow\quad \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S}) = \frac{1}{X_1\cdots X_n}\,\mathbf{k}[\underline{X}^{-1}], \qquad\qquad \mu_\beta \quad\longmapsto\quad \frac{1}{X_1\cdots X_n}\,X^{-\beta} \qquad \text{avec } \beta \in \mathbb{N}^n$$

est un isomorphisme de **S**-modules gradués. Une petite vérification redondante pour se rassurer : à gauche $\mu_\beta$ est [2] de degré $-n-|\beta|$ et s'envoie bien sur un élément de même degré.

En particulier, on a donc $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S})_d = \big(\mathbf{S}(-n)^\vee\big)_d = \big(\mathbf{S}(-n)_d\big)^\star = (\mathbf{S}_{-n-d})^\star$, ce qui est en accord avec le paragraphe précédent.

**Proposition 4.1.** *On a l'isomorphisme de* **S***-modules gradués :*

$$\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S}) \;\simeq\; \mathbf{S}(-n)^\vee$$

*qui fournit, pour tout $d$, l'isomorphisme de* **k***-modules $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S})_d \simeq (\mathbf{S}_{-n-d})^\star$. En particulier, pour tout $d$ tel que $n + d > 0$, on a $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S})_d = 0$.*

**Remarque 4.2.** On peut apporter la précision suivante : comme $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(\mathbf{S}) = 0$ pour tout $i \neq n$, on a même $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(\mathbf{S})_d = 0$ pour tout $d$ tel que $i + d > 0$.

Ajoutons un twist en considérant le module $\mathbf{S}(-a)$. On a évidemment $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}\big(\mathbf{S}(-a)\big) = \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(\mathbf{S})(-a)$. Donc $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}\big(\mathbf{S}(-a)\big)_d = \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(\mathbf{S})_{d-a}$. Ainsi, on a $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}\big(\mathbf{S}(-a)\big)_d = 0$ pour tout $d$ tel que $i + d - a > 0$ *i.e.* tel que $i + d > a$.

2. On sait que $\mu_\beta \in (\mathbf{S}^\vee)_{-|\beta|} = \big(\mathbf{S}^\vee(n)\big)_{-n-|\beta|} = \big(\mathbf{S}(-n)^\vee\big)_{-n-|\beta|}$.

## 4.2 Régularité de Castelnuovo-Mumford

Afin d'illustrer le résultat précédent, nous donnons une des équivalences des différentes définitions de la régularité de Castelnuovo-Mumford d'un module gradué de présentation finie sur $\mathbf{S} = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$, où ici $\mathbf{k}$ est un corps. Un tel module $M$ admet une résolution minimale graduée, unique à isomorphisme près. À partir de cette résolution, on peut définir un entier, appelé régularité de Castelnuovo-Mumford, par :

$$\operatorname{reg} M \;=\; \max(b_i - i)$$

où $b_i$ est le maximum des degrés d'une base homogène du $i$-ème module des syzygies de $M$. En particulier, la régularité d'un $\mathbf{S}$-module libre est égale au maximum des degrés d'une base homogène. Ainsi $\operatorname{reg}\big(\mathbf{S}(-a)\big) = a$ et $\operatorname{reg}\big(\mathbf{S}(-a_1) \oplus \cdots \oplus \mathbf{S}(-a_m)\big) = \max a_j$.

Donnons un exemple un peu moins trivial. Prenons $M = \mathbf{S}/\langle X_1^{d_1}, \dots, X_n^{d_n}\rangle$ où $d_i \geqslant 1$. La résolution minimale graduée de $M$ est fournie par le complexe de Koszul de $(X_1^{d_1}, \dots, X_n^{d_n})$, donc le $k$-ème module des syzygies de $M$ est $F_k = \bigoplus_{\#I=k} \mathbf{S}(-d_I)$ avec $d_I = \sum_{i\in I} d_i$. Par définition, on a $\operatorname{reg} M = \max_{I\subset\{1,\dots,n\}}(d_I - \#I)$. Comme $d_i \geqslant 1$, on a $d_J - \#J \geqslant 0$ pour toute partie $J$. On applique cela à $J = \overline{I}$ et on obtient $d_{\{1,\dots,n\}} - n \geqslant d_I - \#I$ pour toute partie $I$. Ainsi $\operatorname{reg} M = d_{\{1,\dots,n\}} - n = \sum_{i=1}^n (d_i - 1)$.

La proposition ci-dessous constitue le « Serre's Vanishing Theorem ». Ce résultat est souvent énoncé en termes faisceautiques (on pourra par exemple consulter le point $(b)$ du théorème III-5.2. de Hartshorne). Ici, on s'inspire très fortement de l'implication 1. $\Rightarrow$ 2. du théorème 4.3 du chapitre IV de [Eis05].

**Proposition 4.3.** *Soit $\mathbf{S} = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ où $\mathbf{k}$ est un corps et $M$ un $\mathbf{S}$-module gradué de présentation finie. Soit $i \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $d$ tel que $i + d > \operatorname{reg} M$, on a $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)_d = 0$. De plus, $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)_d$ est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie pour tous entiers $i$ et $d$.*

***Preuve.*** On procède par récurrence sur la dimension projective de $M$. On commence donc par traiter le cas d'un module libre $M = \mathbf{S}(-a_1) \oplus \cdots \oplus \mathbf{S}(-a_m)$ pour lequel $\operatorname{reg} M = \max_j a_j$. Or d'après la remarque 4.2, on sait que $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}\big(\mathbf{S}(-a_j)\big)_d = 0$ pour tout $d$ tel que $i + d > a_j$. On a donc $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)_d = 0$ pour tout $d$ tel que $i + d > a_j$ pour tout $j$ donc pour tout $d$ tel que $i + d > \operatorname{reg} M$.

Considérons à présent une (la) résolution libre minimale graduée de $M$ :

$$0 \longrightarrow F_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{u_1} F_0 \twoheadrightarrow M$$

Le module $M' := \operatorname{Im} u_1$ est de dimension projective strictement inférieure à $M$ et admet la résolution libre minimale graduée

$$0 \longrightarrow F_p \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \twoheadrightarrow M'$$

En particulier, $\operatorname{reg} M' = \max\limits_{i\geqslant 1}(\operatorname{reg} F_i - i) + 1 \leqslant \operatorname{reg} M + 1$.

Exploitons maintenant la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

La longue suite en cohomologie de Čech fournit

$$(\clubsuit) \qquad \cdots \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(F_0)_d \xrightarrow{u} \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)_d \xrightarrow{v} \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{X}}(M')_d \longrightarrow \cdots$$

On suppose $i + d > \operatorname{reg} M$. D'une part, $i + d > \operatorname{reg} F_0$ donc $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(F_0)_d = 0$ car $\operatorname{reg} M \geqslant \operatorname{reg} F_0$. D'autre part, $(i+1) + d > \operatorname{reg} M + 1 \geqslant \operatorname{reg} M'$ donc $\check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{X}}(M')_d = 0$, d'après l'hypothèse de récurrence. Par conséquent, $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)_d = 0$.

Pour prouver que $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)_d$ est de dimension finie, on procède encore par récurrence sur la dimension projective de $M$. C'est facile lorsque $M$ est libre en vertu de la proposition 4.1. Sinon, on utilise à nouveau la suite exacte $(\clubsuit)$ qui fournit $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)_d / \operatorname{Im} u \simeq \operatorname{Im} v$. Il suffit donc de montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$ sont de dimension finie pour montrer que $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)_d$ l'est. Tout d'abord $\check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{X}}(M')_d$ est de dimension finie par hypothèse de récurrence donc $\operatorname{Im} v$ aussi. Et $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie en tant que quotient de $\check{\mathrm{H}}^i(F_0)_d$. □

**Commentaires**

Sans aucun doute, l'article [CJR13] de Chardin, Jouanolou, Rahimi contient les résultats fondamentaux sur la régularité de Castelnuovo-Mumford dans un cadre bien plus général que ce que l'on trouve habituellement dans la littérature. Le résultat ci-dessus n'est donc qu'une partie infime, dans un cas particulier, de ce qui figure dans l'article [CJR13]. On y trouve en particulier une réciproque à la proposition ci-dessus qui est en quelque sorte « la caractérisation par la cohomologie locale » de la régulartié de Castelnuovo-Mumford. Plus précisément, si l'on dispose d'un entier $r$ tel que $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)_d = 0$ pour tous $d$ et $i$ tels que $d + i > r$, alors $r \geqslant \mathrm{reg}(M)$.

## 4.3 Approximation de Čech par Koszul pour un S-module gradué de présentation finie

Pour $e \in \mathbb{N}$, notons $\boldsymbol{e} = (e, \ldots, e)$. Pour une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, on note $\underline{a}^{\boldsymbol{e}}$ la suite $(a_1^e, \ldots, a_n^e)$.

On dispose d'un morphisme canonique entre le complexe de Koszul montant de $\underline{a}^{\boldsymbol{e}}$ et le complexe de Čech de $\underline{a}$, donné par

$$\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}^{\boldsymbol{e}}\,; M) \;\longrightarrow\; \check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(M), \qquad\qquad e_I^\star \otimes x \;\longmapsto\; \frac{1}{a_I^e} \otimes x$$

qui induit un morphisme en cohomologie : $\mathrm{H}^i(\underline{a}^{\boldsymbol{e}}\,; M) \to \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)$.

Prenons $M = \mathbf{A}$. Si l'anneau est gradué et les $a_i$ homogènes de degré $d_i$, alors le morphisme de complexes ci-dessus est gradué, comme on le voit en remarquant que $\deg(e_I^\star) = -\sum_{i\in I} d_i$. Dans ce contexte gradué, le dernier module de cohomologie Koszul est le module $\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle$ twisté, précisément :

$$\mathrm{H}^n(\underline{a}\,; \mathbf{A}) \;=\; \big(\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle\big)(D), \qquad \text{où } D = \sum_{i=1}^n d_i$$

car on a $\big(\bigwedge^n(\mathbf{A}^n)\big)^\star = \mathbf{A}.e^\star_{\{1,\ldots,n\}} = \mathbf{A}(D)$.

Plaçons-nous à présent dans le contexte polynomial en considérant l'anneau $\mathbf{S} = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ et la suite $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Cet anneau est naturellement gradué. On a

$$\mathrm{H}^n(\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\,; \mathbf{S}) \;=\; \big(\mathbf{S}/\langle\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\rangle\big)(ne) \qquad \text{et} \qquad \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S}) \;=\; \frac{1}{X_1\cdots X_n}\,\mathbf{k}\left[\frac{1}{X_1}, \ldots, \frac{1}{X_n}\right]$$

et le morphisme canonique est donné par

$$\mathrm{H}^n(\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\,; \mathbf{S}) \;\longrightarrow\; \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S}), \qquad\qquad x^\alpha \;\longmapsto\; \frac{1}{X_1^e\cdots X_n^e}X^\alpha \;=\; \frac{1}{X_1\cdots X_n}X^{-(\boldsymbol{e}-\mathbb{1}-\alpha)}$$

Il envoie donc la $\mathbf{k}$-base canonique $(x^\alpha)_{0\preccurlyeq\alpha\preccurlyeq\boldsymbol{e}-\mathbb{1}}$ sur une partie de la $\mathbf{k}$-base canonique $\big(\frac{1}{X_1\cdots X_n}X^{-\beta}\big)_{\beta\succcurlyeq 0}$.

**Proposition 4.4.** *Ici* $\mathbf{k}$ *est un anneau commutatif. Soient* $d$ *et* $e$ *deux entiers. Le morphisme canonique de* $\mathbf{k}$*-modules*

$$\mathrm{H}^n(\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\,; \mathbf{S})_d \;\longrightarrow\; \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S})_d$$

*est un isomorphisme pourvu que* $n + d + e > 0$.

Un petit commentaire : il faut plutôt penser à $d$ négatif, et même à $d \leqslant -n$ car si $n + d > 0$ alors on obtient 0 de chaque côté. La présence de l'entier $e$ permet de considérer une plage de $d$ pour lesquels « il y a de la matière », mais ne permet pas à $d$ d'être trop négatif car $d > -(n + e)$.

***Preuve.*** Notons $f$ le morphisme de $\mathbf{k}$-modules dont il est question dans l'énoncé.

Soit $\beta \succcurlyeq 0$ et $\frac{1}{X_1\cdots X_n}X^{-\beta} \in \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S})_d$. Ainsi $-|\beta| = n + d$. La condition $n + d + e > 0$ implique $|\beta| < e$ donc $\beta \preccurlyeq \boldsymbol{e} - \mathbb{1}$. A un tel élément, on peut lui associer $x^\alpha$ où $\alpha := \boldsymbol{e} - \mathbb{1} - \beta$. On a $0 \preccurlyeq \alpha$ car $\beta \preccurlyeq \boldsymbol{e} - \mathbb{1}$ et $\alpha \preccurlyeq \boldsymbol{e} - \mathbb{1}$ car $\beta \succcurlyeq 0$. C'est bien un élément de $\mathrm{H}^n(\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\,; \mathbf{S})_d = \big(\mathbf{S}/\langle\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\rangle\big)_{ne+d}$ car $|\alpha| = ne - n - |\beta| = ne - n + (n + d) = ne + d$.

Bilan : si $n + d + e > 0$, alors l'application $g : \frac{1}{X_1\cdots X_n}X^{-\beta} \mapsto x^\alpha$ où $\alpha := \boldsymbol{e} - \mathbb{1} - \beta$ est bien définie et est l'application réciproque de $f$. □

**Proposition 4.5.** *Ici* $\mathbf{k}$ *est un corps. Soit* $M$ *un* $\mathbf{S}$*-module gradué de présentation finie. Soient* $i$ *et* $e$ *deux entiers. Pour tout entier* $d$ *tel que* $n+d+e > \operatorname{reg} M + \operatorname{Pd} M$*, le morphisme canonique de* $\mathbf{k}$*-espaces vectoriels*

$$\mathrm{H}^i(\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\,;M)_d \;\longrightarrow\; \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)_d$$

*est un isomorphisme.*

***Preuve.*** ▷ Pour $M = \mathbf{S}$
La flèche $\mathrm{H}^i(\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\,;\mathbf{S})_d \to \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(\mathbf{S})_d$ est un isomorphisme pour $n+d+e>0$. C'est évident pour $i \neq n$ car les modules eux-mêmes sont nuls (a fortiori leurs composantes homogènes). Et pour $i = n$, cela résulte de la proposition précédente.

▷ Pour un module $M$ libre twisté $\mathbf{S}(-a_1)\oplus\cdots\oplus\mathbf{S}(-a_m)$
Il suffit d'établir cela pour $M = \mathbf{S}(-a)$ qui vérifie $\operatorname{reg} M = a$. On répète la preuve de la proposition 4.4 en remplaçant partout $d$ par $d-a$ et on obtient bien la condition $n+d+e > a+0$ c'est-à-dire $n+d+e > \operatorname{reg} M + \operatorname{Pd} M$.

▷ Pour un module $M$ quelconque
On procède par récurrence sur la dimension projective de $M$ comme dans la preuve de la proposition 4.3, et on exploite la suite exacte courte $0 \to M' \to F_0 \to M \to 0$. On superpose les longues suites exactes en cohomologie Koszul et Čech

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\,;M')_d & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\,;F_0)_d & \longrightarrow & \mathrm{H}^i(\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\,;M)_d & \longrightarrow & \mathrm{H}^{i+1}(\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\,;M')_d & \longrightarrow & \mathrm{H}^{i+1}(\underline{X}^{\boldsymbol{e}}\,;F_0)_d & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M')_d & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(F_0)_d & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{X}}(M)_d & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{X}}(M')_d & \longrightarrow & \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{X}}(F_0)_d & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Soit $d$ un entier tel que $n+d+e > \operatorname{reg} M + \operatorname{Pd} M$. D'une part, $n+d+e > \operatorname{reg} F_0$ donc $f_2$ et $f_5$ sont des isomorphismes. D'autre part, comme $\operatorname{reg} M' \leqslant \operatorname{reg} M + 1$ et $\operatorname{Pd} M' \leqslant \operatorname{Pd} M - 1$, on a $n+d+e > \operatorname{reg} M' + \operatorname{Pd} M'$ donc, par récurrence, $f_1$ et $f_4$ sont des isomorphismes. Le lemme des cinq affirme alors que $f_3$ est un isomorphisme, ce qu'il fallait démontrer. □

**Commentaires**

Ce résultat est très souvent énoncé en des termes géométriques et est référencé comme un théorème d'approximation de la cohomologie des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}^r$ (il faut penser à $r = n-1$). C'est par exemple le cas de l'énoncé de Vasconcelos (cf. [VE04, Theorem 8.3.1]) qui, traduit en termes algébriques et adapté avec nos notations, donne la condition $n+d+e > \max_{0\leqslant i\leqslant p}(\operatorname{reg} F_i)$ où $F_i$ est le $i$-ème module des syzygies de $M$. On constate d'ailleurs que la démonstration que nous avons fournie s'adapte parfaitement à cette borne qui est meilleure que la nôtre dans le sens où $\operatorname{reg} M + \operatorname{Pd} M \geqslant \max_{0\leqslant i\leqslant p}(\operatorname{reg} F_i)$. Cela dit, signalons que l'on trouve un énoncé purement algébrique, identique au nôtre (mais utilisant le foncteur Ext plutôt que la cohomologie Koszul), dans une note non publiée *Using Macaulay 2* de Eisenbud, Grayson et Stillman, cf. [EGS, Theorem 2, section C.2.]. La borne fournie est $\max(\operatorname{reg} F_{n-i}, \operatorname{reg} F_{n-i+1})$ donc dépend de l'entier $i$.

# 5 Le complexe de Čech est un complexe de modules plats

Nous utiliserons dans ce paragraphe deux qualités des modules plats. La première est une caractérisation de la platitude : le module à droite dans une suite exacte courte est plat si et seulement si cette suite reste exacte après tensorisation par n'importe quel module. La deuxième propriété dit que le noyau d'un morphisme surjectif entre modules plats est plat. On peut trouver cela chez Bourbaki dans le chapitre I d'Algèbre Commutative (§2, n° 5, prop. 4 et 5) mais aussi dans le chapitre X d'Algèbre avec un traitement homologique utilisant le foncteur Tor (cf. §4 : Produit de torsion, n° 6, th. 2 et cor. 1).

A partir de ces deux propriétés, nous allons en déduire la proposition ci-dessous que l'on pourrait qualifier de « formule de Künneth pour les bébés ». En effet, il s'agit d'un cas très particulier de la formule de Künneth telle qu'elle est énoncée dans le chapitre X d'Algèbre de Bourbaki, corollaire 4, §4, n° 7. Nous

avons cependant tenu à en assurer une preuve la plus élémentaire possible, bébé oblige (par exemple sans utilisation du foncteur Tor).

**Proposition 5.1.** *On considère le complexe* $C_\bullet$ exact *de modules plats borné à droite :*

$$C_p \xrightarrow{d_p} C_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

*Pour tout module* $M$*, le complexe* $C_\bullet \otimes M$ *reste exact. De plus, le module* $\mathrm{Ker}(d_p)$ *est plat et* $\mathrm{Ker}(d_p) \otimes M$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{Ker}(d_p \otimes \mathrm{id}_M)$ *via le morphisme canonique* $\mathrm{Ker}(d_p) \otimes M \to \mathrm{Ker}(d_p \otimes \mathrm{id}_M)$.

***Preuve.*** On pose $\mathcal{Z}_i = \mathrm{Ker}(d_i)$. Le module $\mathcal{Z}_0 = C_0$ est plat. Considérons la suite exacte courte (à gauche, c'est l'injection canonique et à droite, c'est la différentielle $d_1 : C_1 \to C_0$)

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow \mathcal{Z}_0 \longrightarrow 0$$

Premièrement, $\mathcal{Z}_1$ est plat car $C_1$ et $\mathcal{Z}_0$ sont plats. Deuxièmement, $\mathcal{Z}_0$ est plat donc la suite reste exacte après tensorisation par $M$. En particulier, on a $\mathcal{Z}_1 \otimes M \underset{\text{can.}}{\simeq} \mathrm{Ker}(d_1 \otimes \mathrm{id}_M)$.

On poursuit en considérant la suite exacte courte (à gauche, c'est l'injection canonique et à droite c'est la restriction de $d_2 : C_2 \to C_1$ à son image qui est $\mathcal{Z}_1$) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \mathcal{Z}_1 \longrightarrow 0$$

D'après ce qui précède, $\mathcal{Z}_1$ est plat. On en déduit deux choses. D'une part, $\mathcal{Z}_2$ est plat (car $C_2$ est également plat). D'autre part, la suite reste exacte après tensorisation par $M$. Examinons ce que signifie cette exactitude. Le point précédent permet de plonger $\mathcal{Z}_1 \otimes M$ dans $C_1 \otimes M$ ; le noyau de la flèche de droite dans la suite exacte ci-dessous est donc égal au noyau de la flèche en pointillés qui est $d_2 \otimes \mathrm{id}_M$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{Z}_2 \otimes M & \longrightarrow & C_2 \otimes M & \longrightarrow & \mathcal{Z}_1 \otimes M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & \searrow & \downarrow & & \\ & & & & & & C_1 \otimes M & & \end{array}$$

On a donc $\mathcal{Z}_2 \otimes M \underset{\text{can.}}{\simeq} \mathrm{Ker}(d_2 \otimes \mathrm{id}_M)$. Et ainsi de suite... □

Dans la même veine, pour les bébés un peu plus grands, on peut enrichir le résultat précédent comme suit :

**Proposition 5.2.** *On considère le complexe* $C_\bullet$ *de modules plats borné à droite :*

$$C_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} C_p \xrightarrow{d_p} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$

*On suppose que* $\mathrm{H}_i(C_\bullet) = 0$ *pour tout* $i < p$*. Alors pour tout module* $M$*, on a* $\mathrm{H}_i(C_\bullet \otimes M) = 0$ *pour* $i < p$ *et* $\mathrm{H}_p(C_\bullet \otimes M) \underset{\text{can.}}{\simeq} \mathrm{H}_p(C_\bullet) \otimes M$.

***Preuve.*** Il reste juste à montrer $\mathrm{H}_p(C_\bullet \otimes M) \underset{\text{can.}}{\simeq} \mathrm{H}_p(C_\bullet) \otimes M$. On considère la suite exacte courte :

$$C_{p+1} \longrightarrow \mathcal{Z}_p \longrightarrow \mathrm{H}_p(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

où à gauche, c'est $d_{p+1} : C_{p+1} \to C_p$ restreint à l'arrivée à $\mathcal{Z}_p$, et à droite, c'est le morphisme canonique. En tensorisant par $M$, cela reste exact (exactitude à droite de $\bullet \otimes M$). La proposition précédente fournit alors $\mathcal{Z}_p \otimes M \underset{\text{can.}}{\simeq} \mathrm{Ker}(d_p \otimes \mathrm{id}_M) \subset C_p \otimes M$, d'où

$$\begin{array}{ccccccc} C_{p+1} \otimes M & \longrightarrow & \mathcal{Z}_p \otimes M & \longrightarrow & \mathrm{H}_p(C_\bullet) \otimes M & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow & \downarrow & & & & \\ & & C_p \otimes M & & & & \end{array}$$

Par exactitude au milieu, on récupère donc $\mathrm{Ker}(d_p \otimes \mathrm{id}_M)/\,\mathrm{Im}(d_{p+1} \otimes \mathrm{id}_M) \underset{\text{can.}}{\simeq} \mathrm{H}_p(C_\bullet) \otimes M$. □

## 5.1 Acyclicité et unimodularité

Il est très facile de montrer que si le complexe de Koszul de $\underline{a}$ sur $\mathbf{A}$ est acyclique alors la suite est unimodulaire (il suffit de considérer $\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle$ qui est le dernier module de cohomologie ou encore le premier module d'homologie). Pour la cohomologie de Čech, c'est moins direct (confer la proposition ci-dessous). À noter que cela fonctionne tout aussi bien avec un module $M$, *i.e.* si le complexe est acyclique, alors $M = \underline{a}M$. Pour les mêmes raisons que précédemment, c'est immédiat pour la cohomologie Koszul. Pour la cohomologie de Čech, cela fait l'objet de la proposition IV-4.2.

**Proposition 5.3.** *Si* $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$ *pour tout* $i$ *alors* $1 \in \langle\underline{a}\rangle$.

***Preuve.*** Le complexe de Čech $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(\mathbf{A})$ est un complexe de modules plats, borné à droite et exact par hypothèse. On pose $\mathfrak{a} = \langle\underline{a}\rangle$. En le tensorisant par $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$, il reste exact d'après la proposition 5.1. On a $\mathfrak{a}\check{\mathrm{C}}^1_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = \check{\mathrm{C}}^1_{\underline{a}}(\mathbf{A})$. En fait pour tout $i \geqslant 1$, on a $\mathfrak{a}\check{\mathrm{C}}^i_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = \check{\mathrm{C}}^i_{\underline{a}}(\mathbf{A})$ car $\check{\mathrm{C}}^i_{\underline{a}}(\mathbf{A})$ est une somme directe de localisés du type $\mathbf{A}_{a_I}$ où $I$ est une partie non vide (car $i \geqslant 1$). On dispose donc du complexe exact suivant :

$$0 \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^0_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}/\mathfrak{a} \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^1_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}/\mathfrak{a} = 0 \longrightarrow \cdots$$

Le module $\check{\mathrm{C}}^0_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}/\mathfrak{a} = \mathbf{A}/\mathfrak{a}\mathbf{A}$ est donc cerné par deux zéros, il est nul. Autrement dit, $1 \in \mathfrak{a}$. □

## 5.2 Dimension cohomologique

**Définition 5.4.** *Soit* $\underline{a}$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{A}$ *et* $M$ *un* $\mathbf{A}$*-module. Pour un entier* $k$*, on dit que la dimension cohomologique de* $\underline{a}$ *relativement à* $M$ *est inférieure à* $k$ *lorsque* $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ *pour tout* $i > k$. *De manière abrégée*

$$\mathrm{cd}(\underline{a}\,; M) \leqslant k \quad \Longleftrightarrow \quad \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0, \quad \forall\, i > k$$

### Dimension cohomologique et rang arithmétique

Une première inégalité vérifiée par la dimension cohomologie est $\mathrm{cd}(\underline{a}\,; \mathbf{A}) \leqslant \delta(\underline{a})$, où $\delta(\underline{a})$ désigne le nombre minimal de générateurs radicaux de $\langle\underline{a}\rangle$ défini à la page 119, aussi appelé « *arithmetical rank* » dans la littérature. Plus précisément :

**Proposition 5.5.** *Si* $\delta(\underline{a}) \leqslant k$ *alors* $\mathrm{cd}(\underline{a}\,; M) \leqslant k$.

***Preuve.*** Soit $\underline{a}$ une suite de longueur $k$ telle que $\sqrt{\underline{a}} = \sqrt{\underline{b}}$. La cohomologie de Čech est invariante par radical donc $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ pour tout $i > k$. □

### Two skew lines in $\mathbb{P}^3(\mathbf{k})$

En guise d'application, donnons un exemple archi-classique qui figure par exemple dans [ILL+07, example 9.17]. Considérons l'idéal $\langle X, Y\rangle \cdot \langle U, V\rangle$ de $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X, Y, U, V]$ où $\mathbf{k}$ est un anneau commutatif. Son lieu des zéros dans $\mathbb{P}^3(\mathbf{k})$ est la réunion de deux droites gauches (skew lines, in english). On pose $\underline{a} = (X, Y)$ et $\underline{b} = (U, V)$. L'idéal est alors $\langle\underline{ab}\rangle$ où $\underline{ab}$ désigne la suite produit $(XU, XV, YU, YV)$. On va montrer que $\delta(\underline{ab}) \geqslant 3$, autrement dit l'idéal n'est pas radicalement 2-engendré.

La suite exacte de Mayer-Vietoris (plus précisément le morphisme de liaison) fournit l'isomorphisme $\check{\mathrm{H}}^3_{\underline{ab}}(\mathbf{A}) \simeq \check{\mathrm{H}}^4_{\underline{a},\underline{b}}(\mathbf{A})$. Ce dernier module n'est ni plus ni moins que le dernier module de cohomologie de la suite des 4 indéterminées $(X, Y, U, V)$ sur l'anneau $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X, Y, U, V]$. D'après la proposition 4.1, on en déduit que $\check{\mathrm{H}}^3_{\underline{ab}}(\mathbf{A})$ est non nul. La proposition précédente montre que l'idéal $\langle\underline{ab}\rangle$ ne peut pas être radicalement 2-engendré. Cependant, l'idéal est radicalement 3-engendré par $(XU, YV, XV + YU)$.

### Dimension cohomologique : anneau versus module

Il est bien connu que la dimension cohomologique de $\underline{a}$ relativement à un module quelconque est inférieure à celle définie relativement à l'anneau, *i.e.* $\mathrm{cd}(\underline{a}\,; M) \leqslant \mathrm{cd}(\underline{a}\,; \mathbf{A})$. On se propose de fournir une démonstration élémentaire reposant uniquement sur le fait que le module $\check{\mathrm{C}}^i_{\underline{a}}(\mathbf{A})$ est plat. On trouve souvent des preuves noethériennes de ce résultat, confer par exemple [ILL+07, theorem 9.6]. Cependant, il faut signaler la proposition 4.1 de l'article [CJR13] qui donnent plusieurs inégalités et ceci dans un contexte très général.

**Proposition 5.6.** *Soit $k$ un entier. Si $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$ pour tout $i > k$ alors $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ pour tout $i > k$ et $\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M) \simeq \check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \otimes M$. En particulier $\mathrm{cd}(\underline{a}\,; M) \leqslant \mathrm{cd}(\underline{a}\,; \mathbf{A})$.*

***Preuve.*** On est exactement dans les conditions de la proposition 5.2 avec le complexe

$$\check{\mathrm{C}}^k_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^{k+1}_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^{n-1}_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^{n}_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \longrightarrow 0$$

ce qui donne donc directement le résultat escompté. □

# Chapitre III

# La suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie de Čech

## 1 Un tour d'horizon de la littérature

Ce chapitre [1] est consacré à la mise en place de la suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie de Čech, cohomologie relative au complexe de Čech augmenté, complexe encore appelé « the stable Koszul complex ». Notre approche se veut élémentaire pour plusieurs raisons et est radicalement différente de celle de Grothendieck, dont le cadre est la cohomologie locale des faisceaux.

En effet, il ne sera pas question de faisceaux injectifs ou flasques, comme dans l'exposé de Grothendieck, ni de constructions relativement éthérées comme celles conduisant à la cohomologie locale noethérienne des algébristes. Interviendront uniquement des objets effectifs permettant d'éventuelles implémentations. Pour mieux situer notre travail, donnons quelques détails concernant ces diverses théories cohomologiques.

Pour un schéma affine $X = \mathrm{Spec}(\mathbf{A})$, un faisceau quasi-cohérent $\widetilde{M}$ et un fermé $Y = V(\underline{a})$ de $X$ (où $\underline{a}$ une suite finie d'éléments d'un anneau $\mathbf{A}$ et $M$ un $\mathbf{A}$-module), les modules $H^i_Y(X, \widetilde{M})$ de cohomologie locale des faisceaux s'identifient aux modules $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)$ de cohomologie de Čech. Cette identification permet non seulement de travailler avec un anneau commutatif $\mathbf{A}$ et un $\mathbf{A}$-module $M$, mais aussi de rester avec des objets élémentaires sans invoquer le spectre premier de $\mathbf{A}$. Parmi ces objets explicites, il faut citer celui sur lequel tout repose, à savoir le complexe de Čech $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(M)$ sur $M$ d'une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$

$$\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(M) \ : \qquad 0 \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^0_{\underline{a}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^1_{\underline{a}}(M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^n_{\underline{a}}(M) \longrightarrow 0$$

dont le terme $\check{\mathrm{C}}^k_{\underline{a}}(M)$ de degré $k$ est une somme directe de localisés $M_{a_I}$ de $M$ (où $I$ est une partie de $\{1, \ldots, n\}$ et $a_I = \prod_{i\in I} a_i$) et dont la différentielle est donnée par

$$d : \bigoplus_{\#I=k} M_{a_I} \longrightarrow \bigoplus_{\#J=k+1} M_{a_J}, \qquad m_I \mapsto \bigoplus_{j\notin I} (-1)^{\varepsilon_j(I)} (m_I)_{I\vee j}$$

où $\varepsilon_j(I)$ est le nombre d'éléments de $I$ strictement inférieurs à $j$. Par définition, la cohomologie de ce complexe fournit les modules $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)$ de cohomologie de Čech de $M$ relativement à $\underline{a}$.

En ce qui concerne la différentielle du complexe de Čech sur $\mathbf{A}$, il s'avère efficace d'en donner une représentation matricielle (comme dans [MP99, p.57-58]). Par exemple, pour $n = 4$ et $k = 2$, la différentielle $d_2 : \check{\mathrm{C}}^2_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \to \check{\mathrm{C}}^3_{\underline{a}}(\mathbf{A})$ peut être représentée matriciellement par :

$$\begin{array}{c} \\ 123 \\ 124 \\ 134 \\ 234 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

1. Son contenu est identique à l'article [Têt14].

Une autre manière expéditive pour définir le complexe de Čech de $\underline{a}$ sur $\mathbf{A}$ consiste à le réaliser comme le produit tensoriel de $n$ complexes élémentaires $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{a_i}(\mathbf{A})$ où pour un scalaire $a \in \mathbf{A}$, on a :

$$\begin{array}{lccccccc} \text{degrés :} & & & 0 & & 1 & & \\ \check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(\mathbf{A}) : & 0 & \longrightarrow & \mathbf{A} & \xrightarrow{\mathrm{loc}} & \mathbf{A}_a & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De son côté, la cohomologie locale d'un espace topologique $X$ à coefficients dans un faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens et à support dans un fermé $Y$ a été introduite par Grothendieck lors de son séminaire de 1961 intitulé « Local Cohomology ». Elle est définie à partir du foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma_Y(X, \mathcal{F})$ des sections globales à supports dans $Y$ qui est un foncteur covariant exact à gauche. Son $i$-ème foncteur dérivé à droite, c'est-à-dire le $i$-ème groupe de cohomologie du complexe $\Gamma_Y(X, \mathcal{Q}^\bullet)$ où $\mathcal{Q}^\bullet$ désigne une résolution injective de $\mathcal{F}$, est le $i$-ème groupe de cohomologie locale des faisceaux.

Dans ce cadre très général, la suite exacte de Mayer-Vietoris s'énonce ainsi

*Soit $X$ un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens et $Y_1$, $Y_2$ deux fermés de $X$. On a une longue suite exacte, dite de Mayer-Vietoris :*

$$\cdots \longrightarrow H^i_{Y_1\cap Y_2}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^i_{Y_1}(X,\mathcal{F}) \oplus H^i_{Y_2}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^i_{Y_1\cup Y_2}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}_{Y_1\cap Y_2}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots$$

Et la preuve (cf. [Har77, exercice III.2.4, p. 212]) dans ce contexte est quasi-immédiate car le formalisme de Grothendieck est très efficace (la preuve fait intervenir la notion de faisceau flasque et le fait qu'un faisceau injectif de groupes abéliens est flasque, cf. [Har67, lemma 1.5]). Pour étendre cet énoncé (et sa preuve) à la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules sur un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$, il suffit d'utiliser la proposition 2.6 de [Har77], chapitre III. Grâce à l'isomorphisme mentionné au début $H^i_{V(\underline{a})}(\mathrm{Spec}(\mathbf{A}), \widetilde{M}) \simeq \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)$ (cf. [Har67, theorem 2.3]), « débarque » la suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie de Čech ! Mais cet argument de force n'en fournit pas une description s'inscrivant dans le cadre algébrique élémentaire que nous nous sommes imposés. La vocation de ce chapitre est de *donner naissance* à cette suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie de Čech et non d'invoquer le formalisme très puissant de Grothendieck.

Vu l'abondance de la littérature sur la cohomologie locale algébrique avec notamment la parution des deux ouvrages [BS07] et [ILL+07], il nous paraît intéressant de présenter succinctement cette théorie et le traitement mis en place pour obtenir la suite exacte de Mayer-Vietoris, bien que cette cohomologie ne mesure pas toujours la même chose que la cohomologie de Čech.

La cohomologie locale algébrique de $M$ à support dans un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ est définie à partir du $\mathbf{A}$-module :

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \;=\; \big\{x \in M \mid \mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathrm{Ann}\, x}\big\} \;=\; \big\{x \in M \mid \forall\, a \in \mathfrak{a},\ x = 0 \text{ dans le localisé } M_a\big\}$$

qui est aussi, lorsque $\mathfrak{a}$ est de type fini, égal à

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \big\{x \in M \text{ annulés par une puissance de } \mathfrak{a}\big\}.$$

Il est facile de voir que l'on obtient un foncteur covariant $M \mapsto \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ exact à gauche. On définit alors le $i$-ème module de cohomologie locale $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ de $M$ à support dans $\mathfrak{a}$ comme étant le $i$-ème foncteur dérivé à droite, c'est-à-dire le $i$-ème module de cohomologie du complexe $\Gamma_{\mathfrak{a}}(Q^\bullet)$ où $Q^\bullet$ désigne une résolution injective de $M$.

Il n'est pas inutile de remarquer que le foncteur $M \mapsto \Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ est le pendant algébrique du foncteur $\mathcal{F} \mapsto \Gamma_Y(X, \mathcal{F})$ lorsque $X = \mathrm{Spec}(\mathbf{A})$, $\mathcal{F} = \widetilde{M}$ et $Y = V(\mathfrak{a})$. En effet, une section globale de $\Gamma_{V(\mathfrak{a})}(\mathrm{Spec}(\mathbf{A}), \widetilde{M})$ s'identifie à un $x$ de $M$ nul dans tous les $(M_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\notin V(\mathfrak{a})}$ *i.e.* tel que $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathrm{Ann}\, x}$. On voit donc une analogie flagrante entre cohomologie locale faisceautique et cohomologie locale algébrique. Mais cette analogie n'a lieu qu'en apparence et est en fait trompeuse car ces deux cohomologies sont différentes, en témoignent d'ailleurs les propos d'Eisenbud dans [Eis05] : « *If $\mathbf{A}$ is non-noetherian, then the Čech complex does not always compute the derived functors in the category of $\mathbf{A}$-modules of $\Gamma_{\mathfrak{a}}()$, even for finitely generated $\mathfrak{a}$. Rather, it computes the derived functors in the category of (not necessarily quasi-coherent) sheaves of $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbf{A})}$-modules. For this and other reasons, the general definition of the local*

*cohomology modules should probably be made in this larger category. See [Hartshorne/Grothendieck 1967] for a treatment in this setting* ».

Bien que différentes en général, les cohomologies locale algébrique et de Čech sont étroitement liées ; la considération du bicomplexe $(\check{\mathrm{C}}^p_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbf{A}} Q^q)_{p\geqslant 0,\, q\geqslant 0}$ où $Q^\bullet$ est une résolution injective de $M$, fournit un morphisme canonique $\big($en notant $\mathfrak{a} = \langle \underline{a} \rangle\big)$ :

$$H^i_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)$$

qui est un isomorphisme si $\mathbf{A}$ est noethérien. En fait, il y a une condition bien plus précise que la noethérianité qui assure l'isomorphie des deux cohomologies. Et cette condition porte non plus sur l'anneau, mais sur la suite $\underline{a}$ elle-même cf. la notion de suite faiblement pro-régulière chez Schenzel [Sch03], ou la condition de Mittag-Leffler chez [Wei94, p. 117-118]. Signalons à ce sujet que tout ceci figure dans l'exposé de Grothendieck sous l'appellation « système inverse essentiellement nul », cf. [Har67, p. 23].

La preuve la plus répandue de la suite de Mayer-Vietoris en cohomologie locale est basée sur la réalisation de $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ comme $\varinjlim_\ell \mathrm{Ext}^i(\mathbf{A}/\mathfrak{a}^\ell,\, M)$ (cf. par exemple [Wei94, p. 115]) et fait appel au lemme d'Artin-Rees, lemme qui requiert bien entendu un anneau de base noethérien. Concernant le comportement de cette limite, profitons-en pour rapporter les propos de Mustata [Mus00] : « *In general, this limit is not well behaved : the natural maps* $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{A}/\mathfrak{a}^\ell,\, \mathbf{A}) \to H^i_{\mathfrak{a}}(\mathbf{A})$ *are not injective and it is difficult to understand how their images converge to* $H^i_{\mathfrak{a}}(\mathbf{A})$ ». Dans l'ouvrage [ILL+07, theorem 15.1, p. 153], on peut également trouver une approche reposant sur la notion d'enveloppe injective et ses propriétés noethériennes.

Au regard de ces deux théories cohomologiques (cohomologies locale faisceautique et algébrique) et des preuves fournies dans leur contexte, on comprend qu'établir la suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie de Čech, en des termes algébriques élémentaires, ne va a priori pas de soi.

Donnons l'énoncé précis que nous allons démontrer dans ce chapitre.

> **Théorème.** *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif et* $M$ *un* $\mathbf{A}$*-module. On considère* $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *et* $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ *deux suites de* $\mathbf{A}$*. On note* $\underline{ab}$ *la suite constituée des* $nm$ *termes* $a_i b_j$ *dans un certain ordre. Alors on dispose d'une suite exacte longue explicite, dite de Mayer-Vietoris,*

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0_{\underline{a},\,\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0_{\underline{a}}(M) \oplus \check{\mathrm{H}}^0_{\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^0_{\underline{ab}}(M) \\ \qquad\qquad \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1_{\underline{a},\,\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1_{\underline{a}}(M) \oplus \check{\mathrm{H}}^1_{\underline{b}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1_{\underline{ab}}(M) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

La stratégie adoptée pour démontrer cet énoncé consiste à exhiber une suite exacte courte de complexes de « type Čech » ayant les cohomologies attendues. Ces nouveaux complexes de « type Čech » sont obtenus à partir du complexe de Čech $\check{\mathrm{C}} = \check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{b},\,\underline{ab}}(M)$ en sélectionnant certains localisés, *i.e.* en sélectionnant certaines parties de $\mathcal{P}(\underline{a},\, \underline{b},\, \underline{ab})$. Une façon naturelle et rigoureuse de traduire cela est d'introduire un complexe simplicial $\Delta$ sur les sommets étiquetés par les scalaires de $(\underline{a},\, \underline{b},\, \underline{ab})$ et de considérer le complexe quotient $\check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}^\Delta$ où $\check{\mathrm{C}}^\Delta$ est un sous-complexe ad hoc de $\check{\mathrm{C}}$ dépendant de $\Delta$. Pour des complexes simpliciaux judicieusement choisis, on retrouve certains complexes de Čech habituels et la suite exacte courte de complexes évoquée ci-dessus prend la forme suivante

$$0 \longrightarrow \check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}^\Delta \longrightarrow \check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{ab}} \oplus \check{\mathrm{C}}_{\underline{b},\,\underline{ab}} \longrightarrow \check{\mathrm{C}}_{\underline{ab}} \longrightarrow 0$$

où $\Delta$ est un complexe simplicial sur $(\underline{a},\, \underline{b},\, \underline{ab})$ qui sera bien sûr précisé par la suite. Au milieu et à droite, on voit apparaître, grâce à l'invariance par idéal de la cohomologie de Čech, les cohomologies attendues. Tout le travail consiste à cerner la cohomologie du complexe $\check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}^\Delta$ (dont on aimerait qu'elle donne la cohomologie de $\underline{a}$, $\underline{b}$ qui est celle de $\check{\mathrm{C}}$) ou plutôt à prouver que le complexe $\check{\mathrm{C}}^\Delta$ est acyclique. Intervient alors une combinatoire relativement étonnante, combinatoire intimement liée à la forme du complexe simplicial $\Delta$. C'est elle qui permettra d'expliciter une homotopie contractante montrant largement l'acyclicité de $\check{\mathrm{C}}^\Delta$.

# 2 Des complexes de « type Čech »

On rappelle qu'un complexe simplicial $\Delta$ sur un ensemble fini $V$ est un ensemble de parties de $V$ stable par inclusion : si $J \in \Delta$ et $J' \subset J$, alors $J' \in \Delta$.

Dans toute cette section, on considère $M$ un $\mathbf{A}$-module et $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$.

## 2.1 Le complexe de Čech $\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ associé à un complexe simplicial $\Delta$

**Définition 2.1.** *À un complexe simplicial $\Delta$ sur $\{1, \ldots, n\}$, on associe le sous-complexe de $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M)$ noté $\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ dont le $\mathbf{A}$-module sous-jacent est $\bigoplus_{J \notin \Delta} M_{a_J}$ où $a_J = \prod_{j \in J} a_j$ :*

$$\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M) = \bigoplus_{J \notin \Delta} M_{a_J}.$$

*La différentielle $d$ de $\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ est celle du complexe $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M)$. Pour $J \notin \Delta$ et $m_J \in M_{a_J}$ :*

$$d : m_J \longmapsto \bigoplus_{i \notin J} (-1)^{\varepsilon_i(J)} \, (m_J)_{J \vee i}$$

*où $\varepsilon_i(J)$ désigne le nombre d'éléments de $J$ strictement inférieurs à $i$.*

**Remarque 2.2.** Notons que $\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ est bien un sous-complexe de $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M)$ car si $J \notin \Delta$ alors $J \vee i \notin \Delta$. Par ailleurs, en prenant pour $\Delta$ le complexe simplicial vide, on retrouve le complexe de Čech habituel, *i.e.* $\check{\mathrm{C}}^{\emptyset}_{\underline{a}}(M) = \check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M)$.

**Exemple 2.3.** On prend $n = 4$, $\Delta = \mathcal{P}\big(a_1, a_2, a_4\big)$ et on pose $b = a_3$. Ci-dessous, figurent les degrés cohomologiques et les termes du complexe $\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ 0 & \longrightarrow & M_b & \longrightarrow & M_{ba_1} \oplus M_{ba_2} \oplus M_{ba_4} & \longrightarrow & M_{ba_1a_2} \oplus M_{ba_1a_4} \oplus M_{ba_2a_4} & \longrightarrow & M_{ba_1a_2a_4} \end{array}$$

**Notation.** Dans ce qui suit, il sera commode d'étiqueter le sommet $i$ par le scalaire $a_i$, voire même de considérer une partie $J$ de $\{1, \ldots, n\}$ comme la *suite* de scalaires qui lui correspond. Ainsi $M_J$ désignera le localisé de $M$ en le produit des scalaires de $J$.

## 2.2 Le complexe quotient $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M)/\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$

Dans la proposition suivante, on cerne le complexe quotient $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M)/\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ ce qui permettra d'identifier facilement ce dernier complexe dans le cas particulier $\Delta = \mathcal{P}(\underline{a}')$ où $\underline{a}'$ est une sous-suite de $\underline{a}$.

**Proposition 2.4.** *Soit $\Delta$ un complexe simplicial sur $\underline{a}$. Le complexe $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M)/\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ est isomorphe au complexe dont le $\mathbf{A}$-module est $\bigoplus_{J \in \Delta} M_J$ et dont la différentielle est $m_J \longmapsto \bigoplus_{x \notin J} (-1)^{\varepsilon_x(J)} \, \varphi_{J,\, J \vee x}(m_J)$ où $\varphi_{J,\, J \vee x}$ est la flèche de localisation si $J \vee x \in \Delta$ et la flèche nulle sinon.*

Voici une conséquence directe de la proposition précédente :

**Corollaire 2.5.** *Soit $\underline{a}'$ une sous-suite de $\underline{a}$ et posons $\Delta = \mathcal{P}(\underline{a}')$. Alors le complexe $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M)/\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ est isomorphe à $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}'}(M)$.*

## 2.3 Invariance par radical de la cohomologie de Čech

Dans le point $(iv)$ de la proposition suivante est prouvé l'invariance par radical de la cohomologie de Čech. Cela repose notamment sur la longue suite exacte en cohomologie de Čech établie grâce au point $(i)$. Une autre manière d'obtenir cette longue suite exacte consiste, avec les notations de la proposition suivante, à utiliser l'isomorphisme de complexes $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M) \simeq \check{\mathrm{C}}_b(\mathbf{A}) \otimes_{\mathbf{A}} \check{\mathrm{C}}_{\underline{a}'}(M)$, cf. par exemple [Sch98, p. 4-6].

**Proposition 2.6.** *Soit $b$ l'un des $a_i$ et considérons la sous-suite $\underline{a}' = \underline{a} \setminus b$ de $\underline{a}$.*

*(i) Pour $\Delta = \mathcal{P}(\underline{a}')$, le complexe $\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ est, au signe près de la différentielle, égal au complexe localisé et twisté $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}'}(M_b)[-1]$. En particulier, ces deux complexes ont même cohomologie.*

*(ii) On dispose de la suite exacte longue en cohomologie de Čech*

$$\cdots \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i-1}_{\underline{a}'}(M)_b \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}'}(M) \xrightarrow{\text{localisation}} \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}'}(M)_b \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{a}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{a}'}(M) \longrightarrow \cdots$$

*(iii) Les $\mathbf{A}$-modules $\check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a}}(M)$ sont de $\langle\underline{a}\rangle$-torsion ; où l'on rappelle qu'un module $E$ est de $\mathfrak{a}$-torsion si pour tout $c \in \mathfrak{a}$, le localisé $E_c$ est nul*[2] *(ce qui est équivaut, si $\mathfrak{a}$ est de type fini, au fait que tout élément de $E$ est annulé par une puissance de $\mathfrak{a}$).*

*(iv) La cohomologie de Čech est invariante par radical et donc a fortiori par idéal, c'est-à-dire que pour deux suites $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de $\mathbf{A}$, on a*

$$\sqrt{\underline{a}} = \sqrt{\underline{b}} \quad \Longrightarrow \quad \check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a}}(M) \simeq \check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{b}}(M).$$

***Preuve.***

$(i)$ C'est évident car les parties qui ne sont pas dans $\Delta$ contiennent forcément $b$. Pour fixer les idées, on peut consulter l'exemple 2.3.

$(ii)$ On a la suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M)/\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M) \longrightarrow 0$$

que l'on applique au complexe simplicial $\Delta = \mathcal{P}(\underline{a}')$. A gauche, le complexe $\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ a même cohomologie que le complexe $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}'}(M_b)[-1]$ grâce au point $(i)$. Et à droite, le complexe quotient $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}}(M)/\check{\mathrm{C}}^{\Delta}_{\underline{a}}(M)$ est égal au complexe $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a}'}(M)$ d'après le corollaire 2.5. On déroule la suite exacte longue en cohomologie associée à la suite exacte courte de complexes ci-dessus en utilisant que la localisation commute avec la cohomologie de Čech.

$(iii)$ Il s'agit de montrer que $\check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M)_b = 0$ pour tout élément $b$ de la suite $\underline{a}$. Soit donc $b$ l'un des $a_\ell$. On considère la longue suite exacte obtenue en $(ii)$. On note $\partial_i : \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}'}(M) \xrightarrow{\text{loc}} \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}'}(M)_b$ le morphisme de liaison. On localise la longue suite ci-dessus par $b$ : elle reste exacte et le morphisme de liaison $\partial_i$ de localisation par $b$ est alors l'identité de $\check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}'}(M)_b$. On se retrouve donc dans la situation suivante

$$\check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}'}(M)_b \xrightarrow{\text{id}} \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}'}(M)_b \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M)_b \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{a}'}(M)_b \xrightarrow{\text{id}} \check{\mathrm{H}}^{i+1}_{\underline{a}'}(M)_b$$

L'exactitude entraîne $\check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M)_b = 0$.

$(iv)$ Soit $b \in \sqrt{\underline{a}}$ et montrons que $\check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a},\,b}(M) \simeq \check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a}}(M)$. La suite exacte longue du point $(ii)$ appliquée à la suite $(\underline{a}, b)$ et sa sous-suite $\underline{a}$ est :

$$\cdots \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i-1}_{\underline{a}}(M)_b \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a},\,b}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^{i}_{\underline{a}}(M)_b \longrightarrow \cdots$$

D'après le point $(iii)$, les modules aux extrémités sont nuls, donc $\check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a},\,b}(M) \simeq \check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a}}(M)$.

On termine ensuite comme suit : si $\sqrt{\underline{b}} \subset \sqrt{\underline{a}}$, alors $\check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a},\,\underline{b}}(M) \simeq \check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a}}(M)$. Et en échangeant le rôle de $\underline{a}$ et $\underline{b}$, on obtient $\check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a}}(M) \simeq \check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a},\,\underline{b}}(M) \simeq \check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{b}}(M)$. □

2. Une autre formulation est $\Gamma_{\mathfrak{a}}(E) = E$.

### Contexte pour la suite

On considère deux suites $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)$ d'éléments de $\mathbf{A}$ et $M$ un $\mathbf{A}$-module. Pour alléger les notations, on pose

$$\check{\mathrm{C}} = \check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{b},\,\underline{ab}}(M)$$

En posant $N = n + m + nm$, c'est un complexe ayant $N + 1$ termes, du degré 0 au degré $N$.
Les complexes qui interviendront dans la suite sont des sous-complexes ou des complexes quotients de ce complexe $\check{\mathrm{C}}$. Précisons également que le complexe $\check{\mathrm{C}}$ a même cohomologie que celle de $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{b}}(M)$ (d'après l'invariance par idéal de la cohomologie de Čech, cf. le point $(iv)$ de la proposition 2.6).

## 3 La suite exacte courte de Čech-Mayer-Vietoris

**Proposition 3.1.** *On a la suite exacte courte baptisée « suite exacte courte de Čech-Mayer-Vietoris »*

$$0 \longrightarrow \check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}^{\Delta} \longrightarrow \check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{ab}} \oplus \check{\mathrm{C}}_{\underline{b},\,\underline{ab}} \longrightarrow \check{\mathrm{C}}_{\underline{ab}} \longrightarrow 0 \qquad (\check{C}\text{-}M\text{-}V)$$

*où $\Delta$ est le complexe simplicial $\mathcal{P}(\underline{a},\,\underline{ab}) \cup \mathcal{P}(\underline{b},\,\underline{ab})$.*

Pour la preuve, le lemme facile suivant nous sera utile.

**Lemme 3.2.** *Soit $E$ un $\mathbf{A}$-module et $E_1$, $E_2$ deux sous-$\mathbf{A}$-modules de $E$. Alors on a la suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \frac{E}{E_1 \cap E_2} \xrightarrow{[z]_{12} \mapsto [z]_1 \oplus [z]_2} \frac{E}{E_1} \oplus \frac{E}{E_2} \xrightarrow{[x]_1 \oplus [y]_2 \mapsto [x-y]} \frac{E}{E_1 + E_2} \longrightarrow 0$$

***Preuve de la proposition 3.1.*** On considère les deux complexes simpliciaux sur $(\underline{a},\,\underline{b},\,\underline{ab})$ :

$$\Delta_a = \mathcal{P}(\underline{a},\,\underline{ab}) \quad \text{et} \quad \Delta_b = \mathcal{P}(\underline{b},\,\underline{ab}).$$

On note $\Delta_a \vee \Delta_b$ leur réunion et $\Delta_a \wedge \Delta_b$ leur intersection, de sorte que

$$\check{\mathrm{C}}^{\Delta_a} \cap \check{\mathrm{C}}^{\Delta_b} = \check{\mathrm{C}}^{\Delta_a \vee \Delta_b} \qquad \text{et} \qquad \check{\mathrm{C}}^{\Delta_a} + \check{\mathrm{C}}^{\Delta_b} = \check{\mathrm{C}}^{\Delta_a \wedge \Delta_b}.$$

On va appliquer le lemme au complexe $\check{\mathrm{C}}$ et aux sous-complexes $\check{\mathrm{C}}^{\Delta_a}$ et $\check{\mathrm{C}}^{\Delta_b}$. On a alors la suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow \frac{\check{\mathrm{C}}}{\check{\mathrm{C}}^{\Delta_a \vee \Delta_b}} \longrightarrow \frac{\check{\mathrm{C}}}{\check{\mathrm{C}}^{\Delta_a}} \oplus \frac{\check{\mathrm{C}}}{\check{\mathrm{C}}^{\Delta_b}} \longrightarrow \frac{\check{\mathrm{C}}}{\check{\mathrm{C}}^{\Delta_a \wedge \Delta_b}} \longrightarrow 0$$

Or

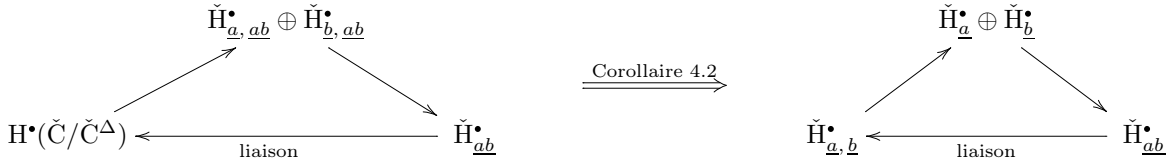
$$\frac{\check{\mathrm{C}}}{\check{\mathrm{C}}^{\Delta_a \vee \Delta_b}} = \frac{\check{\mathrm{C}}}{\check{\mathrm{C}}^{\Delta}}, \qquad \frac{\check{\mathrm{C}}}{\check{\mathrm{C}}^{\Delta_a}} \oplus \frac{\check{\mathrm{C}}}{\check{\mathrm{C}}^{\Delta_b}} \simeq \check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{ab}} \oplus \check{\mathrm{C}}_{\underline{b},\,\underline{ab}}, \qquad \frac{\check{\mathrm{C}}}{\check{\mathrm{C}}^{\Delta_a \wedge \Delta_b}} \simeq \check{\mathrm{C}}_{\underline{ab}},$$

les deux derniers isomorphismes étant dûs au corollaire 2.5. □

## 4 La cohomologie de la suite exacte courte (Č-M-V)

Désormais, $\Delta$ désignera le complexe simplicial $\mathcal{P}(\underline{a},\,\underline{ab}) \cup \mathcal{P}(\underline{b},\,\underline{ab})$. La suite (Č-M-V) fournit la suite exacte longue en cohomologie, schématisée par le triangle ci-dessous (à gauche) exact en chacun de ses sommets. En vertu de la proposition 2.6, on a $\check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a},\,\underline{ab}} \simeq \check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a}}$ et $\check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{b},\,\underline{ab}} \simeq \check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{b}}$. Pour obtenir la suite exacte de Mayer-Vietoris, schématisée par le triangle de droite, on souhaiterait donc que $\check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}^{\Delta}$ ait la même cohomologie que celle de $\check{\mathrm{C}}$ (car $\mathrm{H}^{\bullet}(\check{\mathrm{C}}) \simeq \check{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\underline{a},\,\underline{b}}$). Ceci fait l'objet du théorème 4.1 suivant (plus précisément de son corollaire) qui sera prouvé à la prochaine section.

**Cohomologie de la suite (Č-M-V)** **Suite exacte de Mayer-Vietoris**




**Théorème 4.1.** *Le complexe $\check{\mathrm{C}}^\Delta$ est contractile, donc en particulier exact.*

***Preuve.*** Cela fait l'objet de la section 5 et plus précisément de la sous-section 5.3. □

**Corollaire 4.2.** *On a $\mathrm{H}^\bullet(\check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}^\Delta) \simeq \check{\mathrm{H}}^\bullet_{\underline{a},\,\underline{b}}$.*

***Preuve.*** On a la suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow \check{\mathrm{C}}^\Delta \longrightarrow \check{\mathrm{C}} \longrightarrow \check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}^\Delta \longrightarrow 0$$

qui, une fois déroulée en cohomologie, donne

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^i(\check{\mathrm{C}}^\Delta) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\check{\mathrm{C}}) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}^\Delta) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(\check{\mathrm{C}}^\Delta) \longrightarrow \cdots$$

D'après le théorème 4.1, on a $\mathrm{H}^\bullet(\check{\mathrm{C}}^\Delta) = 0$ donc $\mathrm{H}^\bullet(\check{\mathrm{C}}) \simeq \mathrm{H}^\bullet(\check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}^\Delta)$, *i.e.* $\check{\mathrm{H}}^\bullet_{\underline{a},\,\underline{b}} \simeq \mathrm{H}^\bullet(\check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}^\Delta)$. □

# 5 Le $ab$-théorème

Dans cette section, nous allons établir un résultat combinatoire vérifié par le complexe $\check{\mathrm{C}}^\Delta$ où $\Delta = \mathcal{P}(\underline{a},\,\underline{ab}) \cup \mathcal{P}(\underline{b},\,\underline{ab})$. Le théorème 4.1 en sera une conséquence directe.

## 5.1 L'énoncé

Pour alléger les notations, on notera parfois $\mathscr{C}$ le complexe $\check{\mathrm{C}}^\Delta$. Rappelons que :

$$\mathscr{C} = \bigoplus_{I \notin \Delta} M_I$$

Notons également que les parties $I \notin \Delta$ sont les parties de $(\underline{a},\,\underline{b},\,\underline{ab})$ qui rencontrent à la fois $\underline{a}$ et $\underline{b}$. Par exemple, pour $n = m = 2$, en notant $\nu_k$ le nombre de parties $I \notin \Delta$ de cardinal $k$, on a

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu_k$ | 0 | 0 | 4 | 20 | 41 | 44 | 26 | 8 | 1 |

Grâce à la formule du crible, on dispose d'une formule close pour le nombre $\nu_k$ de parties $I \notin \Delta$ de cardinal $k$ :

$$\nu_k = \binom{n+m+nm}{k} + \binom{nm}{k} - \binom{n+nm}{k} - \binom{m+nm}{k}.$$

**Définition 5.1.** *À une partie $I \notin \Delta$, on associe l'élément $ab(I) = a_i b_j$ où $a_i \in I$ et $b_j \in I$ avec $i$ et $j$ les plus petits possibles. On qualifiera d'**admissible** une partie $I$ telle que $ab(I) \notin I$.*

On a la décomposition de **A**-modules :

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}' \oplus \mathscr{C}'' \qquad \text{avec} \quad \mathscr{C}' = \bigoplus_{I \text{ adm}} M_I \quad \text{et} \quad \mathscr{C}'' = \bigoplus_{I \text{ non-adm}} M_I$$

Par ailleurs, il y a une correspondance biunivoque entre les parties admissibles et les parties non-admissibles via $I \mapsto I \vee ab(I)$ et dans l'autre sens, $J \mapsto J \backslash ab(J)$. A noter que cette correspondance respecte la localisation dans le sens où pour toute partie $J$ non-admissible, on a $M_J = M_I$ pour $I = J \setminus ab(J)$.

**Remarque 5.2.** En notant respectivement $\nu_k, \nu'_k, \nu''_k$ le nombre de parties $I \notin \Delta$, admissibles et non admissibles de cardinal $k$, on a la relation $\nu_k = \nu'_k + \nu''_k$ et grâce à la bijection ci-dessus :

$$\nu_k = \nu'_k + \nu'_{k-1}$$

On montre alors aisément que $\nu'_k = \sum_{i=2}^{k} (-1)^{k-i}\, \nu_i$.

**Théorème 5.3 (Le *ab*-théorème).** *On note $\iota : \mathscr{C}' \hookrightarrow \mathscr{C}$ l'injection canonique, $\pi : \mathscr{C} \twoheadrightarrow \mathscr{C}''$ la projection canonique et $d$ la différentielle de $\mathscr{C}$. L'application $\pi \circ d \circ \iota : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}''$ de degré $+1$ est un isomorphisme.*

## 5.2 La preuve

Pour montrer que $\gamma = \pi \circ d \circ \iota$ est un isomorphisme, on peut supposer que $M = \mathbf{A}$ (ensuite il suffira de tensoriser par $M$). Dans l'introduction, on a signalé que la différentielle de n'importe quel complexe de Čech sur $\mathbf{A}$ peut être décrite efficacement grâce à une matrice ; et ceci s'applique bien sûr à la différentielle de $\mathscr{C}$, sous-complexe du complexe de Čech Č.

Donnons quelques précisions à ce sujet. La différentielle $d$ du complexe $\mathscr{C} = \bigoplus_{I \notin \Delta} \mathbf{A}_I$ est définie à l'aide des morphismes de localisation canoniques $\varphi_{I,J} : \mathbf{A}_I \to \mathbf{A}_J$ où $I \subset J$. En restant volontairement vague sur les signes, on peut écrire de manière synthétique que

$$d = \bigoplus_{I \notin \Delta} \bigoplus_{J \notin \Delta} \psi_{I,J} \qquad \text{avec} \quad \psi_{I,J} = \begin{cases} \pm\varphi_{I,J} & \text{si } I \subset J \text{ et } \#J = \#I + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le morphisme canonique $\varphi_{I,J}$ a l'immense avantage de pouvoir être codé de manière unique[3] par la matrice $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ de taille $1 \times 1$ à coefficients dans $\mathbf{A}_J$. Et comme $d$ est construit à partir de ces « briques canoniques », on peut parler de *la* matrice de $d$ (et donc de $\gamma$) sans aucune confusion possible, *à condition d'avoir pris le soin auparavant d'indiquer la relation d'ordre sur les parties que l'on considère.* Grâce à l'expression synthétique ci-dessus, il est évident que cette matrice est à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$, ce qui nous permettra de *représenter $d$ par une matrice à coefficients dans* $\mathbf{A}$.

A présent, occupons-nous de construire un ordre total sur les parties de ($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{ab}$) de façon à ce que la matrice de $\gamma$ soit, dans la mesure du possible, relativement simple. On peut d'ores et déjà signaler que nous travaillerons avec la matrice de $\gamma_k : \mathscr{C}'_k \to \mathscr{C}''_{k+1}$, pour un $k$ fixé.

### Ordre total sur les parties de ($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{ab}$)

Equipons ($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{ab}$) d'une structure d'ordre total de sorte que $\underline{a} < \underline{b} < \underline{ab}$. On peut par exemple ranger $\underline{a}$ et $\underline{b}$ de la façon suivante

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < b_1 < \cdots < b_m$$

et mettre sur $\underline{ab}$, qui s'identifie au produit cartésien $\underline{a} \times \underline{b}$, l'ordre lexicographique pour $<$. On a donc

$$b_m < a_1 b_1 < a_1 b_2 < \cdots < a_1 b_m < a_2 b_1 < \cdots < a_n b_m$$

De cela, découle un ordre total sur les parties de ($\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{ab}$) : pour comparer deux parties (non nécessairement de même cardinal), on les range par ordre croissant puis on les compare lexicographiquement.

### L'exemple $n = m = 2$ avec $k = 6$

Dans le cas $n = m = 2$, en notant $\nu'_k$ le nombre de parties admissibles de cardinal $k$, on a :

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\nu'_k$ | 0 | 0 | 4 | 16 | 25 | 19 | 7 | 1 | 0 |

3. En effet, pour deux monoïdes $S$ et $T$ de $\mathbf{A}$ avec $S$ inclus dans le saturé de $T$, un morphisme de $\mathbf{A}$-modules $u : S^{-1}\mathbf{A} \to T^{-1}\mathbf{A}$ est déterminé par $u(1) \in T^{-1}\mathbf{A}$.

On se propose ici d'expliciter la matrice de $\gamma_k$ avec $\boxed{k=6}$. Voici les 7 parties admissibles $I$ de $\mathscr{C}_6$ *i.e.* $ab(I) \notin I$ et les 7 parties non-admissibles $J$ de $\mathscr{C}_7$ *i.e.* $ab(J) \in J$ $\big($qui sont obtenues via $J = I \vee ab(I)\big)$ :

$$\begin{array}{rclcrcl}
I_1 &=& (a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2,\, a_1b_2,\, a_2b_1) & & J_1 &=& I_1 \vee a_1b_1 \\
I_2 &=& (a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2,\, a_1b_2,\, a_2b_2) & & J_2 &=& I_2 \vee a_1b_1 \\
I_3 &=& (a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2,\, a_2b_1,\, a_2b_2) & & J_3 &=& I_3 \vee a_1b_1 \\
I_4 &=& (a_1,\, a_2,\, b_1,\, a_1b_2,\, a_2b_1,\, a_2b_2) & & J_4 &=& I_4 \vee a_1b_1 \\
I_5 &=& (a_1,\, a_2,\, b_2,\, a_1b_1,\, a_2b_1,\, a_2b_2) & & J_5 &=& I_5 \vee a_1b_2 \\
I_6 &=& (a_1,\, b_1,\, b_2,\, a_1b_2,\, a_2b_1,\, a_2b_2) & & J_6 &=& I_6 \vee a_1b_1 \\
I_7 &=& (a_2,\, b_1,\, b_2,\, a_1b_1,\, a_1b_2,\, a_2b_2) & & J_7 &=& I_7 \vee a_2b_1
\end{array}$$

On a par exemple :

$$d(1_{I_1}) \;=\; (-1)^4\, 1_J + (-1)^6\, 1_{J'} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} J &=& I_1 \vee a_1b_1 \;=\; J_1 \\ J' &=& I_1 \vee a_2b_2 \end{array} \right.$$

Mais $J'$ est admissible car $a_1b_1 \notin J'$ et donc $\gamma(1_{I_1}) = 1_{J_1}$. Voici la matrice de $\gamma_6 : \mathscr{C}_6' \to \mathscr{C}_7''$ :

$$\begin{array}{c} \\ J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \\ J_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_6 & I_7 \end{array} \\
\left[ \begin{array}{ccccccc}
1 & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & 1 \\
. & . & 1 & . & 1 & . & . \\
. & . & . & -1 & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & -1 & . \\
. & . & . & . & . & . & -1
\end{array} \right]
\end{array}$$

Donnons les détails pour la dernière colonne :

$$\gamma(1_{I_7}) \;=\; (-1)^0\, 1_{J_2} + (-1)^5\, 1_{J_7} \;=\; d(1_{I_7}).$$

**Deux propriétés vérifiées par les parties de même cardinal**

Donnons pour commencer un lemme général concernant les parties finies d'un ensemble totalement ordonné. Signalons que nous appliquerons ce résutat uniquement dans le cas particulier où $\#F = \#F' = 1$.

**Lemme 5.4.** *On considère un ensemble totalement ordonné et on note $\mathcal{F}$ l'ensemble de ses parties finies ordonné lexicographiquement. Pour $E$, $E'$, $F$, $F' \in \mathcal{F}$, on a l'implication :*

$$\left( \begin{array}{ccccc} E \leqslant E' & & F \leqslant F' & & E \cap F = \emptyset \\ \#E = \#E' & \textit{et} & \#F = \#F' & \textit{et} & E' \cap F' = \emptyset \end{array} \right) \quad \Longrightarrow \quad E \cup F \;\leqslant\; E' \cup F'$$

***Preuve.*** Tout d'abord, on peut supposer que $E$ et $F$ sont deux parties non vides (donc $E'$ et $F'$ non vides également), sinon le résultat est immédiat. On pose

$$x = \min(E \cup F) \qquad \text{et} \qquad x' = \min(E' \cup F').$$

On distingue deux cas.

1. $x \in E$, $x' \in E'$ ou bien $x \in F$, $x' \in F'$. Par symétrie, on peut supposer $x \in E$ et $x' \in E'$ c'est-à-dire $x = \min E$ et $x' = \min E'$. Comme $E \leqslant E'$, on a $x \leqslant x'$.
Si $x < x'$, c'est terminé car on a alors $E \cup F < E' \cup F'$.
Si $x = x'$, on écrit

$$E \cup F = \{x\} \vee \big(E \setminus \{x\} \cup F\big) \qquad \text{et} \qquad E' \cup F' = \{x\} \vee \big(E' \setminus \{x\} \cup F'\big)$$

et on conclut par récurrence avec $E \setminus \{x\} \leqslant E' \setminus \{x\}$ et $F \leqslant F'$.

2. $x \in E$, $x' \in F'$ ou bien $x \in F$, $x' \in E'$. Par symétrie, on peut supposer que $x \in E$ et $x' \in F'$, c'est-à-dire $x = \min E$ et $x' = \min F'$. Comme $E \cap F = \emptyset$, on a $x < \min F$. Avec l'inégalité $F \leqslant F'$, on obtient

$$x < \min F \leqslant \min F' = x'$$

c'est-à-dire $x < x'$. Par conséquent, $E \cup F < E' \cup F'$. □

**Lemme 5.5.** *Relativement à l'ordre construit, $I \to I \vee ab(I)$ est une bijection strictement croissante de l'ensemble des parties admissibles de cardinal $k$ sur l'ensemble des parties non-admissibles de cardinal $k+1$.*

***Preuve.*** Soient $I = (c_1 < \cdots < c_k)$ et $I' = (c'_1 < \cdots < c'_k)$ avec $I$, $I'$ admissibles et $I < I'$. On doit montrer que $I \vee ab(I) < I' \vee ab(I')$. On va utiliser à plusieurs reprises que

$$(\star) \qquad a_i b_j \text{ est strictement supérieur à } a_p \text{ et } b_q, \text{ pour tout } i,j,p,q$$

Notons $\ell$ l'indice qui discrimine $I$ et $I'$ *i.e.* $c_\ell < c'_\ell$ et $c_s = c'_s$ pour $s < \ell$. On distingue deux cas.

1. $c'_\ell$ est un $a_i$ ou un $b_j$ ; alors il en est de même de $c_\ell$ $\big($car $c_\ell < c'_\ell$ et utilisation de $(\star)\big)$. Par conséquent, l'inégalité $c_\ell < c'_\ell$ continue à discriminer $I \vee ab(I)$ et $I' \vee ab(I')$ puisque $ab(I) > c_\ell$ et $ab(I') > c'_\ell$ $\big($grâce à $(\star)\big)$. Autrement dit, on a $I \vee ab(I) < I' \vee ab(I')$.

2. $c'_\ell$ est un $a_i b_j$. On note $\underline{a}(I')$ la sous-suite de $I'$ formée des éléments $a_p \in I'$, même chose pour $\underline{b}(I')$. Alors $\underline{a}(I') \vee \underline{b}(I')$ forme un segment initial de $I'$ précédant $c'_\ell$, d'après $(\star)$. Puisque $c'_s = c_s$ pour $s < \ell$, le segment $\underline{a}(I') \vee \underline{b}(I')$ forme également un segment initial de $I$. Visuellement, on a :

$$\begin{array}{rcl} I & = & \big(\underbrace{\cdots\cdots\cdots\cdots}_{=} \; c_\ell \;\; \cdots\cdots\big) \\ & & \qquad\qquad\quad \wedge \\ I' & = & \big(\; \underline{a}(I') \vee \underline{b}(I') \;\; \ldots \;\; c'_\ell \;\; \cdots\cdots\big) \end{array}$$

Ainsi, $\underline{a}(I) = \underline{a}(I')$ et $\underline{b}(I')$ est un segment initial de $\underline{b}(I)$. Par définition de $ab(-)$, on obtient $ab(I) = ab(I')$. Le lemme 5.4 permet d'obtenir l'inégalité large $I \vee ab(I) \leqslant I' \vee ab(I')$. Et comme l'application en question est bijective, on a $I \vee ab(I) < I' \vee ab(I')$. □

### La matrice de $\gamma_k$ attachée à la relation d'ordre établie précédemment

Nous allons à présent prouver ce que l'on a pu constater sur l'exemple à la page 40.

**Proposition 5.6.** *En rangeant les parties intervenant dans $\mathscr{C}'_k$ et $\mathscr{C}''_{k+1}$ par ordre croissant, la matrice de $\gamma_k$ est triangulaire supérieure à diagonale $\pm 1$.*

***Preuve.*** On s'intéresse à $d(1_I)$ avec $I \notin \Delta$ partie admissible de cardinal $k$ et on souhaite connaître l'organisation de ses composantes sur $\bigoplus \mathbf{A}_J$ où $J$ parcourt les parties non-admissibles de cardinal $k+1$ qui ne sont pas dans $\Delta$.

Il faut se rappeler que $d(1_I)$ est une somme signée de $1_{I \vee x}$ pour $x \notin I$. On s'intéresse aux $x \notin I$ tels que $I \vee x$ soit non-admissible. On distingue deux cas.

1. Si $x$ est du type $a_p b_q$, la partie $I \vee x$ est non-admissible si et seulement si $x = ab(I)$. Dit autrement, la seule façon de rendre non-admissible $I$ en lui ajoutant un élément $a_p b_q$ est de lui ajouter $ab(I)$.

2. Si $x$ est du type $a_p$ ou $b_q$, les parties $I \vee x$ (non-admissibles ou pas) sont inférieures à $I \vee ab(I)$, en vertu du lemme 5.4 appliqué à $E = E' = I$, $F = \{a_p\}$ ou $\{b_q\}$ et $F' = \{ab(I)\}$ (à noter que l'on utilise à nouveau la propriété $(\star)$ de la preuve du lemme 5.5).

On vient donc de montrer que pour $I$ admissible,

$$\gamma(1_I) = \pm\, 1_{I \vee ab(I)} \;\; + \text{ une somme de termes } \pm\, 1_J \text{ avec } J < I \vee ab(I)$$

Par ailleurs, le lemme 5.5 affirme que $I \mapsto I \vee ab(I)$ est une bijection strictement croissante entre les parties intervenant dans $\mathscr{C}'_k$ et celles intervenant dans $\mathscr{C}''_{k+1}$. Par conséquent, en rangeant les parties intervenant dans $\mathscr{C}'_k$ et $\mathscr{C}''_{k+1}$ par ordre croissant, la matrice de $\gamma_k$ est triangulaire supérieure à diagonale $\pm 1$. □

### Conclusion concernant la preuve du *ab*-théorème

On vient d'établir que $\gamma_k : \mathscr{C}'_k \to \mathscr{C}''_{k+1}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure à diagonale $\pm 1$ donc en particulier par une matrice inversible. Mais ce n'est pas pour autant que nous avons montré que $\gamma_k$ est un isomorphisme. Il suffit de constater que pour deux scalaires $\alpha$ et $\beta$ de $\mathbf{A}$, le morphisme canonique de $\mathbf{A}$-modules $\mathbf{A}_\alpha \to \mathbf{A}_{\alpha\beta}$ est représenté par la matrice inversible $\big[1\big]$ et est rarement un isomorphisme de $\mathbf{A}$-modules !

**Lemme 5.7.** *Soit $(S_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une famille finie de monoïdes de $\mathbf{A}$. Considérons $u : E \to E$ un endomorphisme du $\mathbf{A}$-module $E = \bigoplus_{i=1}^{q} S_i^{-1}\mathbf{A}$. Si $u$ est représenté par une matrice inversible à coefficients dans $\mathbf{A}$, alors $u$ est un automorphisme de $E$.*

***Preuve.*** L'hypothèse dit qu'il existe une matrice inversible $U$ à coefficients dans $\mathbf{A}$ représentant $u$. On sait alors qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{A}[X]$ tel que

$$U\,P(U) = P(U)\,U = I_q.$$

Ainsi $u \circ P(u) = P(u) \circ u = \mathrm{id}_E$, prouvant que $u$ est un automorphisme de $E$. □

Achevons maintenant la preuve du $ab$-théorème. Notons $\mu_{k+1}$ l'isomorphisme

$$\mu_{k+1} : \mathscr{C}''_{k+1} \to \mathscr{C}'_k, \quad 1_J \mapsto 1_{J\setminus ab(J)}$$

dont l'inverse est fourni par $1_I \mapsto 1_{I\vee ab(I)}$. Considérons l'endomorphisme de $\mathscr{C}'_k$ suivant

$$\tau_k = \mu_{k+1} \circ \gamma_k : \ \mathscr{C}'_k \ \longrightarrow \ \mathscr{C}'_k$$

Alors il est facile de voir que la matrice de $\tau_k$ est la même que celle de $\gamma_k$. On peut la relever en une matrice à coefficients dans $\mathbf{A}$ (car constituée uniquement de $-1, 0, 1$) et inversible (puisque triangulaire supérieure à diagonale $\pm 1$). En appliquant le lemme précédent à l'endomorphisme $\tau_k$ de $\mathscr{C}'_k$, on en déduit que $\tau_k = \mu_{k+1} \circ \gamma_k$ est un automorphisme. Et comme $\mu_{k+1}$ est un isomorphisme, il en est de même de $\gamma_k$.

**Remarque 5.8.** Le morphisme $\gamma_k : \mathscr{C}'_k \to \mathscr{C}''_{k+1}$ possède une propriété remarquable (que ne possède pas la différentielle $d_k$) : il respecte la localisation en un sens fort. Plus précisément, pour une $I$ partie admissible de cardinal $k$, on a

$$\gamma_k(1_I) = \bigoplus_J \pm 1_J \qquad (J = I \vee x \text{ parcourant les parties non-admissibles de cardinal } k+1)$$

où $I$ et les parties $J$ *définissent le même localisé.*

Considérons donc $I$ une partie admissible et $J = I \vee x$ une partie non-admissible. Notons $ab(J) = a_i b_j$. Par définition, $a_i$, $b_j \in J$ et puisque $J$ est non-admissible, $a_i b_j \in J$. Comme $J = I \vee x$, au moins deux éléments parmi $a_i$, $b_j$, $a_i b_j$ sont dans $I$. En fait, on va montrer que deux *exactement* sont dans $I$ et par conséquent le troisième est $x$. Ceci prouvera que $I$ et $J$ définissent le même localisé.

Il suffit donc de prouver que les éléments $a_i$, $b_j$, $a_i b_j$ ne peuvent pas être tous les trois dans $I$. C'est évident, une fois l'implication $a_i$, $b_j \in I \Rightarrow a_i b_j \notin I$ démontrée. L'appartenance $a_i, b_j \in I$ implique que $ab(I) = a_i b_j$ (car $a_i$ est le premier $a$ de $J$, a fortiori de $I$ ; idem pour $b_j$) et cet élément n'est pas dans $I$ car $I$ est admissible.

## 5.3 Le complexe $\mathscr{C} = \check{\mathrm{C}}^{\Delta}$ est contractile

Nous avons maintenant toutes les cartes en main pour fournir la preuve du théorème 4.1.

***Preuve du théorème 4.1.*** La décomposition de $\mathbf{A}$-modules $\mathscr{C} = \mathscr{C}' \oplus \mathscr{C}''$ permet d'écrire

$$d = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

et le $ab$-théorème dit que $\gamma : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}''$ est un isomorphisme. On peut donc considérer l'application $h$ de degré $-1$ définie par

$$h = \begin{bmatrix} 0 & \gamma^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a alors

$$d \circ h \ + \ h \circ d \ = \ \begin{bmatrix} 0 & \alpha\,\gamma^{-1} \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathscr{C}''} \end{bmatrix} \ + \ \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_{\mathscr{C}'} & \gamma^{-1}\delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Comme $\gamma\alpha + \delta\gamma = 0$ (car $d \circ d = 0$), on a $\alpha\,\gamma^{-1} + \gamma^{-1}\delta = 0$. Par conséquent $d \circ h + h \circ d = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$, prouvant que $h$ est une homotopie contractante. □

# 6 Le morphisme de liaison

Les sections 4 et 5 ont permis d'établir la suite exacte longue de Mayer-Vietoris en cohomologie de Čech. On souhaite à présent expliciter le morphisme de liaison qui intervient dans cette suite exacte longue.

Pour cela, on reprend la suite (Č-M-V) et on suit la preuve du lemme du serpent. Autrement dit, dans le diagramme ci-dessous, on part de la droite et on remonte le courant pour arriver en bas à gauche.

$$\begin{array}{ccc} & & \check{\mathrm{C}}^k_{\underline{a},\,\underline{ab}} \oplus \check{\mathrm{C}}^k_{\underline{b},\,\underline{ab}} \twoheadrightarrow \ker d \subset \check{\mathrm{C}}^k_{\underline{ab}} \\ & & \downarrow \\ \left(\check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}^\Delta\right)^{k+1} & \hookrightarrow & \check{\mathrm{C}}^{k+1}_{\underline{a},\,\underline{ab}} \oplus \check{\mathrm{C}}^{k+1}_{\underline{b},\,\underline{ab}} \end{array}$$

Soit donc $x_I \in (\check{\mathrm{C}}_{\underline{ab}}, d)$ un élément de $\ker d$. On le relève en un élément de $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{ab}} \oplus \check{\mathrm{C}}_{\underline{b},\,\underline{ab}}$. Deux éléments naturels conviennent $x_I \oplus 0$ et $0 \oplus -x_I$. Choisissons $x_I \oplus 0$. On applique alors la différentielle du complexe $\check{\mathrm{C}}_{\underline{a},\,\underline{ab}} \oplus \check{\mathrm{C}}_{\underline{b},\,\underline{ab}}$ à cet élément. On trouve $\bigoplus_{p=1}^n (x_I)_{a_p \vee I} \oplus 0$ (il n'y a pas de signe dans cette formule car pour $c \in \underline{ab}$, on a $a_p < c$ pour tout $p$) ; en effet les termes sur $\bigoplus_{J \in \mathcal{P}(\underline{ab})} M_J$ sont nuls (car $x_I$ vérifie $d(x_I) = 0$ où $d$ est la différentielle de $\check{\mathrm{C}}_{\underline{ab}}$).

Ensuite, il s'agit de trouver l'unique antécédent (il existe pour des raisons de commutativité de rectangles) de $\bigoplus_{p=1}^n (x_I)_{a_p \vee I} \oplus 0$ dans $(\check{\mathrm{C}}/\check{\mathrm{C}}^\Delta, \partial)$ grâce à l'injection de gauche. Il s'agit de $\bigoplus_{p=1}^n (x_I)_{a_p \vee I}$.

Par conséquent, la flèche que l'on vient d'expliciter est

$$\ker d \ni x_I \longmapsto \bigoplus_{p=1}^{n} (x_I)_{a_p \vee I} \in \ker(\partial)$$

Si on fait l'autre choix, à savoir $0 \oplus -x_I$, on tombe sur

$$\ker d \ni x_I \longmapsto -\bigoplus_{q=1}^{m} (x_I)_{b_q \vee I} \in \ker(\partial)$$

Or ces deux flèches définissent la même flèche $\ker d \to \ker(\partial)/\mathrm{Im}(\partial)$. En effet, il s'agit de vérifier que la différence entre les deux éléments ci-dessus est dans l'image de $\partial$. Ce qui est bien le cas car on a

$$\partial(x_I) = \bigoplus_{p=1}^{n} (x_I)_{a_p \vee I} \oplus \bigoplus_{q=1}^{m} (x_I)_{b_q \vee I}$$

grâce à l'hypothèse $d(x_I) = 0$.

# 7 Les matrices $\gamma_k$ pour $n = m = 2$

Pour finir en beauté et en images [4], voici les matrices $\gamma_k$ dans le cas particulier $n = m = 2$.

4. Ces figures ont été réalisées avec MetaPost et les matrices calculées avec Magma.

## La matrice de $\gamma_2$

| $(a_1,\ b_1)$ | $(a_1,\ b_2)$ | $(a_2,\ b_1)$ | $(a_2,\ b_2)$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_1,\ a_1b_1)$ |
| $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_2,\ a_1b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $(a_2,\ b_1,\ a_2b_1)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $(a_2,\ b_2,\ a_2b_2)$ |

## La matrice de $\gamma_3$

| $(a_1,\ a_2,\ b_1)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_2)$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2)$ | $(a_1,\ b_1,\ a_1b_2)$ | $(a_1,\ b_1,\ a_2b_1)$ | $(a_1,\ b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ b_2,\ a_1b_1)$ | $(a_1,\ b_2,\ a_2b_1)$ | $(a_1,\ b_2,\ a_2b_2)$ | $(a_2,\ b_1,\ b_2)$ | $(a_2,\ b_1,\ a_1b_1)$ | $(a_2,\ b_1,\ a_1b_2)$ | $(a_2,\ b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_2,\ b_2,\ a_1b_1)$ | $(a_2,\ b_2,\ a_1b_2)$ | $(a_2,\ b_2,\ a_2b_1)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_1b_1)$ |
| $\cdot$ | $-\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_1b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $-\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $-\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_2b_1)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $-\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $-\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $-\mathbf{1}$ | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_2b_1)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $-\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_2b_1)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $-\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_2,\ b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_2,\ b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $-\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $-\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $(a_2,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $-\mathbf{1}$ | $(a_2,\ b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |

## La matrice de $\gamma_4$

| $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_1b_2)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_2b_1)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_1b_1)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_2b_1)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2)$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_2b_1)$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ | $(a_1,\ b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1)$ | $(a_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1)$ | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2)$ | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_2b_2)$ | $(a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2)$ | $(a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_2,\ b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ | $(a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2)$ | $(a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1)$ | $(a_2,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | · | · | · | **1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | · | · | · | · | · | · | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1)$ |
| · | **−1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | · | · | · | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2)$ |
| · | · | **−1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_2b_1)$ |
| · | · | · | **−1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | · | · | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_2b_2)$ |
| · | · | · | · | **1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2)$ |
| · | · | · | · | · | **−1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ |
| · | · | · | · | · | · | **−1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | **−1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | **−1** | · | · | · | · | **−1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | **−1** | · | · | · | · | **−1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_2)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $(a_1,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $(a_1,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $(a_1,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **−1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $(a_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **−1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $(a_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | · | · | · | · | · | · | · | · | $(a_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | · | · | · | · | · | **−1** | · | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | · | · | · | · | · | **−1** | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **−1** | · | · | · | · | · | · | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | · | · | · | · | $(a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **−1** | · | · | · | · | $(a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **−1** | · | · | · | $(a_2,\ b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | · | $(a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | · | $(a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | **1** | $(a_2,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |

## La matrice de $\gamma_5$

| $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_2b_1)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2)$ | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_2)$ | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ | $(a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ | $(a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2)$ |
| $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{1}$ | $\cdot$ | $(a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\mathbf{-1}$ | $(a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)$ |

## La matrice de $\gamma_6$

$$
\begin{array}{ccccccc}
(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1) & (a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_2) & (a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2) & (a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2) & (a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2) & (a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2) & (a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2) \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \mathbf{1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1} \\
\cdot & \cdot & \mathbf{1} & \cdot & \mathbf{1} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{-1} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{-1} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{-1}
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1) \\
(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_2) \\
(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_2b_1,\ a_2b_2) \\
(a_1,\ a_2,\ b_1,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2) \\
(a_1,\ a_2,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2) \\
(a_1,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2) \\
(a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)
\end{array}
\end{array}
$$

## La matrice de $\gamma_7$

$$
\begin{array}{c}
(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2) \\
\left[\begin{array}{c}
1
\end{array}\right]
\end{array}
\quad
(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_2b_2)
$$

# Chapitre IV

# A propos de la cohomologie du complexe total d'un bicomplexe

## 0 Motivations et état d'esprit du chapitre

Nous présentons ici des résultats relatifs à la cohomologie du complexe total d'un bicomplexe montant concentré dans le premier quadrant. Nous sommes conscients que les résultats donnés sont couverts par des résultats beaucoup plus généraux obtenus à l'aide de la théorie des suites spectrales. Cependant, nous avons délibérément choisi de faire un exposé élémentaire en ayant uniquement recours aux techniques classiques d'algèbre homologique : la technique du diagram-chasing et celle consistant à dérouler la longue suite exacte en cohomologie d'une suite exacte courte de complexes.

Ce choix est motivé par le fait que, même sans l'usage des suites spectrales, on parvient à fournir des résultats dignes d'intérêt permettant par exemple de démontrer l'inégalité « Čech-profondeur $\leqslant$ Koszul-profondeur », ou encore de démontrer que la cohomologie de Čech est invariante par radical, ou encore que la Koszul-profondeur se comporte bien lorsque l'on quotiente le module par une suite complètement sécante.

A l'inverse, ce que nous obtenons ne règle pas tout : par exemple, nous ne pouvons pas obtenir la « cohomological dimension inequality » à savoir $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \leqslant \mathrm{cd}(\mathfrak{a})+\mathrm{cd}(\mathfrak{b})$. Le recours aux suites spectrales semble donc inévitable ! C'est pourquoi nous consacrerons la deuxième partie à ces dernières. Nous commencerons par redonner les principales caractéristiques des suites spectrales. On trouvera en annexe les preuves de ces propriétés classiques tout simplement pour avoir un document « self-contained [1] ». Le fait de prendre en charge ces vérifications est peut-être le seul moyen de constater que derrière cette théorie, au premier abord rebutante, les objets et notions mis en jeu restent contrôlables ! Grosso modo, il s'agit de bien maîtriser les sous-groupes d'un groupe quotient... Cependant, il faut bien reconnaître que lorsque les suites spectrales passent à l'action, on est souvent contraint de rester spectateur. Il faut donc accepter de ne pas avoir vraiment le contrôle de la situation. C'est un peu comme le prestidigitateur qui est le seul à détenir les secrets de son tour de magie ! Autrement dit, le plus difficile dans l'histoire n'est pas de constater que le tour de magie fonctionne. Le tour de force était de l'inventer, merci Leray !

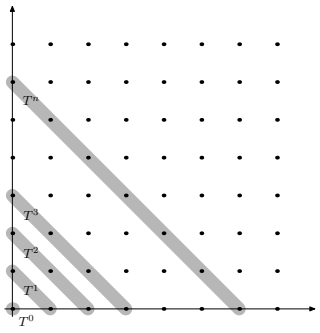
Ce qui suit est inspiré de l'appendice de Matsumura. Nous avons conservé ses notations qui sont relativement parlantes et qui correspondent bien au caractère élémentaire de l'exposé. Cependant nous avons dégagé un lemme basé sur la technique du diagram-chasing, nous permettant de fournir des énoncés avec des hypothèses plus ciblées. Cette petite amélioration n'est pas vaine. En effet, le théorème énoncé par Matsumura ne permet pas, par exemple, d'obtenir l'inégalité Čech-profondeur $\leqslant$ Koszul-profondeur.

On prend le parti de traiter le cas des complexes montants, concentrés dans le premier quadrant. Tous les résultats ci-dessous ont un pendant dans le cas de complexes montants/descendants concentrés dans le premier/troisième quadrant. De plus, dans les hypothèses, il sera question d'exactitude en ligne ou encore en colonne. Pour avoir les idées claires, nous ne mélangerons pas ligne/colonne et traiterons uniquement le cas de l'exactitude en colonne.

1. Il faut reconnaître qu'il est relativement agréable de ne pas avoir à adapter ses notations à celles d'un auteur qui aura d'ailleurs peut-être choisi de traiter le cas d'un bicomplexe descendant muni de la filtration horizontale ! Le travail de traduction peut alors s'avérer long et fastidieux.

Un bicomplexe montant $K^{\bullet\bullet}$ de modules est une collection $(K^{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ de modules munie de morphismes horizontaux $d' : K^{p,q} \to K^{p+1,q}$ et verticaux $d'' : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$ vérifiant $d' \circ d' = 0$, $d'' \circ d'' = 0$ et $d' \circ d'' = d'' \circ d'$ (certains auteurs préfèrent demander de l'anticommutativité si bien que la différentielle du complexe total ne fait pas intervenir de signe — on ne peut pas gagner sur tous les tableaux —).
À un bicomplexe, on peut associer un complexe $T^\bullet$, dit complexe total, dont les termes et la différentielle sont définis par :

$$T^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}, \qquad d(a) = d'(a) + (-1)^p\, d''(a), \text{ pour } a \in K^{p,q}.$$



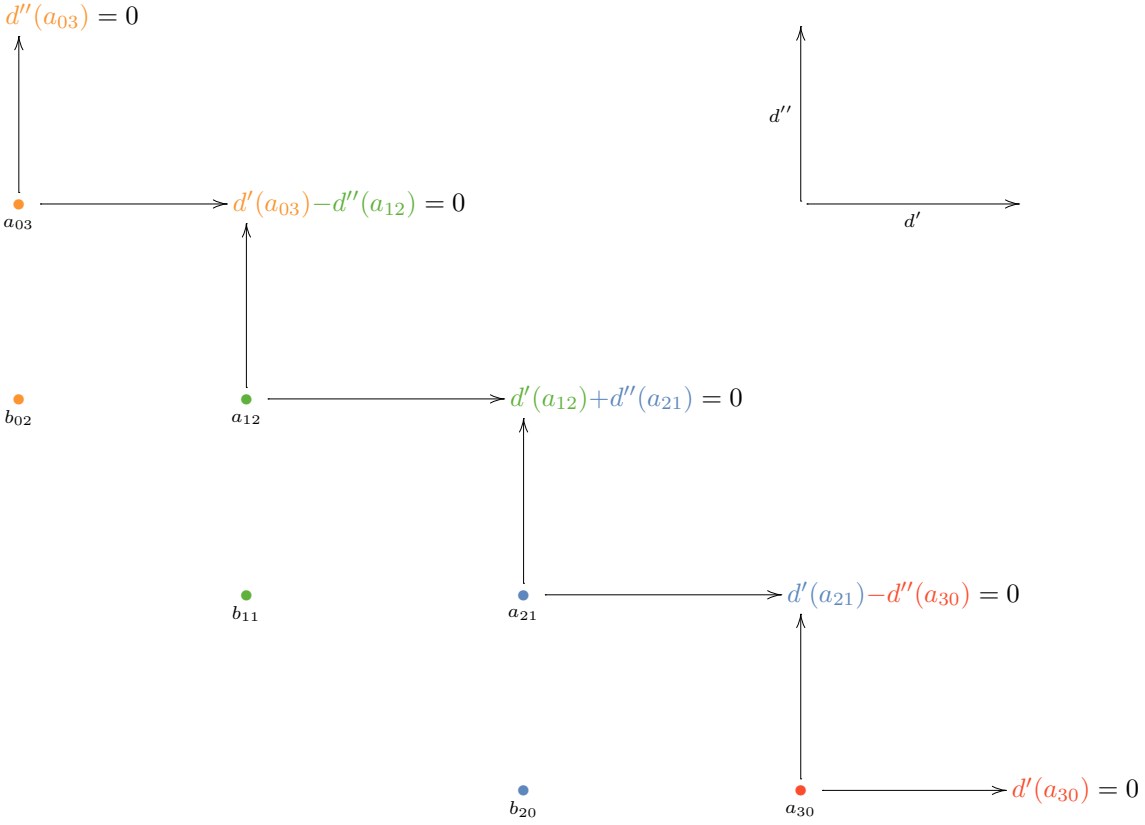

**Notations pour la suite.** Dans tous les énoncés du chapitre (excepté la section 3 où il est question de foncteur Tor donc le contexte est « descendant »), on considère un bicomplexe $K^{\bullet\bullet}$ montant, concentré dans le premier quadrant (*i.e.* $K^{p,q} = 0$ dès que $p < 0$ ou $q < 0$), de complexe total associé $T^\bullet$, ainsi qu'un entier $n \in \mathbb{N}$ censé être l'indice d'une diagonale. On parlera de la diagonale $n$ pour désigner les points $(p, q)$ tels que $p + q = n$.

# 1 Le lemme de l'escalier

On présente un résultat qui pourrait être appelé « lemme de l'escalier » qui concerne l'acyclicité du totalisé d'un bicomplexe. La preuve générale pour $n$ quelconque est précédée de la preuve pour $n = 3$.

**Lemme de l'escalier.** *Si les colonnes sont exactes en tous les points de la diagonale $n$, alors* $\mathrm{H}^n(T^\bullet) = 0$.

***Preuve pour*** $n = 3$**.** Soit $a = a_{03} \oplus a_{12} \oplus a_{21} \oplus a_{30}$ un cycle *i.e.* tel que $d(a) = 0$. En utilisant qu'il y a exactitude en colonne sur les points de la diagonale $n = 3$, on va montrer qu'il existe $b = b_{02} \oplus b_{11} \oplus b_{20}$ tel que $a = d(b)$. L'objectif est donc de trouver des $d''$-cycles en chaque point de la diagonale $n = 3$ afin de faire apparaître les $b_{pq}$.



• Ici, il y a un $d''$-cycle évident puisque $d''(a_{03}) = 0$. Par hypothèse, il existe donc $b_{02}$ tel que $\boxed{a_{03} = d''(b_{02})}$.

• Deux habitants à cet endroit : $a_{12}$ et $d'(b_{02})$. Considérons la différence $a_{12} - d'(b_{02})$ et vérifions que c'est un $d''$-cycle : on a $d''\big(a_{12} - d'(b_{02})\big) = d''(a_{12}) - d'\big(d''(b_{02})\big) = d''(a_{12}) - d'(a_{03}) = 0$.

Il existe donc $b_{11}$ tel que $\boxed{a_{12} - d'(b_{02}) = -d''(b_{11})}$.

• Deux habitants : $a_{21}$ et $d'(b_{11})$. L'élément $a_{21} - d'(b_{11})$ est un $d''$-cycle :

$$d''\big(a_{21} - d'(b_{11})\big) \;=\; d''(a_{21}) - d'\big(d''(b_{11})\big) \;=\; d''(a_{21}) + d'(a_{12}) \;=\; 0$$

Il existe donc $b_{20}$ tel que $\boxed{a_{21} - d'(b_{11}) = d''(b_{20})}$.

• Deux habitants : $a_{30}$ et $d'(b_{20})$. La différence est un $d''$-cycle :

$$d''\big(a_{30} - d'(b_{20})\big) \;=\; d''(a_{30}) - d'\big(d''(b_{20})\big) \;=\; d''(a_{30}) - d'(a_{21}) \;=\; 0$$

Il existe donc $b_{3,-1} = 0$ tel que $a_{30} - d'(b_{20}) = d''(b_{3,-1})$, c'est-à-dire tel que $\boxed{a_{30} - d'(b_{20}) = 0}$.

Bilan : en considérant les quatre encadrés, on obtient ce que l'on voulait, à savoir $a = d(b)$. □

***Preuve pour $n$ quelconque.*** Afin de faciliter la lecture, tout au long de la preuve, les lettres $p$ et $q$ seront uniquement utilisées lorsque $p + q = n$. Par ailleurs, les égalités seront indexées relativement à la position des éléments qu'elles font intervenir.

Soit $a = \bigoplus_{p+q=n} a_{p,q} \in T^n$ un cycle c'est-à-dire tel que pour tout $(p, q)$ de la diagonale $n$ :

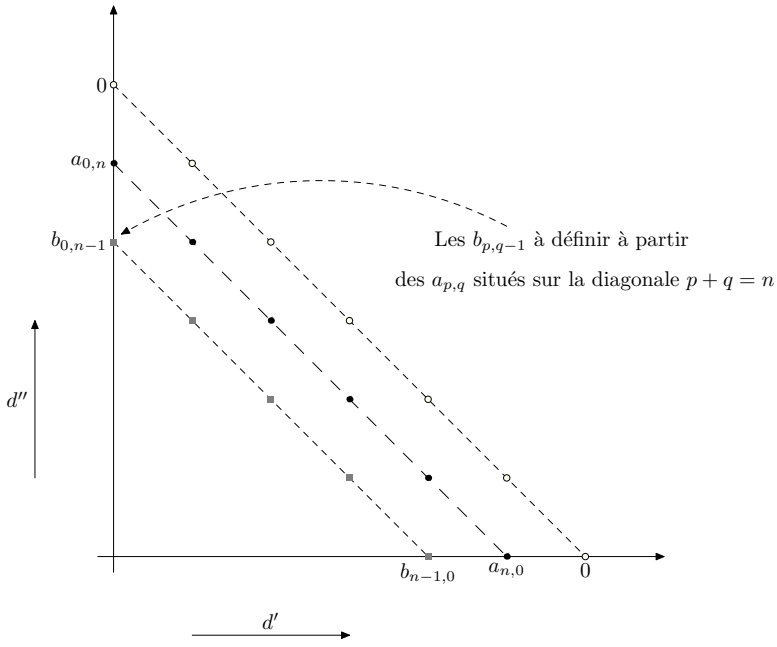
$$ⓩ_{p+1,q} \qquad d'(a_{p,q}) \;+\; (-1)^{p+1} d''(a_{p+1,q-1}) = 0$$

On veut montrer qu'il existe $b \in T^{n-1}$ tel que $a = d(b)$ *i.e.* tel que pour tout $(p, q)$ de la diagonale $n$ :

$$Ⓐ_{p,q} \qquad a_{p,q} = d'(b_{p-1,q}) + (-1)^p d''(b_{p,q-1})$$

Enfin, on note $\mathrm{ExCol}_{p,q}$ l'hypothèse : « exactitude de $d''$ au point $(p, q)$ ».

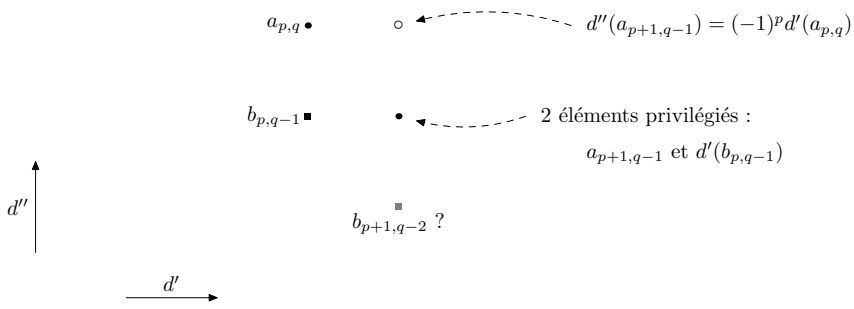
Voici un petit dessin qui est censé résumer la situation. Sur ce dessin est représenté le complexe total $T^\bullet$, l'élément $a = \bigoplus_{p+q=n} a_{p,q} \in T^n$, les 0 sur la diagonale $n + 1$ (car $a$ est un cycle) et enfin, sur la diagonale $n - 1$, les $b_{p,q-1}$ à définir.



On va construire les $b_{p,q-1}$ par récurrence sur $p$. On commence par $p = 0$ (pour $p < 0$, il suffit de prendre $b_{p,q-1} = 0$) ; autrement dit, on attaque par le coin $(0, n)$ en haut à gauche sur le dessin.

L'égalité $\textcircled{z}_{0,n+1}$ dit que $d''(a_{0,n}) = 0$. D'après l'hypothèse $\mathrm{ExCol}_{0,n}$, il existe un élément $b_{0,n-1}$ tel que $a_{0,n} = d''(b_{0,n-1})$. Cette dernière égalité est exactement $\textcircled{a}_{0,n}$.

Soit $p \geqslant 0$ et supposons $b_{p,q-1}$ construit. On cherche un élément $b_{p+1,q-2}$ vérifiant $\textcircled{a}_{p+1,q-1}$. Visuellement :




Pour faire apparaître $b_{p+1,q-2}$, l'hypothèse $\mathrm{ExCol}_{p+1,q-1}$ nous invite à considérer deux éléments en position $(p+1, q-1)$ qui ont même image par $d''$. Les deux éléments en position $(p+1, q-1)$ que l'on a sous la main sont $a_{p+1,q-1}$ et $d'(b_{p,q-1})$. Examinons donc leur image par $d''$.
D'une part, l'égalité $\textcircled{z}_{p+1,q}$ fournit

$$d''(a_{p+1,q-1}) = (-1)^p d'(a_{p,q})$$

D'autre part, en donnant un coup de $d'$ à l'égalité $\textcircled{a}_{p,q}$ et en utilisant que $d' \circ d'' = d'' \circ d'$, on obtient

$$d'' \circ d'\,(b_{p,q-1}) = (-1)^p d'(a_{p,q})$$

Ainsi $d''\big(d'(b_{p,q-1})\big) = d''(a_{p+1,q-1})$ ce qui signifie que $a_{p+1,q-1} - d'(b_{p,q-1})$ est un cycle de $d''$. L'hypothèse $\mathrm{ExCol}_{p+1,q-1}$ fournit un élément $b_{p+1,q-2}$ tel que

$$a_{p+1,q-1} - d'(b_{p,q-1}) \;=\; (-1)^{p+1} d''(b_{p+1,q-2})$$

ce qui est exactement l'égalité $\textcircled{a}_{p+1,q-1}$. □

# 2 Cohomologie verticale sur les axes du bicomplexe : énoncés élémentaires

On va mettre à profit le lemme de l'escalier dans deux situations : exactitude en colonne sauf sur l'axe des $y$ et exactitude en colonne sauf sur l'axe des $x$.

La première situation est plus simple dans le sens où elle ne met en jeu que la page 1 de la suite spectrale (on précisera ce que cela signifie plus loin). En revanche, la deuxième situation a certes des hypothèses relatives à la page 1 mais la conclusion a lieu sur la page 2.

## 2.1 Sur l'axe des $y$

On note $K^{0,\bullet}$ le complexe situé sur l'axe des $y$ du bicomplexe. Il est clair que l'on dispose de la projection canonique $T^\bullet \twoheadrightarrow K^{0,\bullet}$.

**Proposition 2.1.** *Considérons le morphisme* $\mathrm{H}^\bullet(T^\bullet) \to \mathrm{H}^\bullet(K^{0,\bullet})$ *induit par la projection* $T^\bullet \twoheadrightarrow K^{0,\bullet}$.

▷ *Si les colonnes sont exactes en les points de la diagonale $n$ sauf éventuellement sur l'axe des $y$ alors le morphisme* $\mathrm{H}^n(T^\bullet) \to \mathrm{H}^n(K^{0,\bullet})$ *est injectif.*

▷ *Si les colonnes sont exactes en les points de la diagonale $n+1$ sauf éventuellement sur l'axe des $y$ alors le morphisme* $\mathrm{H}^n(T^\bullet) \to \mathrm{H}^n(K^{0,\bullet})$ *est surjectif.*

***Preuve.*** On considère le noyau de la surjection $T^\bullet \twoheadrightarrow K^{0,\bullet}$, que l'on note $U^\bullet$. C'est le complexe total du bicomplexe défini par

$$L^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \\ K^{p,q} & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

Si on suppose qu'il y a exactitude en colonne sur la diagonale $n$ sauf sur l'axe des $y$ de $K^{\bullet,\bullet}$, alors il y a exactitude en colonne sur toute la diagonale $n$ de $L^{\bullet,\bullet}$. Le lemme de l'escalier fournit donc $\mathrm{H}^n(U^\bullet) = 0$.

Par ailleurs, la suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow U^\bullet \longrightarrow T^\bullet \longrightarrow K^{0,\bullet} \longrightarrow 0$$

donne naissance à la suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^n(U^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^n(T^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^n(K^{0,\bullet}) \longrightarrow \cdots$$

Le fait que $\mathrm{H}^n(U^\bullet) = 0$ force la flèche $\mathrm{H}^n(T^\bullet) \to \mathrm{H}^n(K^{0,\bullet})$ à être injective.

La preuve du deuxième point se fait sur le même modèle. □

### 2.2 Sur l'axe des $x$

On note $X^\bullet$ le complexe horizontal en dessous de l'axe des $x$ permettant de stopper les colonnes du bicomplexe de manière exacte. Plus précisément, on pose $X^p = \mathrm{Ker}\big(d'' : K^{p,0} \longrightarrow K^{p,1}\big)$. La flèche $d'$ induit une flèche $X^p \to X^{p+1}$ faisant de $(X^\bullet, d')$ un complexe. On a donc un morphisme naturel injectif de complexes $X^\bullet \hookrightarrow T^\bullet$.

**Proposition 2.2.** *Considérons le morphisme* $\mathrm{H}^\bullet(X^\bullet) \to \mathrm{H}^\bullet(T^\bullet)$ *induit par l'injection* $X^\bullet \hookrightarrow T^\bullet$.

▷ *Si les colonnes sont exactes en les points de la diagonale $n$ sauf éventuellement sur l'axe des $x$ alors le morphisme* $\mathrm{H}^n(X^\bullet) \to \mathrm{H}^n(T^\bullet)$ *est surjectif.*

▷ *Si les colonnes sont exactes en les points de la diagonale $n-1$ sauf éventuellement sur l'axe des $x$ alors le morphisme* $\mathrm{H}^n(X^\bullet) \to \mathrm{H}^n(T^\bullet)$ *est injectif.*

***Preuve.*** On considère le complexe quotient $T^\bullet/X^\bullet$. C'est le complexe total du bicomplexe défini par

$$L^{p,q} = \begin{cases} K^{p,0}/X^p & \text{si } q = 0 \\ K^{p,q} & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

Si on suppose qu'il y a exactitude en colonne sur la diagonale $n$ sauf sur l'axe des $x$ de $K^{\bullet,\bullet}$, alors il y a exactitude en colonne sur toute la diagonale $n$ de $L^{\bullet,\bullet}$. Le lemme de l'escalier fournit donc $\mathrm{H}^n(T^\bullet/X^\bullet) = 0$.

Par ailleurs, la suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow X^\bullet \longrightarrow T^\bullet \longrightarrow T^\bullet/X^\bullet \longrightarrow 0$$

donne naissance à la suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^n(X^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^n(T^\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^n(T^\bullet/X^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Le fait que $\mathrm{H}^n(T^\bullet/X^\bullet) = 0$ force la flèche $\mathrm{H}^n(X^\bullet) \to \mathrm{H}^n(T^\bullet)$ à être surjective.

La preuve du deuxième point se traite de la même façon. □

**Remarque 2.3.** Pour $n = 0$, les hypothèses sont trivialement vérifiées de sorte que $\mathrm{H}^0(X^\bullet) \to \mathrm{H}^0(T^\bullet)$ est systématiquement un isomorphisme.

## 3 Le fondement du foncteur Tor

Voici tout d'abord la proposition 2.2 énoncée avec un contexte descendant c'est-à-dire avec un bicomplexe descendant $K_{p,q}$ concentré dans le premier quadrant. On note $X_\bullet$ le complexe horizontal en dessous de l'axe des $x$ permettant de stopper les colonnes du bicomplexe de manière exacte. Plus précisément, on pose $X_p = \mathrm{Coker}\big(d'' : K_{p,1} \longrightarrow K_{p,0}\big)$. La flèche $d'$ induit une flèche $X_p \to X_{p-1}$ faisant de $(X_\bullet, d')$ un complexe. On a donc un morphisme naturel surjectif de complexes $T_\bullet \twoheadrightarrow X_\bullet$.

**Proposition 3.1.** *Considérons le morphisme* $\mathrm{H}_\bullet(T_\bullet) \to \mathrm{H}_\bullet(X_\bullet)$ *induit par la surjection* $T_\bullet \twoheadrightarrow X_\bullet$.

▷ *Si les colonnes sont exactes en les points de la diagonale* $n$ *sauf éventuellement sur l'axe des* $x$ *alors le morphisme* $\mathrm{H}_n(T_\bullet) \to \mathrm{H}_n(X_\bullet)$ *est surjectif.*

▷ *Si les colonnes sont exactes en les points de la diagonale* $n+1$ *sauf éventuellement sur l'axe des* $x$ *alors le morphisme* $\mathrm{H}_n(T_\bullet) \to \mathrm{H}_n(X_\bullet)$ *est injectif.*

On obtient un énoncé similaire avec l'exactitude en ligne. Dans ce cas, on note $Y_\bullet$ le complexe vertical à la gauche de l'axe des $y$ permettant de stopper les lignes du bicomplexe de manière exacte. Autrement dit, $Y_q = \mathrm{Coker}\big(d' : K_{1,q} \longrightarrow K_{0,q}\big)$ et la flèche $d''$ induit une flèche $Y_q \to Y_{q-1}$ faisant de $(Y_\bullet, d'')$ un complexe. On a donc un morphisme naturel surjectif de complexes $T_\bullet \twoheadrightarrow Y_\bullet$.

**Proposition 3.2.** *Considérons le morphisme* $\mathrm{H}_\bullet(T_\bullet) \to \mathrm{H}_\bullet(Y_\bullet)$ *induit par la surjection* $T_\bullet \twoheadrightarrow Y_\bullet$.

▷ *Si les lignes sont exactes en les points de la diagonale* $n$ *sauf éventuellement sur l'axe des* $y$ *alors le morphisme* $\mathrm{H}_n(T_\bullet) \to \mathrm{H}_n(Y_\bullet)$ *est surjectif.*

▷ *Si les lignes sont exactes en les points de la diagonale* $n+1$ *sauf éventuellement sur l'axe des* $y$ *alors le morphisme* $\mathrm{H}_n(T_\bullet) \to \mathrm{H}_n(Y_\bullet)$ *est injectif.*

En rassemblant ces deux énoncés, on obtient :

**Proposition 3.3.** *Si les colonnes sont exactes en les points des diagonales* $n$ *et* $n+1$ *sauf éventuellement sur l'axe des* $x$ *et si les lignes sont exactes en les points des diagonales* $n$ *et* $n+1$ *sauf éventuellement sur l'axe des* $y$ *alors* $\mathrm{H}_n(X_\bullet) \simeq \mathrm{H}_n(Y_\bullet)$.

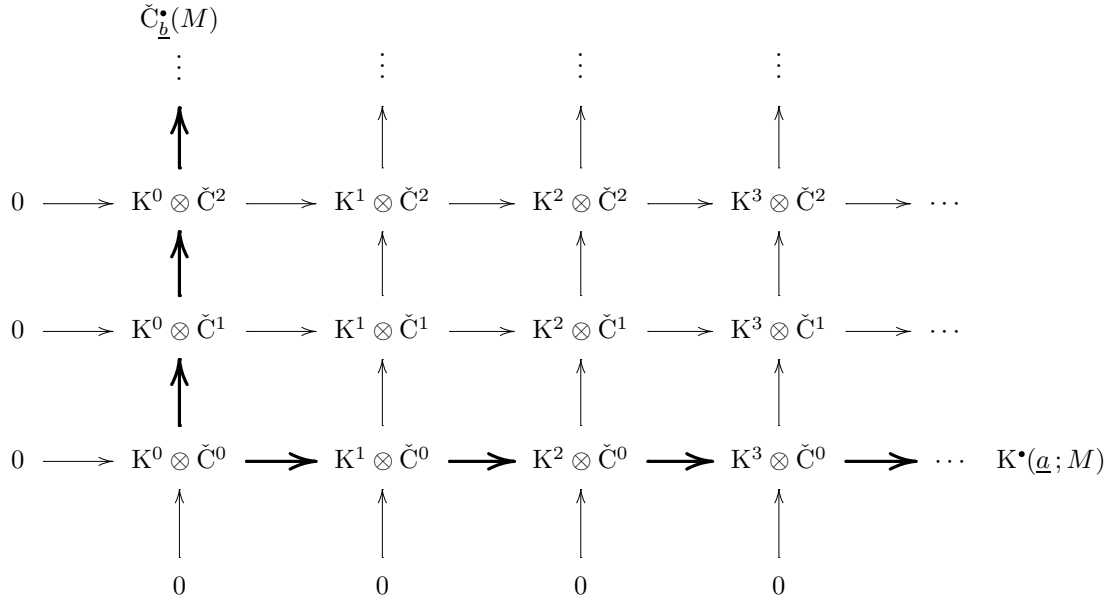
**Proposition 3.4.** *Soit* $M$ *et* $N$ *deux* $\mathbf{A}$*-modules. Soit* $P_\bullet$ *une résolution projective de* $M$ *et* $Q_\bullet$ *une résolution projective de* $N$. *Alors* $\mathrm{H}_i(P_\bullet \otimes N) \simeq \mathrm{H}_i(M \otimes Q_\bullet)$. *Ce dernier module est noté* $\mathrm{Tor}_i^{\mathbf{A}}(M, N)$.

***Preuve.*** Considérons le bicomplexe $K_{p,q} = P_p \otimes Q_q$. Il y a exactitude partout en colonnes sauf sur l'axe des $x$. En effet, la colonne $p$ est le complexe $P_p \otimes Q_\bullet$ : le complexe $Q_\bullet$ est exact en degré strictement positif et le tensoriser par un projectif ne modifie pas son exactitude. De la même manière, les lignes sont exactes sauf sur l'axe des $y$. On a $X_\bullet = P_\bullet \otimes N$ et $Y_\bullet = M \otimes Q_\bullet$ et la proposition précédente donne le résultat. □

# 4 Cohomologie Koszul & Čech

## 4.1 Le bicomplexe Koszul-Čech

Dans cette sous-section, nous allons considérer le bicomplexe dont le terme en position $(p, q)$ vaut $\mathrm{K}^p(\underline{a}\,; \mathbf{A}) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A}) \otimes M$. Nous l'avons vu pour la première fois dans [CJR13].



**L'inégalité Čech-profondeur $\leqslant$ Koszul-profondeur**

La considération du bicomplexe Koszul-Čech permet de montrer l'équivalence des définitions de la profondeur définie à partir de ces deux cohomologies. La proposition suivante démontre l'inégalité Čech-profondeur $\leqslant$ Koszul-profondeur. Nous verrons plus loin comment obtenir l'autre inégalité à l'aide de la suite spectrale associée à la filtration verticale.

**Proposition 4.1.** *Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ deux suites d'éléments de $\mathbf{A}$ telles que $\langle \underline{b}^e \rangle \subset \langle \underline{a} \rangle$ pour un certain $e \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'implication*

$$\forall\, i < k, \quad \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{b}}(M) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall\, i < k, \quad \mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$$

*En particulier, en prenant $\underline{b} = \underline{a}$, on obtient :*

$$\forall\, i < k, \quad \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall\, i < k, \quad \mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$$

***Preuve.*** On considère le bicomplexe montant, concentré dans le premier quadrant, dont le module en position $(p, q)$ vaut $\mathrm{K}^p(\underline{a}\,; \mathbf{A}) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A}) \otimes M$. La colonne $p$ du bicomplexe est le complexe $\mathrm{K}^p(\underline{a}\,; \mathbf{A}) \otimes \check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{b}}(M)$. Et la ligne $q$ est le complexe $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,; M) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A})$. En particulier, sur l'axe des $x$, on trouve le complexe $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,; M) \otimes \check{\mathrm{C}}^0_{\underline{b}}(\mathbf{A})$, c'est-à-dire le complexe de Koszul $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,; M)$.

$\triangleright$ Analyse de la direction horizontale : exactitude en ligne. Sans aucune hypothèse, montrons qu'il y a exactitude en ligne en chaque point sauf sur l'axe des $x$.

La ligne $q$ est le complexe $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,; M) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A})$ et sa cohomologie est donnée par $\mathrm{H}^\bullet(\underline{a}\,; M) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A})$. En effet, le module $\check{\mathrm{C}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A})$ est plat et on sait que la tensorisation par un module plat est compatible avec la cohomologie d'après le chapitre X d'Algèbre de Bourbaki, §4, n° 2, corollaire 2. Or $\mathrm{H}^\bullet(\underline{a}\,; M) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A})$ est une somme directe finie de modules de la forme $\mathrm{H}^\bullet(\underline{a}\,; M)_\pi$ où $\pi$ est un produit de $p$ des $b_\ell$. Comme chaque $b_\ell$ annule $\mathrm{H}^\bullet(\underline{a}\,; M)$, la cohomologie de la colonne $p$ est triviale pourvu que $q > 0$ (afin d'assurer que le produit $\pi$ soit consistant). On peut maintenant appliquer la proposition 2.1 adaptée à la direction horizontale (exactitude en ligne) qui dit que $\mathrm{H}^i(T^\bullet) \simeq \mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M)$ pour tout entier $i$.

$\triangleright$ Analyse de la direction verticale : exactitude en colonne. A l'aide de l'hypothèse, montrons qu'il y a exactitude en colonne en chaque point $(p, q)$ avec $q < k$.

L'hypothèse dit que le complexe de Čech $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{b}}(M)$ est acyclique en degrés $< k$. Si l'on tensorise ce complexe par le module libre $\mathrm{K}^p(\underline{a}\,; \mathbf{A})$ (en particulier plat), on ne perturbe pas l'acyclicité en degrés $< k$ de $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{b}}(M)$. Par conséquent, il y a exactitude en colonne en chaque point $(p, q)$ avec $q < k$. Donc en particulier, il y a exactitude en colonne en chaque point de la diagonale $i$ pour $i < k$. Le lemme de l'escalier fournit $\mathrm{H}^i(T^\bullet) = 0$ pour tout $i < k$.

Conclusion : l'analyse des deux directions fournit $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$ pour tout $i < k$, ce que l'on voulait.

Un complément : si l'on applique le premier point de la proposition 2.1, on obtient une flèche naturelle injective $\mathrm{H}^k(\underline{a}\,; M) \hookrightarrow \check{\mathrm{H}}^k_{\underline{b}}(M)$. □

On en déduit le résultat suivant qui est, a priori, non totalement évident. Il généralise la proposition II-5.3 énoncée avec $M = \mathbf{A}$ et dont la preuve utilise la platitude du complexe $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(\mathbf{A})$.

**Proposition 4.2.** *Si $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ pour tout entier $i$, alors $M = \underline{a}M$.*

***Preuve.*** Supposons $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ pour tout entier $i$. La proposition précédente implique que $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$ pour tout entier $i$. Il suffit d'appliquer cela à $i = n$ car $\mathrm{H}^n(\underline{a}\,; M) = M/\underline{a}M$. □

**Profondeur et localisation**

Le titre de ce paragraphe fait référence au chapitre suivant (cf. proposition V-3.2). Cependant, pour l'instant, nul besoin de savoir ce qu'est la profondeur. Du coup, l'énoncé ci-dessous peut paraître compliqué. Avec l'utilisation de la profondeur, le quantificateur « $\forall\, i < k$ » disparaît et l'énoncé prend l'allure suivante :

$$\begin{cases} \forall\, j \in [\![1, m]\!], \quad \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M_{s_j}) \;\geqslant\; k \\ \mathrm{Gr}(\underline{s}\,; M) \;\geqslant\; k \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \;\geqslant\; k$$

La traduction en français fournit une propriété de recollement de la profondeur au sens suivant :

> *Si la profondeur de $\underline{s}$ sur $M$ est $\geqslant k$ et qu'il en est de même de celle de $\underline{a}$ sur chaque $M_{s_j}$, alors la profondeur de $\underline{a}$ sur $M$ est aussi $\geqslant k$.*

La suite $\underline{s}$ aurait pu être notée $\underline{b}$ pour coller au paragraphe précédent. Cependant, nous souhaitons avoir un énoncé avec une connotation « recollement », ce qui explique le choix de la lettre $s$.

**Proposition 4.3.** *Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ et $\underline{s} = (s_1, \dots, s_m)$ deux suites de scalaires et $M$ un $\mathbf{A}$-module. Soit $k$ un entier.*

$$\begin{cases} ① & \forall\, j \in [\![1, m]\!], \quad \forall\, i < k, \quad \mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M_{s_j}) = 0 \\ ② & \forall\, i < k, \quad \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{s}}(M) = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \forall\, i < k, \quad \mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$$

***Preuve.*** La preuve est similaire à celle de la proposition 4.1. On considère le bicomplexe dont le terme en position $(p, q)$ vaut $\mathrm{K}^p(\underline{a}\,; \mathbf{A}) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{s}}(\mathbf{A}) \otimes M$. La colonne $p$ est le complexe $\mathrm{K}^p(\underline{a}\,; \mathbf{A}) \otimes \check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{s}}(M)$. Et la ligne $q$ est le complexe $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,; M) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{s}}(\mathbf{A})$. En particulier, sur l'axe des $x$, on trouve le complexe de Koszul $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,; M)$.

▷ Analyse de la direction horizontale : exactitude en ligne.

La cohomologie en degré $p$ de la ligne $q$ est donnée par $\mathrm{H}^p(\underline{a}\,; M) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{s}}(\mathbf{A})$ qui est une somme directe de termes du type $\mathrm{H}^p(\underline{a}\,; M)_{s_J} \simeq \mathrm{H}^p(\underline{a}\,; M_{s_J})$ où $J$ est une partie de cardinal $q$. L'hypothèse ① implique que ces modules sont nuls dès que $J$ est non vide (*i.e.* $q \geqslant 1$) et $p < k$. Par conséquent, il y a exactitude en ligne en chaque point $(p, q)$ avec $q \geqslant 1$ et $p < k$. En particulier, pour $i \leqslant k$, il y a exactitude en ligne en chaque point de la diagonale $i$ sauf sur l'axe des $x$. La proposition 2.1 adaptée au cas des lignes fournit $\mathrm{H}^i(T^\bullet) \simeq \mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M)$ pour tout $i < k$.

▷ Analyse de la direction verticale : exactitude en colonne.

La cohomologie en degré $q$ de la colonne $p$ est donnée par $\mathrm{K}^p(\underline{a}\,; \mathbf{A}) \otimes \check{\mathrm{H}}^q_{\underline{s}}(M)$. L'hypothèse ② implique que ces modules sont nuls dès que $q < k$. Par conséquent, il y a exactitude en colonne en chaque point $(p, q)$ avec $q < k$. En particulier, pour $i < k$, il y a exactitude en colonne en chaque point de la diagonale $i$. Le lemme de l'escalier fournit donc $\mathrm{H}^i(T^\bullet) = 0$ pour $i < k$.

Bilan : l'analyse des deux directions fournit $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$ pour tout $i < k$. □

## 4.2 Le bicomplexe Čech-Čech

L'invariance par radical de la cohomologie de Čech peut se montrer pas à pas en supposant d'abord $\underline{b}$ réduite à un seul élément et en utilisant la longue suite exacte (cf. proposition II-2.3) Ci-dessous, on fournit une preuve directe à l'aide du bicomplexe bâti à partir des complexes de Čech des deux suites.

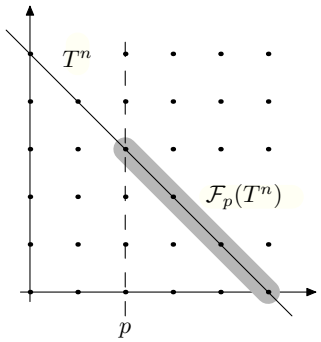
**Proposition 4.4.** *Si $\sqrt{\underline{a}} = \sqrt{\underline{b}}$ alors $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) \simeq \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{b}}(M)$ pour tout $i$.*

***Preuve.*** Considérons le bicomplexe $\check{\mathrm{C}}^p_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A}) \otimes M$. L'analyse de la cohomologie des lignes (et des colonnes) est similaire à celle faite dans la preuve du bicomplexe Koszul-Čech. La cohomologie des lignes vaut $\check{\mathrm{H}}^\bullet_{\underline{a}}(M) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A})$. Elle est nulle pour $q > 0$. En effet, le localisé de $\check{\mathrm{H}}^\bullet_{\underline{a}}(M)$ en un produit non trivial de $b_\ell$ est nul car $\sqrt{\underline{b}} \subset \sqrt{\underline{a}}$. La cohomologie des colonnes vaut $\check{\mathrm{C}}^p_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \otimes \check{\mathrm{H}}^\bullet_{\underline{b}}(M)$ et est nulle pour $p > 0$ (pour les mêmes raisons que précédemment avec l'inclusion $\sqrt{\underline{a}} \subset \sqrt{\underline{b}}$). En appliquant la proposition 2.1 en ligne et en colonne, on obtient $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) \simeq \mathrm{H}^i(T^\bullet) \simeq \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{b}}(M)$. □

# 5 Les deux filtrations d'un bicomplexe et leur suite spectrale associée

À un bicomplexe, on peut associer deux filtrations du complexe total : la filtration verticale et la filtration horizontale. On opte pour la filtration en bande verticale (comme on a opté pour l'exactitude en colonne tout à l'heure) que l'on notera $\mathcal{F}$. Plus précisément, le sous-complexe d'indice $p$ de la filtration de $T^\bullet$ a pour module de degré $n$ :

$$\mathcal{F}_p(T^n) \;=\; \bigoplus_{i\geqslant p} K^{i,n-i}$$



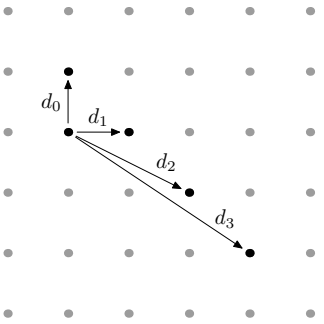

Cette filtration est décroissante et « filtre tout sur son passage » : en plus du complexe $T^\bullet$, il y a aussi le module $Z^\bullet$ des cycles, le module $B^\bullet$ des bords, sans oublier le module de cohomologie $\mathrm{H}^\bullet(T^\bullet)$, le plus important dans l'histoire.

La filtration de $\mathrm{H}^n = \mathrm{H}^n(T^\bullet)$ s'organise de la manière suivante :

$$0 = \mathcal{F}_{n+1}(\mathrm{H}^n) \;\subset\; \mathcal{F}_n(\mathrm{H}^n) \;\subset\; \cdots \;\subset\; \mathcal{F}_1(\mathrm{H}^n) \;\subset\; \mathcal{F}_0(\mathrm{H}^n) = \mathrm{H}^n$$

Dans notre contexte (suite spectrale associée à une filtration du totalisé d'un bicomplexe), ce sont les modules quotients $\mathcal{F}_p(\mathrm{H}^n)\big/\mathcal{F}_{p+1}(\mathrm{H}^n)$ qui vont permettre de cerner $\mathrm{H}^n$. En effet, à la filtration verticale $\mathcal{F}$ est associée une suite spectrale $\uparrow\!E$ qui a des propriétés sympathiques vis-à-vis de ces modules quotients. Redonnons quelques détails à ce sujet sans redéfinir tous les termes (voir notamment [Wei94], [McC01], [Rot08]). La filtration $\mathcal{F}$ donne naissance à une collection $(E_r^{p,q})$ de modules qui s'organisent, à la page $r$, en complexes $(E_r^{\bullet,\bullet}, d_r)$ bigradués. La flèche $d_r$ est de bidegré $(r,\, -r+1)$ et donc de degré total $+1$ (ainsi, $d_r$ envoie la diagonale $n$ sur la diagonale $n+1$)

$$d_r : E_r^{p,q} \;\longrightarrow\; E_r^{p+r,\,q-r+1}$$




De plus, la page $r+1$ est obtenue en prenant la cohomologie de la page $r$ ; plus précisément, il y a un isomorphisme canonique $E_{r+1}^{p,q} \simeq \mathrm{H}^{p,q}(E_r^{\bullet,\bullet})$. En particulier, $E_{r+1}^{p,q}$ est un sous-quotient de $E_r^{p,q}$. La page 0 est simplement le bicomplexe initial $K^{\bullet,\bullet}$ affublé uniquement de la direction verticale, *i.e.* de la différentielle $\uparrow\!d = d''$. Pour obtenir la page 1, on prend la cohomologie de la page 0 : cela produit les modules $E_1^{p,q}$ qui s'agencent entre eux avec la flèche induite par $\underrightarrow{d} = d'$. Par conséquent, la page 2 est « la cohomologie horizontale de la cohomologie verticale ». Signalons qu'en procédant de la sorte, *i.e.* de manière un peu naïve, la flèche $d_2$ n'est pas définie…

Résumons :

$$E_0^{p,q} = K^{p,q}, \qquad E_1^{p,q} = \mathrm{H}^q(K^{p,\bullet}), \qquad E_2^{p,q} = \underrightarrow{\mathrm{H}}^p\!\uparrow\!\mathrm{H}^q(K^{\bullet,\bullet}).$$

Dans le cadre d'un bicomplexe concentré dans le premier quadrant, la suite $(E_r^{p,q})_r$ finit par stagner. En notant $E_\infty^{p,q}$ sa limite, on a très exactement $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ pour $r > \max(p,\, q{+}1)$. Ce qui est remarquable, c'est que, pour $p$ fixé, la suite $(E_r^{p,n-p})_r$ approxime le quotient $\mathcal{F}_p(\mathrm{H}^n)\big/\mathcal{F}_{p+1}(\mathrm{H}^n)$. Plus précisément, la limite est canoniquement isomorphe au quotient :

$$E_\infty^{p,n-p} \;\simeq\; \frac{\mathcal{F}_p(\mathrm{H}^n)}{\mathcal{F}_{p+1}(\mathrm{H}^n)}$$

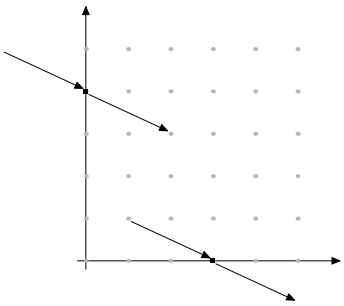
Le schéma suivant est censé résumer la situation :

$$0 = \underbrace{\mathcal{F}_{n+1}(\mathrm{H}^n) \;\subset\; \mathcal{F}_n(\mathrm{H}^n)}_{E_\infty^{n,0}} \;\subset\; \underbrace{\mathcal{F}_{n-1}(\mathrm{H}^n)}_{E_\infty^{n-1,1}} \;\subset\; \cdots \;\subset\; \mathcal{F}_2(\mathrm{H}^n) \;\subset\; \underbrace{\mathcal{F}_1(\mathrm{H}^n) \;\subset\; \mathcal{F}_0(\mathrm{H}^n)}_{E_\infty^{0,n}} = \mathrm{H}^n$$

Si on regarde les extrémités, on obtient :

$$E_\infty^{n,0} \hookrightarrow \mathrm{H}^n(T^\bullet) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}^n(T^\bullet) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,n}$$

Pour terminer, parlons de l'organisation aux bords (sous-entendu, sur les axes). Pour $r \geqslant 2$, les flèches qui partent de l'axe des $x$ et les flèches qui arrivent sur l'axe des $y$ sont nulles (c'est aussi valable pour $r = 1$ pour l'axe des $y$).



Par conséquent, on a

$$E_{r+1}^{n,0} \simeq \frac{E_r^{n,0}}{\operatorname{Im} d_r} \qquad \text{et} \qquad E_{r+1}^{0,n} \simeq \operatorname{Ker} d_r \subset E_r^{0,n}$$

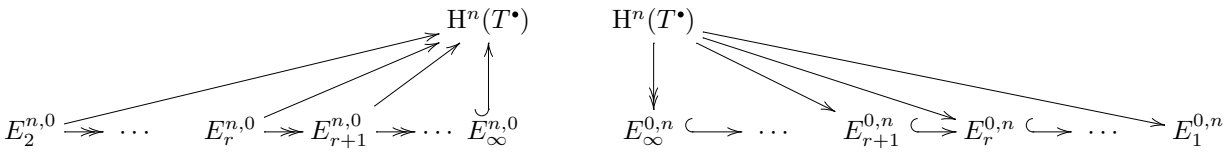
En particulier, pour $r \geqslant 2$, on a des flèches canoniques (celle de droite étant aussi valable pour $r = 1$) :

$$E_r^{n,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{n,0} \qquad \text{et} \qquad E_\infty^{0,n} \hookrightarrow E_r^{0,n}$$

Ces flèches sont baptisées dans la littérature « edge homomorphisms » (confer [Wei94, Example 5.2.6]), ce que l'on peut traduire « morphismes bords ». En mettant bout à bout les morphismes :

$$E_r^{n,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{n,0} \hookrightarrow \mathrm{H}^n(T^\bullet) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}^n(T^\bullet) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,n} \hookrightarrow E_r^{0,n}$$

ou encore, une vision d'ensemble :




# 6 Relecture « spectrale » de nos énoncés élémentaires

Le décor étant planté, l'objectif est de faire une relecture des énoncés élémentaires présentés en première partie. En fait, on va même se permettre le luxe d'en faire un peu plus que nécessaire.

## 6.1 Nullité le long d'une diagonale

On commence par un lemme qui couvre largement le lemme de l'escalier : en effet, dire qu'il y a exactitude (en colonne) en chaque point de la diagonale $n$, c'est dire que $E_1^{p,q} = 0$ pour tout $(p, q)$ tel que $p + q = n$, a fortiori $E_\infty^{p,q} = 0$ pour ces mêmes points.

**Lemme 6.1.** *Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Posons $n = p + q$. Si $E_\infty^{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \neq (p, q)$ tels que $i + j = n$, alors $\mathrm{H}^n(T^\bullet) \simeq E_\infty^{p,q}$.*

***Preuve.*** Reprenons la filtration de $\mathrm{H}^n(T^\bullet)$ :

$$\cdots = \underbrace{\mathcal{F}_{p+2} = \mathcal{F}_{p+1}}_{0} \subset \underbrace{\mathcal{F}_p = \mathcal{F}_{p-1}}_{E_\infty^{p,q}} = \cdots$$

On a donc

$$0 = \mathcal{F}_{n+1} = \cdots = \mathcal{F}_{p+1}, \qquad \mathcal{F}_p \simeq E_\infty^{p,q}, \qquad \mathcal{F}_p = \cdots = \mathcal{F}_0 = \mathrm{H}^n(T^\bullet).$$

Finalement, $E_\infty^{p,q} \simeq \mathrm{H}^n(T^\bullet)$ où $n = p + q$. □

**Proposition 6.2** (Relecture approfondie du lemme de l'escalier)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. S'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $E_r^{p,q} = 0$ pour tout $(p, q)$ tel que $p + q = n$, alors $\mathrm{H}^n(T^\bullet) = 0$. Réciproquement, si $\mathrm{H}^n(T^\bullet) = 0$ alors, pour $r > n + 1$, on a $E_r^{p,q} = 0$ pour tout $(p, q)$ tel que $p + q = n$.*

***Preuve.*** Le sens direct résulte immédiatement du lemme ci-dessus. Pour la réciproque, on utilise que $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ si $r > \max(p,\, q + 1)$, ce qui est le cas dès que $r > p + q + 1$. □

## 6.2 Collapsing sur l'axe des $y$ de la page $r \geqslant 1$

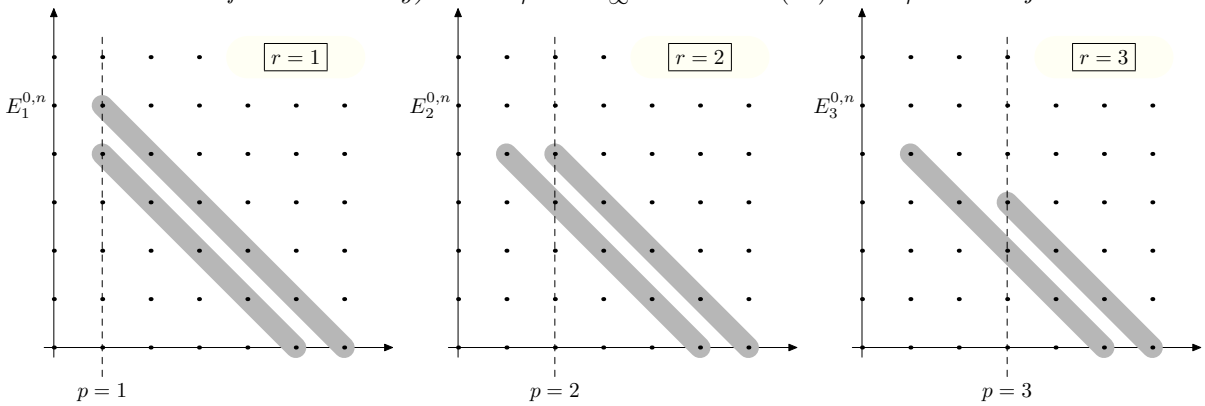
Il s'agit de généraliser la proposition 2.1 qui s'obtient en faisant $r = 1$ dans ce qui suit. En effet, $\mathrm{H}^n(K^{0,\bullet})$ correspond exactement à $E_1^{0,n}$. Signalons au passage que le complexe $U^\bullet = \mathrm{Ker}(T^\bullet \twoheadrightarrow K^{0,\bullet})$ qui intervient dans la preuve de la proposition 2.1 n'est ni plus ni moins que $\mathcal{F}_1(T^\bullet)$.

Enfin, ne pas oublier que l'on dispose des flèches : $\mathrm{H}^n(T^\bullet) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,n} \hookrightarrow E_r^{0,n}$.

**Proposition 6.3.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $r \geqslant 1$.*

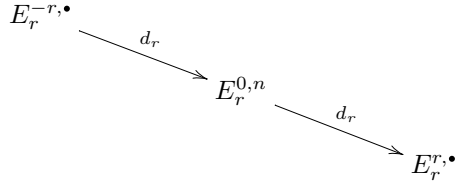
*▷ Si $E_r^{p,n-p} = 0$ pour tout $p > 0$ (c'est-à-dire, si la diagonale $n$ de $E_r$ est nulle sauf sur l'axe des $y$) alors $E_\infty^{0,n} \simeq \mathrm{H}^n(T^\bullet)$ et donc $\mathrm{H}^n(T^\bullet) \longrightarrow E_r^{0,n}$ est injective.*

*▷ Si $E_r^{i,j} = 0$ pour tout $i + j = n + 1$ et $i \geqslant r$ (ce qui est par exemple le cas si la diagonale $n + 1$ de $E^r$ est nulle sauf sur l'axe des $y$) alors $E_r^{0,n} = E_\infty^{0,n}$ et donc $\mathrm{H}^n(T^\bullet) \longrightarrow E_r^{0,n}$ est surjective.*




*En particulier, si la suite spectrale collapse sur l'axe des $y$ de la page $r \geqslant 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la flèche $\mathrm{H}^n(T^\bullet) \longrightarrow E_r^{0,n}$ est bijective.*

***Preuve.*** Le premier point résulte du lemme 6.1. Pour le deuxième point, examinons ce qui se passe de part et d'autre de $E_r^{0,n}$. On est dans la situation suivante (on désigne volontairement les exposants inutiles pour la preuve par un $\bullet$) :




Le terme $E_r^{-r,\bullet}$ (situé sur la diagonale $n - 1$) est nul car situé à gauche de l'axe des $y$ (ne pas oublier que $r \geqslant 1$ *i.e.* $r < 0$). Le terme $E_r^{r,\bullet}$, situé sur la diagonale $n + 1$, est nul par hypothèse. Par conséquent, $0 \xrightarrow{d_r} E_r^{0,n} \xrightarrow{d_r} 0$ d'où $E_{r+1}^{0,n} = E_r^{0,n}$. On peut reproduire ce raisonnement à la page $r + 1$, les mêmes hypothèses étant vérifiées : on obtient $E_{r+2}^{0,n} = E_{r+1}^{0,n}$. Et ainsi de suite... □

### 6.3 Collapsing sur l'axe des $x$ de la page $r \geqslant 2$

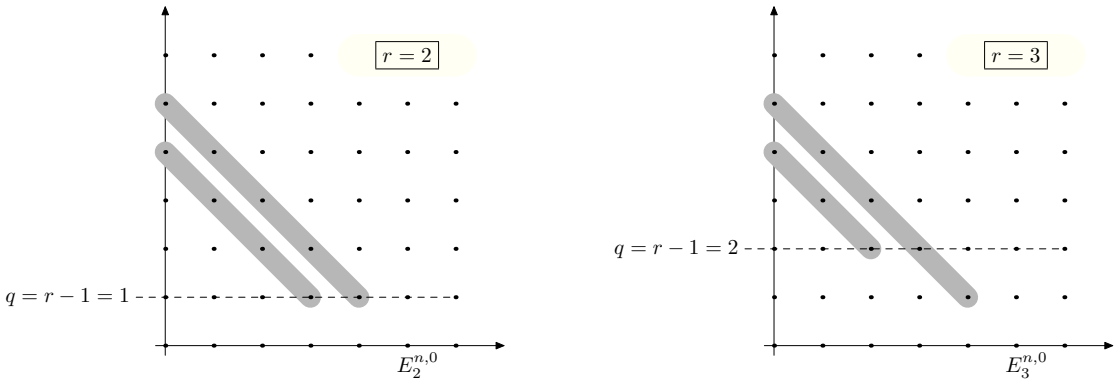
Il s'agit de faire une relecture de la proposition 2.2. Tout d'abord, il faut remarquer que le complexe $X^\bullet$ est exactement l'axe des $x$ de la page 1 *i.e.* $X^n = E_1^{n,0}$. Par conséquent $\mathrm{H}^n(X^\bullet) = E_2^{n,0}$. Les hypothèses de la proposition 2.2 sont du type « exactitude en colonne au point $(p,q)$ avec $p+q=n$, $p+q=n-1$ et $q>0$ (*i.e.* sauf éventuellement sur l'axe des $x$) ». En termes de suite spectrale, cela se traduit par $E_1^{p,q}=0$ (a fortiori $E_2^{p,q}=0$) sur la même plage d'indice. La conclusion concerne le morphisme $\mathrm{H}^n(X^\bullet)\to\mathrm{H}^n(T^\bullet)$ : elle met donc en jeu la page 2 de la suite spectrale.

Avant de commencer, on rappelle que l'on a des flèches naturelles : $E_r^{n,0} \twoheadrightarrow E_\infty^{n,0} \hookrightarrow \mathrm{H}^n(T^\bullet)$.

**Proposition 6.4.** *Soit $n\in\mathbb{N}$ et $r\geqslant 2$*

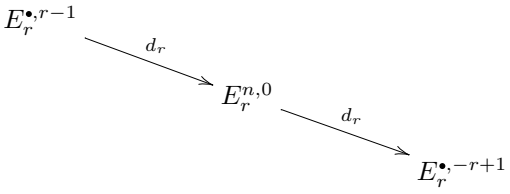
*▷ Si $E_r^{n-q,q}=0$ pour tout $q>0$ (c'est-à-dire, si la diagonale $n$ de $E_r$ est nulle sauf sur l'axe des $x$) alors $E_\infty^{n,0}\simeq\mathrm{H}^n(T^\bullet)$ et donc $E_r^{n,0}\longrightarrow\mathrm{H}^n(T^\bullet)$ est surjective.*

*▷ Si $E_r^{i,j}=0$ pour tout $i+j=n-1$ et $j\geqslant r-1$ (ce qui est par exemple le cas si la diagonale $n-1$ de $E^r$ est nulle sauf sur l'axe des $x$) alors $E_r^{n,0}=E_\infty^{n,0}$ et donc $E_r^{n,0}\longrightarrow\mathrm{H}^n(T^\bullet)$ est injective.*




*En particulier, si la suite spectrale collapse sur l'axe des $x$ de la page $r\geqslant 2$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, la flèche $E_r^{n,0}\longrightarrow\mathrm{H}^n(T^\bullet)$ est bijective.*

***Preuve.*** Le premier point résulte du lemme 6.1. Pour le deuxième point, examinons ce qui se passe de part et d'autre de $E_r^{n,0}$. On est dans la situation suivante (on désigne volontairement les exposants inutiles pour la preuve par un $\bullet$) :




Le terme $E_r^{\bullet,r-1}$, situé sur la diagonale $n-1$, est nul par hypothèse. Le terme $E_r^{\bullet,-r+1}$ (situé sur la diagonale $n+1$) est nul car situé en dessous de l'axe des $x$ (ne pas oublier que $r\geqslant 2$ *i.e.* $-r+1<0$). Par conséquent, $0 \xrightarrow{d_r} E_r^{n,0} \xrightarrow{d_r} 0$ d'où $E_{r+1}^{n,0}=E_r^{n,0}$. On peut reproduire ce raisonnement à la page $r+1$, les mêmes hypothèses étant vérifiées : on obtient $E_{r+2}^{n,0}=E_{r+1}^{n,0}$. Et ainsi de suite... □

# 7 Applications

On illustre ces résultats avec les deux applications suivantes (qui ne peuvent pas être obtenues en utilisant uniquement les énoncés élémentaires).

### 7.1 Čech-profondeur = Koszul-profondeur

On reprend le bicomplexe $\check{\mathrm{C}}^q_{\underline{a}}\big(\mathrm{K}^p(\underline{a}\,;M)\big) = \mathrm{K}^p\big(\underline{a}\,;\check{\mathrm{C}}^q_{\underline{a}}(M)\big)$ donnée dans la preuve de la proposition 4.1. On considère la suite spectrale associée à la direction verticale. On a

$$E_1^{p,q}=\check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}\big(\mathrm{K}^p(\underline{a}\,;M)\big)=\mathrm{K}^p\big(\underline{a}\,;\check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}(M)\big) \qquad \text{et} \qquad E_2^{p,q}=\mathrm{H}^p\big(\underline{a}\,;\check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}(M)\big)$$

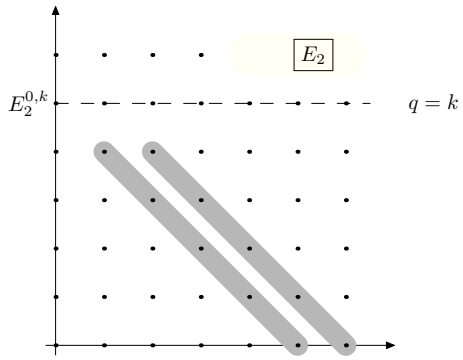
Justifications. La colonne $p$ du bicomplexe est donnée par $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}\big(\mathrm{K}^p(\underline{a}\,;M)\big)$ ce qui donne $E_1^{p,q} = \check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}\big(\mathrm{K}^p(\underline{a}\,;M)\big)$. Mais la colonne $p$ est aussi donnée par $\check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(M)\otimes \mathrm{K}^p(\underline{a}\,;\mathbf{A})$. Comme $\mathrm{K}^p(\underline{a}\,;\mathbf{A})$ est plat (libre en fait), on obtient $E_1^{p,q} = \check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}(M)\otimes \mathrm{K}^p(\underline{a}\,;\mathbf{A}) = \mathrm{K}^p\big(\underline{a}\,;\check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}(M)\big)$. Cette dernière expression permet d'identifier facilement la page 2 : on a bien $E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p\big(\underline{a}\,;\check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}(M)\big)$.

***Preuve spectrale de la proposition 4.1.*** On commence par examiner la suite spectrale associée à la filtration horizontale. On a $\underset{\rightarrow}{E}{}_1^{p,q} = \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{a}}(\mathbf{A})\otimes \mathrm{H}^p(\underline{a}\,;M)$. A l'aide des mêmes arguments que ceux donnés dans la preuve initiale, on a $\underset{\rightarrow}{E}{}_1^{p,q} = 0$ pour tout $p\geqslant 0$ et tout $q\geqslant 1$, autrement dit, la suite spectrale $\underset{\rightarrow}{E}$ collapse sur l'axe des $x$. En appliquant le pendant de la proposition 6.3 dans le cas de la filtration horizontale, on obtient $\mathrm{H}^i(T^\bullet)\simeq \underset{\rightarrow}{E}{}_1^{i,0} = \mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M)$.

On s'intéresse maintenant à la suite spectrale ${}^{\uparrow}E$ associée à la filtration verticale. Sa page 1 est égale à ${}^{\uparrow}E_1^{p,q} = \mathrm{K}^p\big(\underline{a}\,;\check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}(M)\big)$. Si $i<k$, la diagonale $i$ de la page 1 est nulle en raison de l'hypothèse $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)=0$. Ainsi $\mathrm{H}^i(T^\bullet)=0$ c'est-à-dire $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M)=0$. □

**Proposition 7.1.** *Si* $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)=0$ *pour* $i<k$ *alors* $\mathrm{H}^k(\underline{a}\,;M) = \{x\in \check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M)\mid \underline{a}\,x=0\} \overset{\text{def}}{=} (0:\underline{a})_{\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M)}$.

***Preuve.*** L'hypothèse implique que $E_2^{p,q}=0$ pour tout $q<k$. On peut appliquer la proposition 6.3 avec $r=2$ et $n=k$ qui demande la nullité de $E_2$ sur un morceau des diagonales $k$ et $k+1$ :




La proposition s'en déduit en remarquant que $E_2^{0,k} = \mathrm{H}^0\big(\underline{a}\,;\check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}(M)\big) = (0:\underline{a})_{\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M)}$. □

La considération de la page 2 de la suite spectrale associée à la filtration verticale de ce bicomplexe permet de montrer l'autre inégalité concernant la Čech-profondeur et la Koszul-profondeur (on a déjà établi que Čech-profondeur $\leqslant$ Koszul-profondeur, cf. proposition 4.1).

**Lemme 7.2.** *On suppose que* $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)=0$ *pour tout* $i<k$. *Si* $\mathrm{H}^k(\underline{a}\,;M)=0$ *alors* $\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M)=0$.

***Preuve.*** Grâce à la proposition précédente, on a $\mathrm{H}^k(\underline{a}\,;M) = (0:\underline{a})_{\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M)}$ qui est donc nul par hypothèse. D'autre part, on sait que tout élément de $\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M)$ est tué par une puissance de $\langle\underline{a}\rangle$. Ces deux faits réunis conduisent à $\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M)=0$. □

**Proposition 7.3.** *Soit* $\underline{a}$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{A}$ *et* $M$ *un* $\mathbf{A}$*-module. Pour tout* $k\in\mathbb{N}$, *on a l'implication*

$$\forall\, i<k,\quad \mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M)=0 \qquad\Longrightarrow\qquad \forall\, i<k,\quad \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)=0$$

***Preuve.*** On procède par récurrence sur $k$. Pour $k=0$, c'est immédiat. Supposons que $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M)=0$ pour tout $i<k+1$, *i.e.* $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M)=0$ pour tout $i<k$ et $\mathrm{H}^k(\underline{a}\,;M)=0$. L'hypothèse de récurrence fournit $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)=0$ pour tout $i<k$. On est maintenant dans les conditions du lemme précédent qui permet d'en déduire que $\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M)=0$. Finalement, on a bien $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)=0$ pour tout $i<k+1$. □

### 7.2 Inégalité cohomologique

**Proposition 7.4.** *Soient $\underline{a}$ et $\underline{b}$ deux suites d'éléments de $\mathbf{A}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. On a l'implication*

$$\left.\begin{array}{l} \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0, \quad \forall\, i > \alpha \\ \check{\mathrm{H}}^j_{\underline{b}}(\mathbf{A}) = 0, \quad \forall\, j > \beta \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a},\underline{b}}(\mathbf{A}) = 0, \quad \forall\, k > \alpha + \beta$$

*qui se traduit par l'inégalité* $\mathrm{cd}(\underline{a},\underline{b}) \leqslant \mathrm{cd}(\underline{a}) + \mathrm{cd}(\underline{b})$.

***Preuve.*** On considère le bicomplexe défini par $K^{p,q} = \check{\mathrm{C}}^p_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A})$ dont le complexe total est $T^\bullet = \check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a},\underline{b}}(\mathbf{A})$. La suite spectrale ↑$E$ associée à la filtration verticale vérifie

$$E_1^{p,q} = \check{\mathrm{C}}^p_{\underline{a}}\big(\check{\mathrm{H}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A})\big) \qquad \text{et} \qquad E_2^{p,q} = \check{\mathrm{H}}^p_{\underline{a}}\big(\check{\mathrm{H}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A})\big)$$

La détermination de la page 1 utilise toujours le même argument : le module $\check{\mathrm{C}}^p_{\underline{a}}(\mathbf{A})$ est plat. On a donc $E_1^{p,q} = \check{\mathrm{C}}^p_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \otimes \check{\mathrm{H}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A})$ d'où l'expression donnée ci-dessus.
Intéressons-nous à la page 2 en montrant que $E_2^{p,q} = 0$ pour $p+q > \alpha+\beta$. Si $p+q > \alpha+\beta$ alors :

– soit $q > \beta$ et alors $\check{\mathrm{H}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A}) = 0$ par hypothèse ;

– soit $p > \alpha$ et alors $\check{\mathrm{H}}^p_{\underline{a}}(N) = 0$ avec $N = \check{\mathrm{H}}^q_{\underline{b}}(\mathbf{A})$ (on utilise ici l'inégalité $\mathrm{cd}(\underline{a}\,; N) \leqslant \mathrm{cd}(\underline{a}\,; \mathbf{A})$ prouvée à la proposition 5.6 du chapitre II).

On vient donc de montrer que la page 2 a toutes ses diagonales $k$ nulles pour $k > \alpha+\beta$. En appliquant la proposition 6.2, on obtient que $\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a},\underline{b}}(\mathbf{A}) = 0$ pour tout $k > \alpha+\beta$. □

# 8 Addendum

### 8.1 Comment est défini $E_r^{p,q}$ ?

On donne les vérifications des faits annoncés précédemment, à savoir que l'on peut associer, à la filtration verticale $\mathcal{F}$, une suite spectrale qui a le bon goût de converger vers la cohomologie du complexe total. Nous avons tenu à présenter ces calculs afin d'être convaincus que les suites spectrales ne sont pas des objets si éthérés que cela. Encore fallait-il les inventer… Pour mener ces calculs, nous avons été bien guidés par les pages 34-37 de l'ouvrage de McCleary [McC01]. Dans la suite, $n = p+q$. On pose

$$\mathcal{Z}_r^{p,q} = \mathcal{F}_p(T^n) \cap d^{-1}\big(\mathcal{F}_{p+r}(T^{n+1})\big) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_r^{p,q} = \mathcal{F}_p(T^n) \cap d\big(\mathcal{F}_{p-r}(T^{n-1})\big)$$

Pour la suite, il sera utile de savoir que $\mathcal{B}_r^{p,q} = d(\mathcal{Z}_r^{p-r,\,q+r-1})$ (simple vérification).

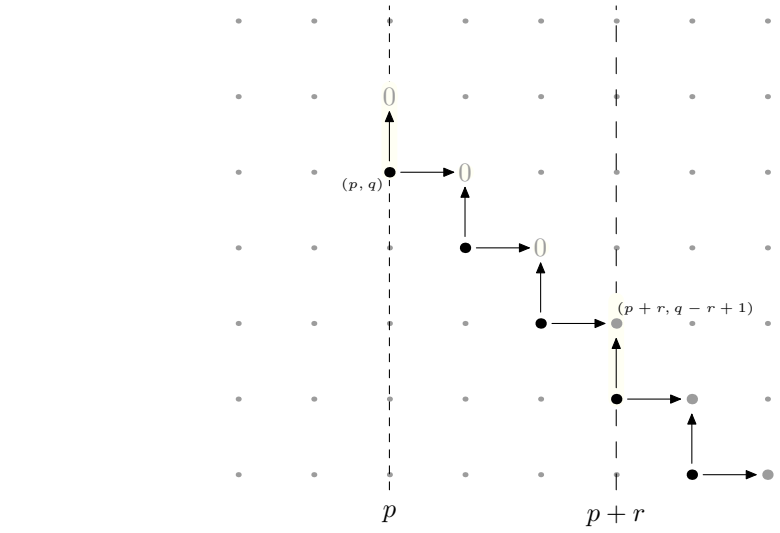
Les schémas ci-contre nous permettent de voir que l'on a les inclusions $\mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} \subset \mathcal{Z}_r^{p,q}$ et $\mathcal{B}_r^{p,q} \subset \mathcal{B}_{r+1}^{p,q}$. Sur le premier schéma, la diagonale noire représente un élément de $\mathcal{Z}_r^{p,q}$ et la diagonale grise est son image par $d$. Sur le second schéma, la diagonale noire représente un élément de $\mathcal{B}_r^{p,q}$ et la diagonale grise est un de ses antécédents qui est dans $\mathcal{Z}_r^{p-r,\,q+r-1}$ (cela montre au passage l'inclusion « difficile » $\mathcal{B}_r^{p,q} \subset d(\mathcal{Z}_r^{p-r,\,q+r-1})$ de l'égalité mentionnée ci-dessus).

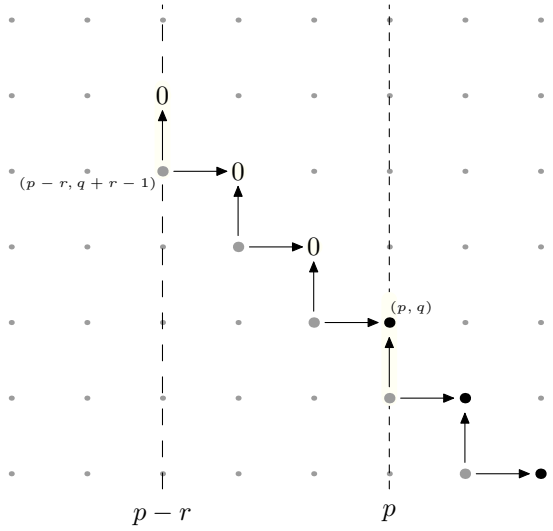
Ces schémas montrent également les indices de stagnation :

$$\mathcal{Z}_r^{p,q} = \mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} \quad \text{pour } q-r+1 < 0$$

$$\mathcal{B}_r^{p,q} = \mathcal{B}_{r+1}^{p,q} \quad \text{pour } p-r \leqslant 0$$

On notera alors $\mathcal{Z}_\infty^{p,q} = \mathcal{Z}_r^{p,q}$ pour $r > q+1$ et $\mathcal{B}_\infty^{p,q} = \mathcal{B}_r^{p,q}$ pour $r \geqslant p$.




Il est facile de voir que la limite $\mathcal{Z}_\infty^{p,q}$, atteinte pour $r > q+1$, est le module constitué des cycles de $T^\bullet$ qui sont dans $\mathcal{F}_p(T^n)$, ce que l'on peut abréger en $\mathcal{Z}_\infty^{p,q} = \mathcal{F}_p(Z^n)$ où l'on a noté $Z^n$ les cycles de degré $n$ du complexe $T^\bullet$.

De la même manière, la limite $\mathcal{B}_\infty^{p,q}$, atteinte pour $r \geqslant p$, est le module constitué des bords de $T^\bullet$ qui sont dans $\mathcal{F}_p(T^n)$, ce que l'on peut abréger en $\mathcal{B}_\infty^{p,q} = \mathcal{F}_p(B^n)$.

Résumons :

$$\mathcal{B}_0^{p,q} \ \subset \ \mathcal{B}_1^{p,q} \ \subset \ \cdots \ \subset \ \mathcal{B}_\infty^{p,q} \ \subset \ \mathcal{Z}_\infty^{p,q} \ \subset \ \cdots \ \subset \ \mathcal{Z}_1^{p,q} \ \subset \ \mathcal{Z}_0^{p,q}$$

et

$$\mathcal{Z}_r^{p,q} = \mathcal{Z}_\infty^{p,q} = \mathcal{F}_p(Z^n) \quad \text{pour } r > q+1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_r^{p,q} = \mathcal{B}_\infty^{p,q} = \mathcal{F}_p(B^n) \quad \text{pour } r \geqslant p$$

Le module magique tant convoité est

$$E_r^{p,q} \ = \ \frac{\mathcal{Z}_r^{p,q}}{\mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1} + \mathcal{B}_{r-1}^{p,q}}$$

Grâce à ce qui précède, on voit que $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ pour $r > \max(p,\, q+1)$.

Pour alléger, on pose $D_r^{p,q} = \mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1} + \mathcal{B}_{r-1}^{p,q}$ pour désigner le dénominateur de $E_r^{p,q}$.

▷ Vérifions que la page 1 de $\uparrow E$ fournit la cohomologie du complexe $(Q_p^\bullet, d)$ où on a noté $Q_p^\bullet$ le complexe dont le module de degré $n$ vaut $Q_p^n = \mathcal{F}_p(T^n)/\mathcal{F}_{p+1}(T^n)$. Plus précisément, montrons que $E_1^{p,n-p} = \mathrm{H}^n(Q_p^\bullet)$. A noter que dans le cadre d'un bicomplexe, cela s'écrit $E_1^{p,q} = \mathrm{H}^q(K^{p,\bullet})$, ce qui correspond donc à la cohomologie verticale, *i.e.* à la cohomologie des colonnes.

Déterminons la cohomologie de $Q_p^\bullet$ en degré $n$, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n-1}$ où :

$$\frac{\mathcal{F}_p(T^{n-1})}{\mathcal{F}_{p+1}(T^{n-1})} \xrightarrow{d_{n-1}} \frac{\mathcal{F}_p(T^n)}{\mathcal{F}_{p+1}(T^n)} \xrightarrow{d_n} \frac{\mathcal{F}_p(T^{n+1})}{\mathcal{F}_{p+1}(T^{n+1})}$$

On a

$$\operatorname{Ker} d_n = \frac{\mathcal{F}_p(T^n) \cap d^{-1}\big(\mathcal{F}_{p+1}(T^n)\big) + \mathcal{F}_{p+1}(T^n)}{\mathcal{F}_{p+1}(T^n)} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} d_{n-1} = \frac{d\big(\mathcal{F}_p(T^{n-1})\big) + \mathcal{F}_{p+1}(T^n)}{\mathcal{F}_{p+1}(T^n)}$$

ce qui s'écrit encore, en utilisant que $\mathcal{Z}_0 := \mathcal{Z}_0^{p+1,q-1} = \mathcal{F}_{p+1}(T^n)$ et $\mathcal{B}_0^{p,q} = d\big(\mathcal{F}_p(T^{n-1})\big)$,

$$\operatorname{Ker} d_n = \frac{\mathcal{Z}_0 + \mathcal{Z}_1^{p,q}}{\mathcal{Z}_0} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} d_{n-1} = \frac{\mathcal{Z}_0 + \mathcal{B}_0^{p,q}}{\mathcal{Z}_0}$$

En utilisant que $\mathcal{Z}_0 := \mathcal{Z}_0^{p+1,q-1} \subset \mathcal{Z}_1^{p,q}$, on obtient que

$$\frac{\operatorname{Ker} d_n}{\operatorname{Im} d_{n-1}} \underset{\text{can.}}{\simeq} \frac{\mathcal{Z}_0 + \mathcal{Z}_1^{p,q}}{\mathcal{Z}_0 + \mathcal{B}_0^{p,q}} = \frac{\mathcal{Z}_1^{p,q}}{\mathcal{Z}_0 + \mathcal{B}_0^{p,q}} =: E_1^{p,q}$$

▷ On va vérifier que l'on a un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^{p,q}(E_r^{\bullet,\bullet}) \simeq E_{r+1}^{p,q}$, la flèche $d_r$ étant celle induite par la flèche $d$ définie au niveau de $T^\bullet$. Le fait que $d$ soit bien définie sur le quotient $E_r$ résulte du fait que $d(D_r^{p,q}) \subset D_r^{p+r,q-r+1}$ car par définition $d(\mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,q-1}) = \mathcal{B}_{r-1}^{p+r,q-r+1}$.
Un petit schéma ne peut pas faire de mal :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{Z}_{r+1}^{p,\,q} & & \\
 & & \big\downarrow & & \\
\mathcal{Z}_r^{p-r,\,q+r-1} & \xrightarrow{d} & \mathcal{Z}_r^{p,\,q} & \xrightarrow{d} & \mathcal{Z}_r^{p+r,\,q-r+1} \\
 & & \big\downarrow & & \\
E_r^{p-r,\,q+r-1} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{p,\,q} & \xrightarrow{d_r} & E_r^{p+r,\,q-r+1}
\end{array}$$

Les expressions du noyau et de l'image de $d_r$ ont le visage suivant :

$$\operatorname{Ker} d_r = \frac{\mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} + D_r^{p,q}}{D_r^{p,q}} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} d_r = \frac{\mathcal{B}_r^{p,q} + D_r^{p,q}}{D_r^{p,q}}$$

**Pour le noyau.** Soit $z \in \mathcal{Z}_r^{p,q}$ tel que $d(z) \in D_r^{p+r,\,q-r+1} = \mathcal{Z}_{r-1}^{p+r+1,\,q-r} + d(\mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1})$. Il existe donc $z' \in \mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1}$ tel que $d(z-z') \in \mathcal{Z}_{r-1}^{p+r+1,\,q-r} \subset \mathcal{F}_{p+r+1}(T^{n+1})$. Par conséquent, l'élément $z-z'$ de $\mathcal{F}_p(T^n)$ appartient à $\mathcal{Z}_{r+1}^{p,q}$. Bilan des courses, $z \in \mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} + \mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1}$. On a donc $\operatorname{Ker} d_r = \big(\mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} + \mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1}\big)/D_r^{p,q}$. L'expression annoncée provient des égalités : $\mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} + D_r^{p,q} = \mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} + \mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1} + \mathcal{B}_{r-1}^{p,q} = \mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} + \mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1}$ car $\mathcal{B}_{r-1}^{p,q} \subset \mathcal{Z}_{r+1}^{p,q}$.

**Pour l'image.** Par définition, on a $\operatorname{Im} d_r = \big(d(\mathcal{Z}_r^{p-r,\,q+r-1}) + D_r^{p,q}\big)/D_r^{p,q}$. D'où l'expression annoncée car $d(\mathcal{Z}_r^{p-r,\,q+r-1}) = \mathcal{B}_r^{p,q}$.

**Pour le quotient.** On obtient donc $\mathrm{H}^{p,q}(E_r^{\bullet,\bullet}) \simeq \dfrac{\mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} + D_r^{p,q}}{\mathcal{B}_r^{p,q} + D_r^{p,q}}$. Ce n'est pas encore tout à fait ce que l'on veut.

Pour parvenir à nos fins, on considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} & \twoheadrightarrow & \dfrac{\mathcal{Z}_{r+1}^{p,q}+D_r^{p,q}}{D_r^{p,q}} = \operatorname{Ker} d_r \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow \\ & & \dfrac{\mathcal{Z}_{r+1}^{p,q}+D_r^{p,q}}{\mathcal{B}_r^{p,q}+D_r^{p,q}} \simeq \dfrac{\operatorname{Ker} d_r}{\operatorname{Im} d_r} \end{array}$$

Il se trouve que $\operatorname{Ker}\pi = \mathcal{B}_r^{p,q} + \mathcal{Z}_r^{p+1,\,q-1}$ (cf ci-dessous pour la justification). Ainsi, la surjection canonique $\pi$ fournit l'isomorphisme

$$\frac{\mathcal{Z}_{r+1}^{p,q}}{\mathcal{B}_r^{p,q}+\mathcal{Z}_r^{p+1,\,q-1}} \;\simeq\; \mathrm{H}^{p,q}(E_r^{\bullet,\bullet})$$

ce qui s'écrit encore $E_{r+1}^{p,q} \simeq \mathrm{H}^{p,q}(E_r^{\bullet,\bullet})$.

Détermination de $\operatorname{Ker}\pi$ : par définition, $\operatorname{Ker}\pi = \mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} \cap \big(\mathcal{B}_r^{p,q} + D_r^{p,q}\big)$. Puis, en utilisant que $D_r^{p,q} = \mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1} + \mathcal{B}_{r-1}^{p,q}$ et le fait que $\mathcal{B}_{r-1}^{p,q} \subset \mathcal{B}_r^{p,q}$, on tombe sur $\operatorname{Ker}\pi = \mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} \cap \big(\mathcal{B}_r^{p,q} + \mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1}\big)$. Comme $\mathcal{B}_r^{p,q} \subset \mathcal{Z}_{r+1}^{p,q}$, on obtient $\operatorname{Ker}\pi \overset{\clubsuit}{=} \mathcal{B}_r^{p,q} + \mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} \cap \mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1}$. Maintenant, il n'est pas difficile de voir que l'intersection $\mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} \cap \mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1}$ est incluse dans $\mathcal{F}_{p+1}(T^n)$ et est caractérisée par le fait que son image par $d$ est dans $\mathcal{F}_{p+r+1}(T^{n+1}) \cap \mathcal{F}_{p+r}(T^{n+1}) = \mathcal{F}_{p+r+1}(T^{n+1})$. Bref, l'intersection $\mathcal{Z}_{r+1}^{p,q} \cap \mathcal{Z}_{r-1}^{p+1,\,q-1}$ est égale à $\mathcal{Z}_r^{p+1,\,q-1}$. L'égalité $\clubsuit$ s'écrit alors $\operatorname{Ker}\pi = \mathcal{B}_r^{p,q} + \mathcal{Z}_r^{p+1,\,q-1}$.

▷ On va montrer que $E_\infty^{p,q} \simeq \dfrac{\mathcal{F}_p(\mathrm{H}^n)}{\mathcal{F}_{p+1}(\mathrm{H}^n)}$ où $E_\infty^{p,q} = \dfrac{\mathcal{Z}_\infty^{p,q}}{\mathcal{Z}_\infty^{p+1,\,q-1}+\mathcal{B}_\infty^{p,q}}$ et $\mathrm{H}^n = \mathrm{H}^n(T^\bullet) = Z^n/B^n$.

On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_\infty^{p,q} = \mathcal{F}_p(Z^n) & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}_p(\mathrm{H}^n) \\ & \searrow^{\pi_\infty^{p,q}} & \downarrow \\ & & \dfrac{\mathcal{F}_p(\mathrm{H}^n)}{\mathcal{F}_{p+1}(\mathrm{H}^n)} \end{array}$$

Nous allons montrer que $\operatorname{Ker}\pi_\infty^{p,q} = \mathcal{Z}_\infty^{p+1,\,q-1} + \mathcal{B}_\infty^{p,q}$. Le module $\mathcal{F}_p(\mathrm{H}^n)$, en tant que sous-module de $\mathrm{H}^n$, s'écrit $N_p/B^n$ où $N_p = \mathcal{F}_p(Z^n) + B^n$. Ainsi,

$$\frac{\mathcal{F}_p(\mathrm{H}^n)}{\mathcal{F}_{p+1}(\mathrm{H}^n)} = \frac{\mathcal{F}_p(Z^n)+B^n}{\mathcal{F}_{p+1}(Z^n)+B^n}$$

Il est maintenant clair que $\operatorname{Ker}\pi_\infty^{p,q} = \mathcal{F}_p(Z^n) \cap \big(\mathcal{F}_{p+1}(Z^n) + B^n\big)$. Comme $\mathcal{F}_{p+1}(Z^n) \subset \mathcal{F}_p(Z^n)$, ce noyau est égal à $\mathcal{F}_{p+1}(Z^n) + \mathcal{F}_p(B^n) = \mathcal{Z}_\infty^{p+1,q-1} + \mathcal{B}_\infty^{p,q}$.

Finalement, la surjection canonique $\operatorname{Ker}\pi_\infty^{p,q}$ fournit l'isomorphisme :

$$\frac{\mathcal{Z}_\infty^{p,q}}{\mathcal{Z}_\infty^{p+1,\,q-1}+\mathcal{B}_\infty^{p,q}} \;\simeq\; \frac{\mathcal{F}_p(\mathrm{H}^n)}{\mathcal{F}_{p+1}(\mathrm{H}^n)}$$

## 8.2 Column/Row-collapsing dans le cas général

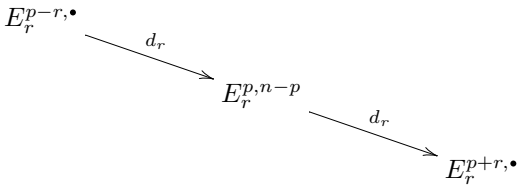
**Proposition 8.1** (Column-collapsing)**.** *Soit $r \geqslant 1$ un indice de page pour $E$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un indice de diagonale pour $E_r$. Soit $p \in \mathbb{N}$ un indice de colonne pour $E_r$.*

▷ *Si la diagonale $n$ de $E_r$ est nulle sauf à la colonne $p$, alors $E_\infty^{p,n-p} \simeq \mathrm{H}^n(T^\bullet)$.*

▷ *On a $E_r^{p,n-p} = E_\infty^{p,n-p}$ pourvu que $E_r^{i,j} = 0$ pour $(i,j)$ tels que :* $\left\{ \begin{array}{l} i+j = n-1 \text{ et } i \leqslant p-r \\ i+j = n+1 \text{ et } i \geqslant p+r \end{array} \right.$

*En particulier, si la suite spectrale collapse à la colonne $p$ de la page $r \geqslant 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $E_r^{p,n-p} \simeq \mathrm{H}^n(T^\bullet)$.*

***Preuve.*** Le premier point résulte du lemme 6.1. Pour le deuxième point, examinons ce qui se passe de part et d'autre de $E_r^{p,n-p}$. On est dans la situation suivante (on désigne volontairement les exposants inutiles pour la preuve par un $\bullet$) :




Le terme $E_r^{p-r,\bullet}$, situé sur la diagonale $n-1$, est nul par hypothèse. Il en est de même du terme $E_r^{p+r,\bullet}$ situé sur la diagonale $n+1$. Par conséquent, $0 \xrightarrow{d_r} E_r^{p,n-p} \xrightarrow{d_r} 0$ d'où $E_{r+1}^{p,n-p} = E_r^{p,n-p}$. On peut reproduire ce raisonnement à la page $r+1$, les mêmes hypothèses étant vérifiées : on obtient $E_{r+2}^{p,n-p} = E_{r+1}^{p,n-p}$. Et ainsi de suite... □

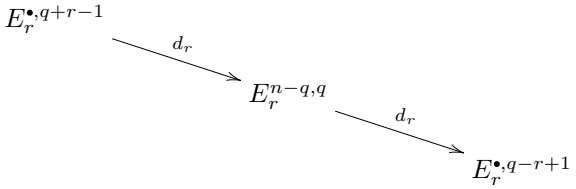
**Proposition 8.2** (Row-collapsing)**.** *Soit $r \geqslant 2$ un indice de page pour $E$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un indice de diagonale pour $E_r$. Soit $q \in \mathbb{N}$ un indice de ligne pour $E_r$.*

*▷ Si la diagonale $n$ de $E_r$ est nulle sauf à la ligne $q$, alors $E_\infty^{n-q,q} \simeq \mathrm{H}^n(T^\bullet)$.*

*▷ On a $E_r^{n-q,q} = E_\infty^{n-q,q}$ pourvu que $E_r^{i,j} = 0$ pour $(i,j)$ tels que :* $\begin{cases} i+j = n-1 \text{ et } j \geqslant q+r-1 \\ i+j = n+1 \text{ et } j \leqslant q-r+1 \end{cases}$

*En particulier, si la suite spectrale collapse à la ligne $q$ de la page $r \geqslant 2$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $E_r^{n-q,q} \simeq \mathrm{H}^n(T^\bullet)$.*

***Preuve.*** Le premier point résulte du lemme 6.1. Pour le deuxième point, examinons ce qui se passe de part et d'autre de $E_r^{n-q,q}$. On est dans la situation suivante (on désigne volontairement les exposants inutiles pour la preuve par un $\bullet$) :




Le terme $E_r^{\bullet,q+r-1}$, situé sur la diagonale $n-1$, est nul d'après l'hypothèse. Il en est de même du terme $E_r^{\bullet,q-r+1}$ situé sur la diagonale $n+1$. Par conséquent, $0 \xrightarrow{d_r} E_r^{n-q,q} \xrightarrow{d_r} 0$ d'où $E_{r+1}^{n-q,q} = E_r^{n-q,q}$. On peut reproduire ce raisonnement à la page $r+1$, les mêmes hypothèses étant vérifiées : on obtient $E_{r+2}^{n-q,q} = E_{r+1}^{n-q,q}$. Et ainsi de suite... □

## 8.3 Un dernier énoncé

Dans la proposition suivante, on renforce le sens direct de la proposition 6.2.

**Proposition 8.3.** *Soit $r$ un indice de page. Notons $\mathfrak{c}_{pq} = \operatorname{Ann} E_r^{p,q}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathfrak{c}_{n,0}\,\mathfrak{c}_{n-1,1} \cdots \mathfrak{c}_{0,n}\,\mathrm{H}^n(T^\bullet) = 0$$

***Preuve.*** Par définition, on a $\mathfrak{c}_{p,q} E_r^{p,q} = 0$. A fortiori, on a $\mathfrak{c}_{p,q} E_\infty^{p,q} = 0$ car $E_\infty^{p,q}$ est un sous-quotient de $E_r^{p,q}$. En notant $n = p+q$, cela se traduit par $\mathfrak{c}_{p,q}\,\mathcal{F}_p(\mathrm{H}^n) \subset \mathcal{F}_{p+1}(\mathrm{H}^n)$. En notant que $\mathcal{F}_0(\mathrm{H}^n) = \mathrm{H}^n$ et que $\mathcal{F}_{n+1}(\mathrm{H}^n) = 0$, on obtient le résultat. □

On énonce maintenant un résultat qui couvre ceux concernant les bicomplexes Koszul-Čech et Čech-Čech. Ce résultat est inspiré de [Str90, theorem 7.3.2, p. 130].

**Proposition 8.4.** *Soit $\underline{a}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. Soit $K^\bullet$ un complexe borné de $\mathbf{A}$-modules tel que $\langle \underline{a} \rangle \subset \sqrt{\mathrm{Ann}\big(\mathrm{H}^p(K^\bullet)\big)}$ pour tout $p$. En notant $\mathfrak{c}_{pq} = \mathrm{Ann}\, \check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}(K^p)$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathfrak{c}_{k,0}\, \mathfrak{c}_{k-1,1} \cdots \mathfrak{c}_{0,k}\ \mathrm{H}^k(K^\bullet) \ = \ 0$$

***Preuve.*** On considère le bicomplexe $K^p \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{a}}(\mathbf{A})$ montant concentré dans le premier quadrant.

▷ Analyse de la direction horizontale : on a $\underset{\rightarrow}{E}{}_1^{p,q} = \mathrm{H}^p(K^\bullet) \otimes \check{\mathrm{C}}^q_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = \bigoplus_\pi \mathrm{H}^p(K^\bullet)_\pi$ où $\pi$ parcourt tous les produits de $q$ éléments de $a_\ell$. L'hypothèse $\langle \underline{a} \rangle \subset \sqrt{\mathrm{Ann}\big(\mathrm{H}^p(K^\bullet)\big)}$ implique que pour tout $q \geqslant 1$, on a $\underset{\rightarrow}{E}{}_1^{p,q} = 0$. Pour $q = 0$, on a $\underset{\rightarrow}{E}{}_1^{p,0} = \mathrm{H}^p(K^\bullet)$. La proposition 6.3 adaptée à la direction horizontale fournit $\mathrm{H}^p(T^\bullet) \simeq \mathrm{H}^p(K^\bullet)$.

▷ Analyse de la direction verticale : on a ${}\uparrow\!E_1^{p,q} = \check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}(K^p)$. On a exactement $\mathfrak{c}_{p,q} = \mathrm{Ann}\, {}\uparrow\!E_1^{p,q}$. On peut appliquer le lemme précédent et on obtient $\mathfrak{c}_{k,0}\, \mathfrak{c}_{k-1,1} \cdots \mathfrak{c}_{0,k}\ \mathrm{H}^k(T^\bullet) = 0$ □

Comme annoncé, on peut par exemple appliquer cette proposition en prenant pour $K^\bullet$ le complexe de Koszul de $\underline{a}$ sur un module $M$. Voyons alors comment retrouver le fait que Čech-profondeur $\leqslant$ Koszul-profondeur. Tout d'abord, on a $\check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}(K^p) = \check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}(\mathrm{K}^p(\underline{a}\,;\mathbf{A}) \otimes M) = \check{\mathrm{H}}^q_{\underline{a}}(M)^e$ où $e = \binom{n}{p}$. Ainsi si $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ pour tout $i < k$ alors $1 \in \mathfrak{c}_{pq}$ pour tout $p$ et pour tout $q < k$. La proposition permet donc d'en déduire que $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$ pour tout $i < k$.

# Chapitre V

# Profondeur et Régularité

Dans ce chapitre, nous abordons quelques points relatifs au fondement de la profondeur ainsi que les diverses notions de régularité que l'on peut trouver dans la littérature pour une suite de scalaires. À toutes fins utiles, nous rassemblons ces notions de régularité dans l'appendice B.

## 1 Un bref historique sur la profondeur

Nous souhaitons ici rassembler les diverses approches de la profondeur trouvées dans la littérature. Il ne s'agit pas d'en faire une présentation exhaustive et chronologique, mais il semble intéressant d'en faire un rapide tour d'horizon.

L'une des notions centrales de la thèse est la notion de profondeur, fondamentale en algèbre commutative. Par exemple, elle intervient de manière décisive dans la théorie des résolutions libres finies. Il est donc moral et normal de vouloir en donner un traitement accessible à tous en tâchant de la faire reposer sur des notions élémentaires.

En quoi consiste la profondeur ? Pour un idéal $\mathfrak{a}$ de type fini et un $\mathbf{A}$-module $M$, il s'agit de mesurer la régularité de $\mathfrak{a}$ vis-à-vis de $M$. Grosso modo, la profondeur de $M$ relativement à[1] $\mathfrak{a}$ est la longueur maximale d'une suite $M$-régulière formée d'éléments de $\mathfrak{a}$. Ceci n'est qu'une définition heuristique et approximative. Mais cette vision de la profondeur est en fait au coeur du débat : une fois ajustée et affinée, elle donne naissance au « polynomial grade » de Hochster (cf. *Grade-sensitive modules and perfect modules*, 1972) popularisé par Northcott dans son livre *Finite free resolutions*.

En Géométrie Algébrique, la définition de la profondeur la plus répandue est la suivante :

> *La profondeur d'un module $M$ sur un anneau local est la longueur maximale des suites $M$-régulières contenues dans l'idéal maximal.*

Elle est souvent utilisée pour caractériser les anneaux locaux noethériens dits réguliers (l'idéal maximal est engendré par une suite régulière) et de Cohen-Macaulay (l'idéal maximal est radicalement engendré par une suite régulière). D'ailleurs, Hartshorne (cf. chap. II, p. 184) termine son petit paragraphe sur les *regular sequence* et la *depth* en disant : « these definitions apply to a ring itself, and we say that a local noetherian ring $A$ is Cohen-Macaulay if $\operatorname{depth}(A) = \dim(A)$ ». Très souvent, en Géométrie Algébrique, la profondeur de $M$ est d'abord définie *relativement à l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$.

Cette définition paraît effrayante car, a priori, elle demande d'examiner toutes les suites régulières. En fait, pour un module de type fini sur un anneau noethérien, et pour un idéal $\mathfrak{a}$, il s'avère que toutes les suites $M$-régulières maximales formées d'éléments de $\mathfrak{a}$ ont même longueur. Cette longueur est un entier pourvu que $\mathfrak{a}M \neq M$. C'est à Rees que l'on doit se résultat. Il obtient en fait une caractérisation homologique de cette quantité via :

$$\operatorname{depth}(\mathfrak{a}, M) \;=\; \min\{i \mid \operatorname{Ext}^i(\mathbf{A}/\mathfrak{a},\, M) \neq 0\}$$

et il est d'usage de convenir que cette quantité vaut $\infty$ si $\mathfrak{a}M = M$. Pour plus de détails, on peut consulter la section 1.2 et notamment le théorème 1.2.5 de [BH98], ou encore [Mat89, Theorem 16.7] et [Str90,

1. On se permettra de dire également « profondeur de $\mathfrak{a}$ relativement à $M$ », en étant conscient que l'on s'éloigne alors de la terminologie de Bourbaki.

section 5.3.9, p. 90]. C'est sûrement ce théorème de Rees qui incite les auteurs à définir la profondeur à l'aide du foncteur Ext.

J'évoquais à l'instant les ouvrages de Géométrie Algébrique qui définissent la profondeur d'un module *sur un anneau local*, sous entendu la profondeur de l'idéal maximal relativement au module. C'est le cas chez Hartshorne. Mais ce dernier n'oublie pas de généraliser la notion à n'importe quel idéal $\mathfrak{a}$ et de mentionner (cf. [Har77, ex. 3.4, p. 217]) l'approche de Grothendieck via la cohomologie locale ! Même si cette approche a aussi des « défauts » (dans le sens où elle n'est intéressante qu'en terrain noethérien), sa formulation a le mérite de ne pas introduire de négation (il n'est ni question d'un min, ni question de $\mathfrak{a}M \neq M$) :

> *1. Assume that $A$ is noetherian. Show that if* $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}}(M) \geqslant 1$*, then* $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$*, and the converse is true if $M$ is finitely generated.*
> *2. Show inductively, for $M$ finitely generated, that for any $n \geqslant 0$, the following conditions are equivalent :*
> *(i)* $\operatorname{depth}_{\mathfrak{a}}(M) \geqslant n$
> *(ii)* $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ *for all* $i < n$

A présent, essayons de donner un petit historique concernant les suites régulières en terrain noethérien. L'un des premiers résultats est sans doute celui de Jean-Pierre Serre [Ser56] dans son exposé *Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens* 1955. Visiblement, il s'appuie sur un papier de la même année de Auslander et Buchsbaum, *Homological dimension in noetherian rings*. Le résultat en question de l'exposé de Serre (dans lequel tous les anneaux sont supposés commutatifs, noethériens à élément unité et les modules de type fini) est le théorème 2 : « *Soit $A$ un anneau local. Si $E$ est un $A$-module $\neq 0$, toutes les $E$-suites maximales ont même longueur* ». A ce sujet, Serre ajoute en remarque : « *Il serait intéressant de trouver une démonstration directe du th. 2, n'utilisant ni les théorèmes de structure de Cohen, ni la notion de dimension homologique* ».

A la même époque, Northcott et Rees (cf. theorem 1.4. de *Extensions and Simplifications of the Theory of Regular Local Rings*, 1957) s'occupent également du même résultat mais sans supposer l'anneau local. Ils fournissent une démonstration élémentaire[2] rapportée par Kaplansky dans son *Commutative Rings*. Nous avons déjà signalé le traitement purement homologique s'appuyant sur le foncteur Ext dû à Rees (cf. *A theorem of homological algebra*, 1956 et *The grade of an ideal or module*, 1957).

Incontestablement, les suites régulières ont joué et jouent un rôle primordial dans la théorie de la profondeur. Cependant, ce traitement de la profondeur par les suites régulières présente quelques défauts. Un premier phénomène désagréable : une suite régulière ne reste pas forcément régulière après permutation de ses termes (c'est cependant le cas si la suite est dans le maximal d'un anneau local noethérien). Il y a le célèbre exemple de $\mathbf{k}[X, Y, Z]$ : la suite $\big(X(Y-1),\ Y,\ Z(Y-1)\big)$ est régulière (et engendre l'idéal $\langle X, Y, Z\rangle$) mais elle ne l'est plus si on permute les deux derniers termes. Cet exemple, non exotique, montre qu'il faut être vigilant lorsque l'on manie les suites régulières. Dieudonné mentionnait également dans son papier *On regular sequences* (1966) [Die66] un exemple de suite non-commutativement régulière dans le maximal d'un anneau local (nécessairement non noethérien). Et il terminait en disant : « *Such unpleasant phenomena greatly reduce the usefulness of the notion of regular sequence* ».

Un deuxième défaut, majeur, est que toute cette théorie se généralise mal lorsque l'on enlève l'hypothèse noethérienne. En effet, la plupart des résultats reposent sur l'utilisation du spectre premier qui a un comportement sympathique en terrain noethérien (lemme d'évitement, théorème de l'idéal principal de Krull, idéaux premiers associés...). En supprimant l'hypothèse noethérienne, les ennuis arrivent bien vite. Difficile, par exemple, de monter la première marche : dire que $\operatorname{Ext}^0(\mathbf{A}/\mathfrak{a}, M) = 0$ ne signifie pas, en terrain non-noethérien, que $\mathfrak{a}$ contient un élément $M$-régulier (voir l'exemple du chapitre 5 de Northcott après le théorème 12). Certes $\mathfrak{a}$ ne contient pas d'élément régulier, mais il en existe quand même un, caché, qui se manifeste après extension polynomiale. C'est ce qui va conduire Northcott à parler de « latent regular element ». Laissons-lui la parole : « *it turns out that, by adjoining indeterminates, a non-zerodivisor can be made to appear almost as if by magic* ». Ce résultat (pas si magique que cela ? !), dû à McCoy, est à la base de la théorie non-noethérienne de la profondeur. C'est en tout cas ce que semble indiquer Northcott en terminant son introduction : « *What is important is that this line of thought will enable us to develop the theory of grade in a form which dispenses completely with Noetherian conditions and which is sufficiently rich in results for our various purposes* ».

2. Eisenbud dit à ce sujet : « an elementary treatment at the expense of a certain ingenuity ».

## 2 Différentes mesures de la profondeur

Après avoir fait un petit tour sur les aspects historiques, rassemblons diverses mesures de la profondeur en terrain non-noethérien bien sûr. Nous signalons, dans les définitions adoptées, qu'aucune ne sera basée sur quelque chose du type « le plus petit entier tel que ceci est non nul ». On préfèrera définir l'assertion « la profondeur est supérieure à $k$ si ... ».

Il faut sans aucun doute commencer par citer le *polynomial grade* ou *true grade* introduit [3] dans la thèse de Barger (soutenue en 1970, sous la direction de Eagon) et développé par Hochster dans son papier *Grade-sensitive and perfect modules*, 1972. Cette approche a été exploitée par Northcott dans son livre *Finite free resolutions* afin de généraliser la théorie de la profondeur au cas non-noethérien.

Pour faire simple, le true grade se distingue du « classical grade » par l'ajout d'indéterminées. La différence entre ces deux mesures est donc à la fois colossale et infime ! Colossale, car c'est l'ajout d'indéterminées qui permet d'obtenir un élément régulier dans un idéal fidèle. Infime, car les deux notions sont définies à partir des suites régulières. Mais quand on opte pour le true grade, « y'a intérêt d'avoir avec soi » le lemme de McCoy :

> *Si* $\mathfrak{a} = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ *est d'annulateur nul alors l'élément* $a_0X_0 + \cdots + a_nX_n$ *est régulier dans* $\mathbf{A}[X_0, \dots, X_n]$*, ou encore l'élément* $a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ *est régulier dans* $\mathbf{A}[X]$.

Pour un idéal $\mathfrak{a}$ de type fini et un module $M$, on note $\text{T-Gr}(\mathfrak{a}\,;M) \geqslant k$ lorsqu'il existe une suite $M$-régulière dans $\mathfrak{a}$ de longueur $k$, éventuellement après une extension polynomiale des scalaires. Et ce qui est formidable, c'est qu'on n'a pas à la chercher ! Elle arrive toute seule, « comme par magie », dirait Northcott ! Supposons par exemple que $\mathfrak{a} = \langle a, b, c \rangle$, et posons $f(X) = a + bX + cX^2$ ; dire que $\text{T-Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \geqslant 2$ équivaut à dire que la suite $\big(f(X), f(Y)\big)$ est régulière dans $\mathbf{A}[X, Y]$. On touche ici à l'aspect récursif de la profondeur : si $b$ est un élément $M$-régulier de $\mathfrak{a}$, alors pour tout entier $k$, on doit avoir l'équivalence $\text{T-Gr}(\mathfrak{a}\,;M) \geqslant k+1 \Leftrightarrow \text{T-Gr}(\mathfrak{a}\,;M/bM) \geqslant k$. Ce qui justifie cette approche récursive est la possibilité, voire l'obligation, d'étendre les scalaires de manière polynomiale.

Viennent ensuite deux caractérisations relativement similaires puisque basées sur l'annulation de la cohomologie de certains complexes algébriques. Il s'agit de la « Koszul-profondeur » et de la « Čech-profondeur » définies à partir d'un système générateur $\underline{a}$ de l'idéal $\mathfrak{a}$ (on verra en temps utile que l'on peut remplacer $\underline{a}$ par n'importe quel autre système générateur, et donc la définition est licite) :

$$\text{K-Gr}(\mathfrak{a}\,;M) \geqslant k \quad \Longleftrightarrow \quad \text{H}^i(\underline{a}\,;M) = 0, \quad \forall\, i < k$$

et

$$\check{\text{C}}\text{-Gr}(\mathfrak{a}\,;M) \geqslant k \quad \Longleftrightarrow \quad \check{\text{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0, \quad \forall\, i < k$$

Terminons avec une caractérisation purement homologique, initialement introduite par Rees en terrain noethérien, et adoptée par Bourbaki comme définition de la profondeur ! Il s'agit de la « Ext-profondeur » définie par

$$\text{E-Gr}(\mathfrak{a}\,;M) \geqslant k \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Ext}^i(\mathbf{A}/\mathfrak{a}\,;M) = 0, \quad \forall\, i < k$$

Dans cette thèse, nous privilégierons la définition de la profondeur basée sur le complexe de Koszul. Parfois elle sera épaulée par celle définie à partir du complexe de Čech. Ces deux approches sont raisonnables dans le sens où les objets qu'elles mettent en jeu sont totalement élémentaires : il s'agit de complexes algébriques dont on prend la cohomologie. Quand nous écrirons $\text{Gr}(\underline{a}\,;M) \geqslant k$, il faudra donc comprendre $\text{H}^i(\underline{a}\,;M) = 0$ pour tout $i < k$. Nous verrons cependant qu'il est indispensable de disposer des diverses caractérisations de la profondeur. Nous nous proposons donc d'assurer l'équivalence entre ces diverses approches de la profondeur. Les équivalences T-Gr $\Leftrightarrow$ K-Gr et T-Gr $\Leftrightarrow$ Č-Gr sont du même acabit et reposent sur le fait que les complexes de Koszul et de Čech sont compatibles avec les extensions polynomiales des scalaires. L'équivalence K-Gr $\Leftrightarrow$ Č-Gr est essentiellement basée sur l'utilisation du bicomplexe Koszul-Čech. Enfin nous ferons reposer les équivalences E-Gr $\Leftrightarrow$ K-Gr sur une version personnelle d'un lemme d'acyclicité type Peskine-Szpiro. Mentionnons au passage que l'équivalence directe T-Gr $\Leftrightarrow$ E-Gr n'est pas évidente a priori.

3. On peut lire toute cette information dans le « Book reviews » rédigé par Hochster à propos du livre *Finite free resolutions* de Northcott. Je cite : « A non-Noetherian theory of grade was introduced in [3] and studied in [8] » où [3] est justement la thèse de Barger et [8], l'article de Hochster *Grade-sensitive and perfect modules*.

## 2.1 True-grade et Koszul-profondeur

L'équivalence entre le true grade et la Koszul-profondeur est quasiment immédiate une fois que l'on a noté que le complexe de Koszul est invariant par extension polynomiale. C'est cette définition de la profondeur qui sera utilisé dans le théorème de Jouanolou (cf. chapitre VII, section 1) ainsi que dans la preuve du théorème de Buchsbaum-Eisenbud qui figure dans [CQ12, Theorem 6.8, Corollary 7.5].

## 2.2 Koszul-profondeur et Čech-profondeur

**Proposition 2.1** (cf. [CJR13]). *Soit $\underline{a}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$ et $M$ un $\mathbf{A}$-module. Pour tout entier $k$, on a*

$$\forall\, i < k, \quad \mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, i < k, \quad \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) \;=\; 0$$

***Preuve.*** Le sens $\Leftarrow$, qui traduit l'inégalité « Čech-profondeur $\leqslant$ Koszul-profondeur », est traité dans la proposition IV-4.1. Le sens $\Rightarrow$ peut être établi directement en utilisant le fait que le complexe de Čech est une limite de complexes de Koszul. Une preuve plus savante se trouve à la proposition IV-7.3. □

## 2.3 Koszul-profondeur et Ext-profondeur

Dans cette thèse, nous n'utilisons pas la caractérisation de la profondeur par le foncteur Ext. Cependant, dans son chapitre X d'Algèbre Commutative, Bourbaki fonde la notion de profondeur sur ce foncteur Ext. Nous tenons donc à assurer nous-mêmes l'équivalence entre la Ext-profondeur et la Koszul-profondeur, bien que Bourbaki ait lui-même pris en charge cette équivalence dans le théorème 1 du numéro 3 intitulé « Profondeur et complexe de Koszul ». La démonstration que nous proposons ne contient pas de raisonnement par l'absurde (comme c'est le cas chez Bourbaki). Elle repose sur le lemme d'acyclicité de Peskine-Szpiro, reformulé par nos soins grâce à une analyse précise de la preuve et de l'énoncé qui sont habituellement entâchés de négations. Pour cela, nous nous sommes inspirés de l'article [CQ12].

Pour une suite $\underline{a}$ de scalaires et un $\mathbf{A}$-module $M$, nous allons donc montrer l'équivalence entre la nullité des $k$ premiers modules de cohomologie de Koszul $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M)$ et celle des $k$ premiers modules $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle, M)$ pour $i < k$, et ceci en terrain quelconque et pas seulement noethérien (comme la plupart des auteurs). Afin de réaliser cette comparaison de la manière la plus simple et efficace possible, nous allons abstraire la nullité des $k$ premiers modules en introduisant (de manière très provisoire) la notion de prédicat ci-dessous.

On dispose d'un prédicat $\mathrm{Pr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$ qui porte sur les suites finies $\underline{a}$ d'éléments de $\mathbf{A}$, les $\mathbf{A}$-modules $M$ et les $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Il obéit à deux règles :

(I) $\mathrm{Pr}(\underline{a}\,; M) \geqslant 1 \iff (0 : \underline{a})_M = 0$

(II) Pour une suite exacte $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$, si $\mathrm{Pr}(\underline{a}\,; E') \geqslant k+1$ et $\mathrm{Pr}(\underline{a}\,; E) \geqslant k$ alors $\mathrm{Pr}(\underline{a}\,; E'') \geqslant k$.

À ces deux règles, il est bon d'ajouter l'égalité $\mathrm{Pr}(\underline{a}\,; 0) = \infty$.

Bien sûr, on a choisi la notation Pr pour *Prédicat*, mais aussi (et surtout ? !) pour *Profondeur* ; mais en aucun cas, ce prédicat ne constitue une axiomatisation de la Profondeur. Voici des instances classiques pour $\mathrm{Pr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$ :

▷ avec le foncteur Ext : $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle, M) = 0,\ \forall\, i < k$

▷ avec la cohomologie de Koszul : $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0,\ \forall\, i < k$

▷ avec la cohomologie de Čech : $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0,\ \forall\, i < k$

Dans ce qui suit, nous ferons uniquement jouer à Pr les rôles de E-Gr et K-Gr.

Quelques justifications. Le foncteur Ext vérifie (I) car $\mathrm{Ext}^0(\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle, M) = \mathrm{Hom}(\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle, M)$ s'identifie à $\{x \in M \mid \underline{a}x = 0\} = (0 : \underline{a})_M$. Le fait qu'il vérifie (II) découle de la longue suite exacte

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle, E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle, E'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle, E') \longrightarrow \cdots$$

La vérification des règles (I) et (II) pour les cohomologies de Koszul et de Čech repose sur le même principe. Dans les deux cas, le $\mathrm{H}^0$ est bien identifié et sa nullité équivaut à celle de $(0 : \underline{a})_M$. Et une suite

exacte courte $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ donne naissance à une longue suite exacte en cohomologie ce qui assure (II).

Dans la suite, on privilégie les complexes descendants (bien entendu, les énoncés avec des complexes montants sont analogues). On notera $B_j = \operatorname{Im} d_{j+1}$ et $Z_j = \operatorname{Ker} d_j$ de sorte que $B_j$ et $Z_j$ vivent dans $C_j$.

Pour un $\mathbf{A}$-module $E$, il sera commode d'écrire $E_{\underline{a}} = 0$ à la place de « $E_{a_i} = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ ».

**Remarque 2.2.** Soient $E$ et $F$ deux modules.

(*i*) Si $E \subset F$ alors $(0 : \underline{a})_E \subset (0 : \underline{a})_F$.

(*ii*) Par ailleurs, si $E \subset F$ alors $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; F) \geqslant 1 \Rightarrow \operatorname{Pr}(\underline{a}\,; E) \geqslant 1$.
En effet, $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; F) \geqslant 1$ implique $(0 : \underline{a})_F = 0$ d'après le sens $\Rightarrow$ de la règle (I). Le point (*i*) précédent fournit alors $(0 : \underline{a})_E = 0$. Et le sens $\Leftarrow$ de la règle (I) donne $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; E) \geqslant 1$.

(*iii*) Si $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; E) \geqslant 1$ et $\underline{a}E = 0$ alors $E = 0$. En effet, les hypothèses se reformulent en $(0 : \underline{a})_E = 0$ et $(0 : \underline{a})_E = E$. D'où la conclusion !

(*iv*) Si $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; E) \geqslant 1$ et $E_{\underline{a}} = 0$ alors $E = 0$. Soit $x \in E$, il existe un exposant $N \in \mathbb{N}$ tel que $\langle \underline{a} \rangle^N x = 0$. Chaque élément de $\langle \underline{a} \rangle^{N-1} x$ est annulé par tout $a_i$ et comme $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; E) \geqslant 1$, on a $\langle \underline{a} \rangle^{N-1} x = 0$. Par récurrence, on obtient $x = 0$.

### Un lemme d'acyclicité de type Peskine-Szpiro

Dans les hypothèses du lemme et de la proposition qui suivent, on peut supposer $j \leqslant m$ car au-delà, les hypothèses sont trivialement vérifiées.

**Lemme 2.3.** *Soit $m \geqslant 1$ et $\underline{a}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. On considère un entier $k \geqslant 1$ et un complexe de $\mathbf{A}$-modules :*

$$0 \longrightarrow C_m \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_{k+1} \longrightarrow C_k \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0$$

*Si $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; C_j) \geqslant j$ pour tout $j \geqslant 1$ et $\mathrm{H}_j(C) = 0$ pour tout $j \geqslant k+1$ alors*
*1. $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; B_j) \geqslant j+1$ pour tout $j \geqslant k$*
*2. $\operatorname{Pr}\big(\underline{a}\,; \mathrm{H}_k(C)\big) \geqslant 1$*

***Preuve.*** Attaquons-nous au point 1. Soit $j \geqslant k$.

▷ Pour $j \geqslant m$, on a $B_j = 0$. On a la conclusion car $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; 0) = \infty$.

▷ Prenons maintenant $j = m-1$. On veut montrer que $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; B_{m-1}) \geqslant m$. Comme $\mathrm{H}_m(C) = 0$, on a $C_m \simeq B_{m-1}$ donc $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; C_m) \geqslant m$ implique $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; B_{m-1}) \geqslant m$.

▷ Supposons avoir établi le résultat pour $j+1$, *i.e.* $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; B_{j+1}) \geqslant j+2$ et montrons le pour $j$ *i.e.* $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; B_j) \geqslant j+1$. On écrit

$$0 \longrightarrow B_{j+1} \lhook\joinrel\longrightarrow C_{j+1} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow B_j \longrightarrow 0$$

A gauche l'injection naturelle, à droite la surjection naturelle. Au centre, c'est exact grâce à l'hypothèse $\mathrm{H}_{j+1}(C) = 0$ (car $j \geqslant k$). D'après la règle (II), on obtient $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; B_j) \geqslant j+1$.

Pour démontrer le point 2, on utilise la suite exacte (qui est exacte par définition) :

$$0 \longrightarrow B_k \lhook\joinrel\longrightarrow Z_k \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{H}_k(C) \longrightarrow 0$$

On a $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; B_k) \geqslant k+1$ d'après le point 1. A fortiori $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; B_k) \geqslant 2$ car $k \geqslant 1$. Par ailleurs, $Z_k \subset C_k$ et $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; C_k) \geqslant k \geqslant 1$ donc le point (*ii*) de la remarque fournit $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; Z_k) \geqslant 1$. Enfin, grâce à la règle (II), on obtient $\operatorname{Pr}\big(\underline{a}\,; \mathrm{H}_k(C)\big) \geqslant 1$. □

**Proposition 2.4.** *Soit $m \geqslant 1$. Soit $\underline{a}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$ et un complexe de $\mathbf{A}$-modules :*

$$0 \longrightarrow C_m \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow C_0$$

*Si $\operatorname{Pr}(\underline{a}\,; C_j) \geqslant j$ et $\mathrm{H}_j(C)_{\underline{a}} = 0$ pour tout $j \geqslant 1$, alors $\mathrm{H}_j(C) = 0$ pour tout $j \geqslant 1$.*

***Preuve.*** On va tuer $\mathrm{H}_k(C)$ pour tout $k \geqslant 1$.

$\triangleright$ Pour $k = m$. Comme $\mathrm{Pr}(\underline{a}\,; C_m) \geqslant m \geqslant 1$ et $\mathrm{H}_m(C) \subset C_m$, le point $(ii)$ de la remarque permet de dire que $\mathrm{Pr}\big(\underline{a}\,; \mathrm{H}_m(C)\big) \geqslant 1$. Cette dernière condition ajoutée à $\mathrm{H}_m(C)_{\underline{a}} = 0$ force $\mathrm{H}_m(C) = 0$ (cf. le point $(iv)$ de la remarque).

$\triangleright$ Supposons avoir montré que $\mathrm{H}_m(C) = \cdots = \mathrm{H}_{k+1}(C) = 0$ et montrons que $\mathrm{H}_k(C) = 0$. On est donc dans la situation du lemme qui affirme que $\mathrm{Pr}\big(\underline{a}\,; \mathrm{H}_k(C)\big) \geqslant 1$. Comme $\mathrm{H}_k(C)_{\underline{a}} = 0$, on obtient $\mathrm{H}_k(C) = 0$ toujours d'après le point $(iv)$ de la remarque. □

**L'équivalence** E-Gr $\Leftrightarrow$ K-Gr

La proposition précédente va nous permettre de montrer à peu de frais l'équivalence entre la Ext-profondeur et la Koszul-profondeur. Tout d'abord, on établit que Ext-profondeur $\leqslant$ Koszul-profondeur.

**Proposition 2.5.** *Soit $k \in \mathbb{N}$. On a l'implication* $\text{E-Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k \;\Rightarrow\; \text{K-Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$. *Autrement dit, si* $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle, M) = 0$ *pour tout* $i < k$ *alors* $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$ *pour tout* $i < k$.

***Preuve.*** Soit $k \geqslant 1$ tel que $\text{E-Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$. On applique la proposition 2.4 au prédicat Pr = E-Gr et au complexe montant

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}^0 \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \mathrm{K}^k$$

où $\mathrm{K}^i = \mathrm{K}^i(\underline{a}\,; M)$ est le $i$-ème terme du complexe de Koszul montant de $\underline{a}$ sur $M$. Pour coller exactement à l'énoncé de la proposition, on pose $m = k$ et $C_j = \mathrm{K}^{k-j}$.

On a bien $\mathrm{Pr}(\underline{a}\,; C_j) \geqslant j$ pour tout $j \geqslant 1$. En effet, pour $j \leqslant k$, le module $C_j = \mathrm{K}^{k-j}$ est isomorphe à un certain $M^e$ avec $e \geqslant 1$ et le foncteur Ext vérifie $\mathrm{Ext}(N, M^e) \simeq \mathrm{Ext}(N, M)^e$, cf. Bourbaki, Algèbre X, §5, prop. 7. Par conséquent, $\text{E-Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k \Rightarrow \text{E-Gr}(\underline{a}\,; M^e) \geqslant k$. Ainsi, on a $\text{E-Gr}(\underline{a}\,; C_j) \geqslant k$. A fortiori $\text{E-Gr}(\underline{a}\,; C_j) \geqslant j$.

On doit également vérifier que $\mathrm{H}_j(C)_{\underline{a}} = 0$ ; cela découle de l'égalité, plus forte, $\underline{a}\mathrm{H}_j(C) = 0$.

Finalement la proposition fournit $\mathrm{H}_j(C) = 0$ pour tout $j \geqslant 1$ *i.e.* $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$ pour tout $i < k$, ce qui s'écrit encore $\text{K-Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$. □

Attaquons-nous à la réciproque, c'est-à-dire à l'inégalité Koszul-profondeur $\leqslant$ Ext-profondeur. A noter que, Bourbaki, dans sa démonstration du théorème 1 qui établit l'équivalence entre la Ext-profondeur et la Koszul-profondeur, n'avoue pas vraiment cette inégalité. En effet, un fâcheux raisonnement par l'absurde va provoquer un certain nombre d'assertions du type « truc est différent de 0 » masquant la vraie vérité.

**Proposition 2.6.** *Soit $k \in \mathbb{N}$. On a l'implication* $\text{K-Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k \;\Rightarrow\; \text{E-Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$. *Autrement dit, si* $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$ *pour tout* $i < k$ *alors* $\mathrm{Ext}^i(\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle, M) = 0$ *pour tout* $i < k$.

***Preuve.*** Soit $k \geqslant 1$ tel que $\text{K-Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$. On va appliquer la proposition 2.4 au prédicat Pr = K-Gr et au complexe montant $\mathrm{Hom}(L_\bullet, M)$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(L_0, M) \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \mathrm{Hom}(L_k, M)$$

où $L_\bullet$ désigne une résolution libre de $\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle$.

On pose $C_j = \mathrm{Hom}(L_{k-j}, M)$. Comme $L_\bullet$ est une résolution libre (avec des modules libres non nécessairement de type fini), $\mathrm{Hom}(L_{k-j}, M)$ est un certain produit direct $\prod M$.

Or la cohomologie Koszul est compatible avec les produits directs [4] de sorte que $\text{K-Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k \Rightarrow \text{K-Gr}(\underline{a}\,; \prod M) \geqslant k$. On a donc $\text{K-Gr}(\underline{a}\,; C_j) \geqslant k$, a fortiori $\text{K-Gr}(\underline{a}\,; C_j) \geqslant j$.

Par ailleurs, on a $\underline{a}\,\mathrm{H}_j(C) = 0$ pour tout $j \geqslant 1$, car $\underline{a}\,\mathrm{Ext}(\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle, M) = 0$ (cf. Bourbaki, Algèbre X, §5, prop. 7). A fortiori, on a $\mathrm{H}_j(C)_{\underline{a}} = 0$.

Finalement, la proposition fournit $\mathrm{H}_j(C) = 0$ pour tout $j \geqslant 1$, c'est-à-dire $\mathrm{Ext}^{k-j}(\mathbf{A}/\langle\underline{a}\rangle, M) = 0$ pour tout $j \geqslant 1$, ce qui s'écrit encore $\text{E-Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$. □

4. Plus précisément, on a $\mathrm{H}(\underline{a}\,; \prod M) \simeq \prod \mathrm{H}(\underline{a}\,; M)$. Il suffit de montrer cet isomorphisme au niveau des complexes (cf. la proposition 1 du §2, Algèbre X de Bourbaki). On a $\mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,; \prod M) = \mathrm{Hom}\big(\mathrm{K}_\bullet(\underline{a}\,; \mathbf{A}), \prod M\big) \simeq \prod \mathrm{Hom}\big(\mathrm{K}_\bullet(\underline{a}\,; \mathbf{A}), M\big) = \prod \mathrm{K}^\bullet(\underline{a}\,; M)$.

# 3 Deux propriétés de la profondeur

## 3.1 Profondeur du produit de deux idéaux

La proposition suivante relie la profondeur du produit de deux idéaux à la profondeur de chacun des idéaux. À notre connaissance, la preuve que nous allons donner ne figure pas dans la littérature. Dans l'article [CQ12], on trouve une preuve expéditive (exposée avec $M = \mathbf{A}$) utilisant l'aspect récursif de la profondeur via le true-grade. Signalons enfin ce que l'on peut lire chez Bruns & Herzog, cf. [BH98, Proposition 1.2.10.(c)] :

*Let $R$ be a Noetherian ring, $I$, $J$ ideals of $R$, and $M$ a finite $R$-module. Then*

$$\operatorname{grade}(I \cap J, M) \;=\; \min\{\operatorname{grade}(I, M),\, \operatorname{grade}(J, M)\}$$

Les auteurs prouvent cet énoncé avec le spectre premier de l'anneau et même avec des idéaux premiers associés.

**Proposition 3.1.** *Si $\operatorname{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$ et $\operatorname{Gr}(\underline{b}\,; M) \geqslant k$ alors $\operatorname{Gr}(\underline{ab}\,; M) \geqslant k$, et réciproquement. De manière abrégée, on a donc*

$$\operatorname{Gr}(\underline{ab}\,; M) \;=\; \min\big(\operatorname{Gr}(\underline{a}\,; M),\, \operatorname{Gr}(\underline{b}\,; M)\big)$$

***Preuve.*** Grâce à $\operatorname{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant k$, la proposition II-3.3 fournit l'isomorphisme $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{b}}(M) \simeq \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{ab}}(M)$ pour tout $i < k$. En utilisant maintenant $\operatorname{Gr}(\underline{b}\,; M) \geqslant k$, on obtient $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{ab}}(M) = 0$ pour tout $i < k$. La réciproque est évidente car $\langle \underline{ab} \rangle \subset \langle \underline{a} \rangle$ (idem pour $\underline{b}$). □

## 3.2 Recollement de la profondeur

**Proposition 3.2.** *Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ et $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_m)$ deux suites de scalaires et $M$ un $\mathbf{A}$-module. Si la profondeur de $\underline{s}$ sur $M$ est $\geqslant k$ et qu'il en est de même de celle de $\underline{a}$ sur chaque $M[\frac{1}{s_j}]$, alors la profondeur de $\underline{a}$ sur $M$ est aussi $\geqslant k$. Dit autrement, on a l'implication :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, j \in [\![1, m]\!], \quad \operatorname{Gr}\big(\underline{a}\,; M[\frac{1}{s_j}]\big) \;\geqslant\; k \\ \operatorname{Gr}(\underline{s}\,; M) \;\geqslant\; k \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{Gr}(\underline{a}\,; M) \;\geqslant\; k$$

La preuve a été faite dans le chapitre précédent (cf. proposition IV-4.3). Un cas particulier très utile correspond à $k = 1$ et l'énoncé prend la forme suivante

*Soit $\langle s_1, \ldots, s_m \rangle$ un idéal fidèle et $J$ un idéal de type fini. Si $J$ est fidèle sur chaque localisé $M[\frac{1}{s_i}]$, alors $J$ est fidèle sur $M$.*

Nous utiliserons à plusieurs reprises cet énoncé avec $M = \mathbf{A}$ dans le chapitre VII, notamment dans le lemme du rang stable. Signalons enfin cet énoncé pour $k = 1$ est exactement le lemme 2.3 de [CQ12] et que dans ce même article, la version pour $k$ quelconque (*i.e.* la proposition 3.2 ci-dessus) est prouvée par réccurence en utilisant le true-grade (cf. [CQ12, Lemma 6.7]).

**Aparté déterminantiel**

Contrairement au théorème 2.5. des auteurs Bruns & Vetter [BV88], nous n'utilisons pas d'idéaux premiers, ni d'hypothèse noethérienne. En revanche, nous reprenons le fait $(ii)$ énoncé dans le chapitre 2, page 10 de ce même ouvrage, à savoir : « Si l'élément $u_{qp}$ d'une matrice $U \in \mathbb{M}_{q,p}(\mathbf{A})$ est un inversible de $\mathbf{A}$ alors $\mathcal{D}_r(U) = \mathcal{D}_{r-1}(\widetilde{U})$ où $\widetilde{U}$ est la matrice $(q-1) \times (p-1)$ définie par $\widetilde{u}_{ij} = u_{ij} - \frac{u_{ip}}{u_{qp}} u_{qj}$ ». Voir aussi juste avant le fait II-5.4 de [LQ11].

**Proposition 3.3.** *Considérons la matrice générique $X$ de format $q \times p$ et un entier $r \in [\![1,\, \min(p, q)+1]\!]$. Alors*

$$\operatorname{Gr}\big(\mathcal{D}_r(X)\big) \geqslant (p - r + 1)(q - r + 1)$$

***Preuve.*** On pose $\mathbf{S} = \mathbf{k}[(X_{ij})]$. On procède par récurrence sur $r$, le cas $r = 1$ étant évident. Soit $r \geqslant 2$. D'après la proposition 3.2, il suffit de prouver $\operatorname{Gr}(\mathcal{D}_r(X)\,; \mathbf{S}[\frac{1}{X_{k\ell}}]) \geqslant (p-r+1)(q-r+1)$. Pour simplifier, traitons le cas $(k, \ell) = (q, p)$. On définit la matrice $\widetilde{X}$ de format $(q-1) \times (p-1)$ via $\widetilde{X}_{ij} = X_{ij} - \frac{X_{ip}}{X_{qp}} X_{qj}$

(ce qui correspond à faire l'opération $L_i \leftarrow L_i - \frac{X_{ip}}{X_{qp}} L_q$ dans $X$). Cette matrice est à coefficients dans le localisé $\mathbf{S}[\frac{1}{X_{qp}}]$ et dans cet anneau, on a l'égalité d'idéaux $\mathcal{D}_r(X) = \mathcal{D}_{r-1}(\widetilde{X})$. Afin d'appliquer l'hypothèse de récurrence, on écrit $\mathbf{S}[\frac{1}{X_{qp}}] = \mathbf{k}'[X_{i,j},\ i \leqslant q-1,\ j \leqslant p-1]$ où $\mathbf{k}' = \mathbf{k}[X_{q,\bullet},\ X_{\bullet,p},\ \frac{1}{X_{qp}}]$. Bien entendu, les $X_{i,j}$ sont des indéterminées sur $\mathbf{k}'$ et donc il en est de même des $\widetilde{X}_{i,j}$. L'hypothèse de récurrence fournit donc

$$\mathrm{Gr}\left(\mathcal{D}_{r-1}(\widetilde{X})\,;\mathbf{S}\Big[\frac{1}{X_{qp}}\Big]\right) \quad \geqslant \quad \big((p-1)-(r-1)+1\big)\big((q-1)-(r-1)+1\big) = (p-r+1)(q-r+1)$$

d'où $\mathrm{Gr}\left(\mathcal{D}_r(X)\,;\mathbf{S}[\frac{1}{X_{qp}}]\right) \geqslant (p-r+1)(q-r+1)$. □

**Fin de l'aparté déterminantiel**

# 4 Suite 1-sécante

## 4.1 Quelques propriétés élémentaires

Pour présenter la notion, nous allons travailler sur l'anneau tout simplement car cela rend le discours plus fluide. Une fois que l'on a appréhendé la notion avec l'anneau, il est très facile de la généraliser à un module quelconque.

Dire qu'une suite $\underline{a}$ est 1-sécante sur $\mathbf{A}$ c'est dire que son homologie Koszul en degré 1 est triviale. Autrement dit, son module des syzygies est engendré par les relateurs triviaux. Plus précisément, si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}^n$ vérifie $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ alors il existe des $u_{ij} \in \mathbf{A}$ tels que $x = \sum_{i<j}(a_i\varepsilon_j - a_j\varepsilon_i)u_{ij}$ où $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ désigne la base canonique de $\mathbf{A}^n$.

Par exemple pour $n = 4$, si $(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbf{A}^4$ vérifie $a_1x_1 + \cdots + a_4x_4 = 0$ alors il existe des $u_{ij} \in \mathbf{A}$ tels que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_3 & -a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & -a_3 & -a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & -a_4 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{23} \\ u_{24} \\ u_{34} \end{bmatrix}$$

On peut donner une caractérisation agréable de la 1-sécance à l'aide de matrices antisymétriques. Une suite $\underline{a}$ est 1-sécante sur $\mathbf{A}$ si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}^n$ vérifiant $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, il existe une matrice *antisymétrique*[5] $\Omega \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ tel que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Voici quelques explications. On introduit la deuxième différentielle du complexe de Koszul descendant de $\underline{a}$ :

$$\partial_2 : \textstyle\bigwedge^2(\mathbf{A}^n) \longrightarrow \bigwedge^1(\mathbf{A}^n), \qquad \varepsilon_i \wedge \varepsilon_j \longmapsto a_i\varepsilon_j - a_j\varepsilon_i$$

et on voit $\bigwedge^2(\mathbf{A}^n)$ comme le module des matrices antisymétriques $n \times n$ sur $\mathbf{A}$ via $\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j \leftrightarrow \Omega_{ij}$ où $\Omega_{ij}$ est la matrice ayant tous ses coefficients nuls sauf celui en position $(i, j)$ qui vaut $-1$ et celui en position $(j, i)$ qui vaut 1. Avec cette identification, $\partial_2$ n'est autre que $\Omega \mapsto \Omega\,{}^{\mathrm{t}}a$ comme on le voit en vérifiant que $\Omega_{ij}\,{}^{\mathrm{t}}a = a_i\varepsilon_j - a_j\varepsilon_i$. Par exemple, pour $n = 4$, on a

$$\Omega_{13}\,{}^{\mathrm{t}}a = \begin{bmatrix} . & . & -1 & . \\ . & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Deux remarques. D'une part, on devrait plutôt parler de matrice alternée, car la diagonale est nulle (ce qui n'est pas nécessairement le cas d'une matrice antisymétrique en caractéristique 2). D'autre part, l'appellation $\Omega$ fait peut-être penser à une matrice orthogonale. Et c'est tant mieux ! On sait bien que l'espace tangent en l'identité du groupe orthogonal est l'espace vectoriel des matrices antisymétriques !

Ainsi, dire qu'un relateur est trivial, c'est dire qu'il est dans l'image de $\Omega \mapsto \Omega\,{}^{\mathrm{t}}a$. C'est justement ce qui était annoncé.

Grâce à cette caractérisation, on peut fournir une démonstration totalement élémentaire du $(a, b, ab)$-trick en homologie Koszul pour $k = 1$, sans utiliser ni outil homologique, ni calcul extérieur. On met juste à profit le codage par les matrices antisymétriques.

**Proposition 4.1** (Le $(a, b, ab)$-trick en homologie Koszul pour $k = 1$)**.** *Soit $a$ et $b$ deux scalaires et $\underline{c}$ une suite de scalaires. Alors*

$$\mathrm{H}_1(a, \underline{c}\,; M) = 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{H}_1(b, \underline{c}\,; M) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{H}_1(ab, \underline{c}\,; M) = 0$$

Si on a l'oeil, on voit qu'il s'agit d'une relecture de la démonstration générale fournie au chapitre I.

***Preuve.*** Considérons des éléments $x_i \in M$ tels que $abx_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$. On réécrit cette égalité en $a(bx_1) + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = 0$. Comme $(a, \underline{c})$ est 1-sécante, il existe une matrice $\Omega$ antisymétrique à coefficients dans $M$ telle que

$$\begin{bmatrix} bx_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} a & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \Omega \qquad (\clubsuit)$$

Maintenant, il y a deux choses « à faire ». La première est de mettre au chaud le côté contenant les $x_2, \ldots, x_n$, *i.e.*

$$\begin{bmatrix} 0 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \;=\; aL_1(\Omega) \;+\; \begin{bmatrix} \star & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \Omega^- & \\ 0 & & \end{bmatrix} \qquad (\heartsuit)$$

où $\star$ est n'importe quel élément (par exemple $\star = ab$ pour la suite) et $\Omega^-$ désigne la matrice carrée de taille $n-1$, extraite en bas à droite de $\Omega$. Donc cette matrice de taille $n$ contenant $\Omega^-$ est antisymétrique.

La deuxième chose à faire, c'est d'utiliser le fait que $(b, \underline{c})$ est 1-sécante. Pour cela, observons que le terme $bx_1$ de $(\clubsuit)$ est égal à

$$bx_1 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} C_1(\Omega)$$

car il y a un 0 en haut à gauche dans la matrice $\Omega$. Ce que l'on peut encore écrire (car $\Omega$ est antisymétrique) $bx_1 + \langle \underline{c}, L_1(\Omega) \rangle = 0$. Comme $(b, \underline{c})$ est 1-sécante, il existe une matrice $N$ antisymétrique telle que

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \;+\; L_1(\Omega) \;=\; \begin{bmatrix} b & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} N$$

égalité que l'on peut réécrire (petite astuce : « répartition habile de $a$ ») :

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \;+\; aL_1(\Omega) \;=\; \begin{bmatrix} ab & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & N_{12} & \cdots & N_{1n} \\ -N_{12} & & & \\ \vdots & & aN^- & \\ -N_{1n} & & & \end{bmatrix} \qquad (\diamond)$$

où la matrice à droite est formée des premières lignes et colonnes de $N$ (donc un 0 en haut à gauche etc.) et en bas à droite de la matrice $aN^-$. La matrice obtenue est donc encore antisymétrique.

Maintenant, il ne reste plus qu'à ajouter $(\heartsuit)$ et $(\diamond)$, et on obtient :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & N_{12} & \cdots & N_{1n} \\ -N_{12} & & & \\ \vdots & & aN^- & \\ -N_{1n} & & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ab & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \Omega^- & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

On a réalisé le contrat : il existe une matrice antisymétrique $P$ telle que

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} ab & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} P$$

□

Une suite régulière est complètement sécante, donc 1-sécante. On peut donner une preuve directe de cette implication grâce à la caractérisation par les matrices antisymétriques.

**Proposition 4.2.** *Une suite régulière est* 1*-sécante.*

***Preuve.*** Considérons une relation $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ où les $x_i \in M$. En utilisant que $\underline{a}$ est $M$-régulière, on va montrer qu'il existe une matrice antisymétrique $\Omega$ telle que $\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \Omega$.

On prouve cela par récurrence sur $n$. On part de la relation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. En utilisant la $M/(a_1M + \cdots + a_{n-1}M)$-régularité de $a_n$, on en déduit que $x_n \in a_1M + \cdots + a_{n-1}M$, ce que l'on écrit $a_1y_1 + \cdots + a_{n-1}y_{n-1} + x_n = 0$. En combinant les relations pour éliminer $x_n$, on obtient :

$$a_1(x_1 - a_ny_1) \ + \ \cdots \ + \ a_{n-1}(x_{n-1} - a_ny_{n-1}) \ = \ 0$$

On utilise maintenant le fait que $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ est $M$-régulière et l'hypothèse de récurrence fournit une matrice $\Omega$ antisymétrique $(n-1) \times (n-1)$, à coefficients dans $M$, telle que :

$$\begin{bmatrix} x_1 - a_ny_1 & \cdots & x_{n-1} - a_ny_{n-1} \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} \Omega$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} \Omega \ + \ a_n \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-1} \end{bmatrix}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_{n-1} & x_n \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & -y_1 \\ & \Omega & & \vdots \\ & & & -y_{n-1} \\ y_1 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

et on a bien obtenu une matrice antisymétrique $n \times n$ comme voulu. □

## 4.2 Suite 1-sécante et suite Lech-indépendante

Pour une suite 1-sécante $\underline{a}$, si on a une relation $\sum_i \lambda_i a_i = 0$, alors $\lambda_i \in \langle a_1, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_n \rangle$. Par conséquent, si $\underline{a}$ est 1-sécante, il est facile de voir que l'on a l'implication :

$$\forall\, \lambda_i \in \mathbf{A}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, i, \quad \lambda_i \in \langle \underline{a} \rangle$$

On dit alors que $\underline{a}$ est Lech-indépendante. Autrement dit, en notant $\mathfrak{a}$ l'idéal engendré par $\underline{a}$, la suite $\underline{a}$ est indépendante au sens de Lech si et seulement si la famille formée par les classes des $a_i$ dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ forment une base de ce $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module. Bourbaki emploie la terminologie de suite $\mathbf{A}$-indépendante (cf. AC X, § 4, exercice 12).

### Un exemple classique de Lech-indépendance

Soit $\underline{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ une suite de $n$ polynômes en $n$ indéterminées sur un anneau commutatif $\mathbf{k}$ ayant leur jacobien J inversible modulo $\langle \underline{F} \rangle$, c'est-à-dire inversible dans l'anneau quotient $\mathbf{k}[\underline{X}]/\langle \underline{F} \rangle$. Alors la suite $\underline{F}$ est Lech-indépendante. En effet, considérons une relation $\sum_i U_iF_i = 0$. En dérivant par rapport à $X_j$, on obtient

$$\sum_i \frac{\partial U_i}{\partial X_j} F_i + \sum_i U_i \frac{\partial F_i}{\partial X_j} = 0$$

Matriciellement, on a donc

$$\forall\, j, \quad \begin{bmatrix} \partial_{X_j}(F_1) & \cdots & \partial_{X_j}(F_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \ \equiv \ 0 \mod \langle \underline{F} \rangle \quad \textit{i.e.} \quad {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Jac}(F_1, \ldots, F_n) \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \ \equiv \ 0 \mod \langle \underline{F} \rangle$$

En multipliant à gauche par la transposée de la comatrice de la jacobienne, on obtient $\mathrm{J}U_i \equiv 0 \bmod \langle \underline{F} \rangle$. Comme le jacobien J est inversible modulo $\langle \underline{F} \rangle$, on en déduit $U_i \in \langle \underline{F} \rangle$ pour tout $i$.

**Quelques propriétés élémentaires de la Lech-indépendance**

**Proposition 4.3.** *On note* $\mathfrak{a}$ *l'idéal engendré par* $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$.

(*i*) *Une suite* 1*-sécante est indépendante au sens de Lech.*

(*ii*) *La suite* $\underline{a}$ *est Lech-indépendante si et seulement si le* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$*-module* $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ *est libre de rang* $n$*. En particulier, deux suites* de même longueur *engendrant le même idéal sont simultanément Lech-indépendantes ou non.*

(*iii*) *Si* $\langle \underline{a} \rangle$ *est engendré par une suite Lech-indépendante de longueur* $m > n$ *alors* $1 \in \langle \underline{a} \rangle$.

(*iv*) *Si* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *sont deux suites Lech-indépendantes engendrant le même idéal, alors* $\mathrm{H}_\bullet(\underline{a}) \simeq \mathrm{H}_\bullet(\underline{b})$ *(idem en cohomologie).*

***Preuve.*** Le point (*i*) a déjà été démontré ci-dessus. Pour le point (*ii*) : si $\underline{a}$ est Lech-indépendante la famille formée des classes des $a_i$ modulo $\mathfrak{a}^2$ est libre, et comme elle est génératrice de $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ par définition, c'est une base. Réciproquement si $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ est un $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module libre de rang $n$. La famille formée des classes des $a_i$ est génératrice et de cardinal $n$ donc c'est une base, en particulier une famille libre. Cela signifie exactement que $\underline{a}$ est indépendante au sens de Lech.

Pour (*iii*) : soit $\underline{b}$ Lech-indépendante de longueur $m > n$ telle que $\langle \underline{a} \rangle = \langle \underline{b} \rangle$. On considère la suite $\underline{a}' = (\underline{a}, 0, \dots, 0)$ de longueur $m$. D'après le point précédent, $\underline{a}'$ est Lech-indépendante donc $1 \in \langle \underline{a}' \rangle$.

Enfin (*iv*) : on va montrer que $\mathrm{H}_i(\underline{a})_\delta \simeq \mathrm{H}_i(\underline{b})_\delta$ et que $\mathrm{H}_i(\underline{a}) \simeq \mathrm{H}_i(\underline{a})_\delta$ (idem pour la suite $\underline{b}$) pour un certain $\delta \in 1 + \mathfrak{a}$.
Comme $\underline{a}$ et $\underline{b}$ engendrent le même idéal, il existe une matrice $U \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ telle que $[\,a_1 \cdots a_n\,] = [\,b_1 \cdots b_n\,]U$. Cette matrice induit un morphisme $u : \mathrm{K}_\bullet(\underline{a}) \to \mathrm{K}_\bullet(\underline{b})$, qui est un isomorphisme sur le localisé $\mathbf{A}_\delta$ où $\delta = \det U$. On a donc $\mathrm{H}_i(\underline{a})_\delta \simeq \mathrm{H}_i(\underline{b})_\delta$.
Comme $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont indépendantes au sens de Lech, leurs images dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ sont des bases et donc la matrice $U$ est inversible modulo $\mathfrak{a}$ : il existe $\delta' \in \mathbf{A}$ tel que $\delta\delta' \equiv 1 \mod \mathfrak{a}$. Cela entraîne que, sur $\mathrm{H}_i(\underline{a})$, la multiplication par $\delta$ et la multiplication par $\delta'$ sont inverses l'une de l'autre (car $\mathfrak{a}$ annule $\mathrm{H}_i(\underline{a})$). Ceci fait que $\mathrm{H}_i(\underline{a}) \simeq \mathrm{H}_i(\underline{a})_\delta$. □

**Proposition 4.4.** *Soient deux suites* $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ de même longueur *engendrant le même idéal. Si* $\underline{a}$ *est* 1*-sécante alors il en est de même de* $\underline{b}$.

***Preuve.*** On suppose que $\underline{a}$ est 1-sécante. Alors $\underline{a}$ est Lech-indépendante. Les deux suites sont de même longueur et engendrent le même idéal donc d'après le point (*ii*) de la proposition précédente, la suite $\underline{b}$ est aussi Lech-indépendante. On utilise maintenant le point (*iv*) qui affirme $\mathrm{H}_1(\underline{a}) \simeq \mathrm{H}_1(\underline{b})$. Par conséquent, si $\underline{a}$ est 1-sécante, il en est de même de $\underline{b}$. □

On présente maintenant un résultat dû à Lech qui généralise en quelque sorte le point (*iii*) de la proposition précédente. Voici ce que dit Christer Lech dans [Lec85] : « a set of independent elements in a ring cannot be contained in a proper ideal generated by fewer elements ». Nous reformulons cela comme suit :

**Proposition 4.5.** *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal* $n$*-engendré. Si* $\mathfrak{a}$ *contient une suite Lech-indépendante de longueur* $m > n$ *alors* $1 \in \mathfrak{a}$*. Mieux : si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal* $n$*-engendré qui contient une suite Lech-indépendante sur un module* $M$ *de longueur* $m > n$ *alors* $M = \mathfrak{a}M$.

***Preuve.*** Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ engendrant $\mathfrak{a}$ et $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m)$ Lech-indépendante sur $M$. On introduit le complexe de Koszul $\big(\mathrm{K}_\bullet(\underline{a}\,; M), \partial\big)$ de la suite $\underline{a}$ sur $M$. On pose $E = \bigwedge(\mathbf{A}^n) \otimes M$. Remarquons que $\underline{b}$ est alors Lech-indépendante sur $E$ (car $E \simeq M^{2^n}$).

Comme $\langle \underline{b} \rangle \subset \langle \underline{a} \rangle$, il existe des $u_i \in \bigwedge^1(\mathbf{A}^n)$ tels que $b_i = \partial(u_i)$. Soit $x \in M$. Le fait que $m > n$ implique que $u_1 \wedge \cdots \wedge u_m \otimes x = 0$. En particulier :

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_m \otimes x \;\in\; \underline{b}E + \partial(E)$$

On applique $\partial$ et on trouve

$$\sum_{i=1}^{m} \pm\, b_i \; u_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{u_i} \wedge \cdots \wedge u_m \otimes x \;\in\; \underline{b}\,\partial(E)$$

On examine le coefficient en $b_m$. En utilisant le fait que $\underline{b}$ est Lech-indépendante sur $E$, on obtient

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_{m-1} \otimes x \ \in \ \underline{b}E + \partial(E)$$

En itérant le processus, on tombe sur $1 \otimes x \in \underline{b}E + \partial(E)$. Comme $\langle \underline{b} \rangle \subset \langle \underline{a} \rangle$ et $\partial(E) \subset \underline{a}E$, on en déduit que $1 \otimes x \in \underline{a}E$, ce qui s'écrit encore $x \in \underline{a}M$. □

Dans la proposition précédente, intervient cette terminologie :

**Définition 4.6.** *Une suite $\underline{a}$ est dite Lech-indépendante sur $M$ si*

$$\forall\, x_i \in M, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\, i, \quad x_i \in \underline{a}M$$

**Remarque 4.7.** Comme une suite régulière est Lech-indépendante, le résultat de Lech dit en particulier : « Soit $\langle \underline{a} \rangle$ un idéal $n$-engendré qui contient une suite $M$-régulière de longueur $n+1$. Alors $\underline{a}M = M$ ».

Plus tard, ce sera immédiat. En effet, on invoquera le fait que la Koszul-profondeur est croissante avec l'inclusion, donc $\mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant n+1$. Le $n+1$ permet alors d'annuler le $(n+1)$-ème module de cohomologie Koszul de $\underline{a}$, *i.e.* $\mathrm{H}^n(\underline{a}\,; M)$, qui est justement $M/\underline{a}M$.

Il est très facile de démontrer qu'une suite régulière est Lech-indépendante. Par exemple, supposons $(a, b, c)$ régulière et soient $u$, $v$, $w \in \mathbf{A}$ tels que $ua + vb + wc = 0$. On commence par utiliser que $c$ est régulier modulo $\langle a, b \rangle$. On obtient donc $w \in \langle a, b \rangle$, disons $w = u'a + v'b$. En reportant, on récupère $(u + u'c)a + (v + v'c)b = 0$. On utilise le fait que $b$ est régulier modulo $a$. On obtient $v + v'c \in \langle a \rangle$, disons $v + v'c = au''$. Pour finir, on a $(u + u'c + bu'')a = 0$ d'où $u + u'c + bu'' = 0$. Récapitulons : on a obtenu $u \in \langle b, c \rangle$, $v \in \langle a, c \rangle$ et $w \in \langle a, b \rangle$.

**Un contre-exemple**

On se propose de donner un exemple de suite Lech-indépendante qui n'est pas 1-sécante. L'exemple reprend le contexte du chapitre VIII. On considère $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]/\langle F \rangle = \mathbf{k}[\underline{x}]$ où $\mathbf{k}$ est un anneau. La suite $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est Lech-indépendante sans être 1-sécante, pourvu que $F$ appartienne $\langle \underline{X} \rangle^2$ et que $F$ soit régulier.

Si $F \in \langle \underline{X} \rangle^2$, alors $\underline{x}$ est Lech-indépendante. On écrit $F = \sum U_i X_i$ avec $U_i \in \langle \underline{X} \rangle$. Soit $\sum v_i x_i = 0$ une relation dans $\mathbf{A}$ où $v_i = V_i \bmod F$. On la remonte dans l'anneau de polynômes en $\sum V_i X_i \in \langle F \rangle$. d'où $\sum (V_i - QU_i)X_i = 0$ pour un certain $Q \in \mathbf{k}[\underline{X}]$. Comme la suite $\underline{X}$ est 1-sécante, on a $V_i - QU_i \in \langle \underline{X} \rangle$ donc $V_i \in \langle \underline{X} \rangle$, *i.e.* $v_i \in \langle \underline{x} \rangle$.

La suite $\underline{x}$ n'est pas 1-sécante pourvu que $F$ soit régulier. En effet, la suite $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ est un 1-cycle du complexe de Koszul de $\underline{x}$ car $\sum u_i x_i = 0$ dans $\mathbf{A}$, mais $\underline{u}$ n'est pas un bord. En effet, supposons qu'il existe $\underline{W} \in \bigwedge^2$ tel que $\underline{U} = \partial_2(\underline{W}) + F\,\underline{V}$ où $\underline{V} \in \bigwedge^1$. Alors $\partial_1(\underline{U}) = 0 + F\partial_1(\underline{V})$ *i.e.* $F = FD$ où $D \in \langle \underline{X} \rangle$. Comme $F$ est régulier, on récupère $D = 1 \ldots$

# 5 Suite régulière et suite complètement sécante

On commence par une proposition qui peut paraître triviale, mais il n'en est rien. Par exemple, il n'est pas vrai que les hypothèses $\mathrm{Gr}(\underline{a}) \geqslant k$ et $b$ régulier modulo $\underline{a}$ entraînent $\mathrm{Gr}(\underline{a}, b) \geqslant k+1$. Il faut pour cela une hypothèse supplémentaire concernant $\mathrm{Pd}(\mathbf{A}/\langle \underline{a} \rangle)$, cf. [ASV81].

**Proposition 5.1.** *Si $\underline{a}$ est complètement sécante et $b$ régulier modulo $\langle \underline{a} \rangle$ alors $\underline{a}, b$ est complètement sécante.*

***Preuve.*** Puisque $\mathrm{Gr}(\underline{a}, b) \geqslant \mathrm{Gr}(\underline{a})$, il s'agit de montrer que $\mathrm{H}^n(\underline{a}, b) = 0$ où $n = \#\underline{a}$. On a $\mathrm{H}^n(\underline{a}) = \mathbf{A}/\langle \underline{a} \rangle$. Dire que $b$ est régulier modulo $\langle \underline{a} \rangle$ revient à dire que l'application $\mathrm{H}^n(\underline{a}) \xrightarrow{\times b} \mathrm{H}^n(\underline{a})$ est injective. La longue suite exacte fournit alors $\mathrm{H}^n(\underline{a}, b) = 0$. □

**Régulière ⇒ complètement sécante**

**Proposition 5.2.** *Une suite $M$-régulière est complètement sécante sur $M$.*

***Preuve.*** Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ que l'on suppose $M$-régulière. Si $n = 1$, c'est évident. Soit $n \geqslant 2$. On note $\underline{a}' = (a_1, \dots, a_{n-1})$. Par hypothèse de récurrence, on a $\mathrm{H}^i(\underline{a}'\,; M) = 0$ pour tout $i < n-1$. La longue suite exacte :

$$\mathrm{H}^{i-1}(\underline{a}'\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\underline{a}'\,; M)$$

fournit alors $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$ pour tout $i < n-1$. Reste à annuler $\mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}\,; M)$. La longue suite exacte, encore elle, fournit

$$\mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}'\,; M) \xrightarrow{\times a_n} \mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}'\,; M)$$

On sait que $\mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}'\,; M) \simeq M/\underline{a}'M$. Comme $\underline{a}$ est régulière, la multiplication par $a_n$ sur $M/\underline{a}'M$ est injective. Par conséquent $\mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}\,; M) = 0$. □

**Régularité et indépendance algébrique**

**Proposition 5.3.** *Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ une suite régulière d'un anneau $\mathbf{A}$ et $\mathbf{k} \subset \mathbf{A}$ un sous-anneau tel que $\mathbf{k} \cap \langle \underline{a} \rangle = \{0\}$. Alors $a_1, \dots, a_n$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{k}$.*

***Preuve.*** On procède par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$, la suite est réduite à un élément $a$. Considérons une relation $\lambda_m a^m + \cdots + \lambda_1 a + \lambda_0 = 0$ avec $\lambda_i \in \mathbf{k}$. On a $\lambda_0 \in \mathbf{k} \cap \langle a \rangle = \{0\}$ donc $(\lambda_m a^{m-1} + \cdots + \lambda_1)a = 0$ ; on peut simplifier par $a$ qui est régulier d'où $\lambda_m a^{m-1} + \cdots + \lambda_1 = 0$ ; puis on recommence pour obtenir finalement $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Pour $n \geqslant 2$, on considère $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\langle a_1 \rangle$. On a $\mathbf{k} \hookrightarrow \mathbf{A}'$ car $\mathbf{k} \cap \langle a_1 \rangle = \{0\}$. La suite $\underline{a}' = (\overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})$ de $\mathbf{A}'$ est régulière et $\mathbf{k} \cap \langle \underline{a}' \rangle = \{0\}$. Soit $f \in \mathbf{k}[\underline{X}]$ de degré $\leqslant d$ tel que $f(\underline{a}) = 0$. On écrit $f(\underline{X}) = X_1 q(\underline{X}) + r(\underline{X}')$ avec $q \in \mathbf{k}[\underline{X}]$ de degré $\leqslant d-1$ et $r \in \mathbf{k}[X_2, \dots, X_n]$. Dans $\mathbf{A}'$, on a $r(\underline{a}') = 0$ donc par récurrence sur $n$, on obtient $r = 0$. On simplifie par $a_1$ régulier d'où $q(\underline{a}) = 0$. Par récurrence sur $d$, on obtient $q = 0$ puis $f = 0$. □

# 6 Suite complètement sécante et suite 1-sécante

## 6.1 En terrain local cohérent ou en terrain gradué

On se place dans l'une des deux situations suivantes :
*(i)* $\mathbf{A}$ est un anneau cohérent, $\underline{a}$ une suite d'éléments de $\mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ et $M$ un $\mathbf{A}$-module de présentation finie
*(ii)* $\mathbf{A}$ est un anneau gradué, $\underline{a}$ une suite d'éléments homogènes de degré $> 0$ et $M$ un $\mathbf{A}$-module $\mathbb{N}$-gradué.

**Lemme 6.1.** *On note $\underline{a}' = (a_1, \dots, a_{n-1})$. Dans le contexte (i) ou (ii), on a l'implication valable pour tout entier $k$,*

$$\mathrm{H}^k(\underline{a}\,; M) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{H}^{k-1}(\underline{a}'\,; M) = 0$$

***Preuve.*** En reprenant la longue suite exacte en cohomologie Koszul :

$$\mathrm{H}^{k-1}(\underline{a}'\,; M) \xrightarrow{\times a_n} \mathrm{H}^{k-1}(\underline{a}'\,; M) \longrightarrow \mathrm{H}^k(\underline{a}\,; M)$$

on constate que la flèche $\mathrm{H}^{k-1}(\underline{a}'\,; M) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^{k-1}(\underline{a}'\,; M)$ de multiplication par $a_n$ est surjective. Donc $\mathrm{H}^{k-1}(\underline{a}'\,; M) = a_n \mathrm{H}^{k-1}(\underline{a}'\,; M)$.

Avec l'hypothèse *(i)*, le module $\mathrm{H}^{k-1}(\underline{a}'\,; M)$ est de type fini. Comme $a_n$ est dans $\mathrm{Rad}(\mathbf{A})$, le lemme de Nakayama fournit $\mathrm{H}^{k-1}(\underline{a}'\,; M) = 0$.

Avec l'hypothèse *(ii)*, le module $E = \mathrm{H}^{k-1}(\underline{a}'\,; M)$ est gradué et vérifie $E_i = 0$ pour $i$ suffisamment négatif (en effet, $E$ est un sous-quotient de $\mathrm{K}^{k-1}(\underline{a}'\,; M)$ qui est une somme directe finie de twists de $M$). Le fait que $a_n$ soit homogène de degré $> 0$ fournit, grâce au lemme de Nakayama dans sa version homogène, l'égalité $\mathrm{H}^{k-1}(\underline{a}'\,; M) = 0$. □

**Proposition 6.2.** *Dans la situation (i) ou (ii), on a :*
*a) Si $\mathrm{H}^k(\underline{a}\,; M) = 0$ alors $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,; M) = 0$ pour tout $i \leqslant k$.*
*b) Si $\mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}\,; M) = 0$ alors la suite $\underline{a}$ est $M$-régulière.*

***Preuve.*** *a)* On procède par récurrence sur la longueur $n$ de la suite. Le lemme précédent fournit $\mathrm{H}^{k-1}(\underline{a}'\,;M)=0$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $\mathrm{H}^{i}(\underline{a}'\,;M)=0$ pour tout $i\leqslant k-1$. Pour un tel $i$, la suite exacte est

$$0=\mathrm{H}^{i-1}(\underline{a}'\,;M)\ \longrightarrow\ \mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,;M)\ \longrightarrow\ \mathrm{H}^{i}(\underline{a}'\,;M)=0$$

Donc $\mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,;M)=0$ pour tout $i\leqslant k-1$, ce qu'il fallait démontrer.

*b)* Comme $\mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}\,;M)=0$, le point *a)* fournit $\mathrm{H}^{i}(\underline{a}\,;M)=0$ pour tout $i\leqslant n-1$. Le lemme fournit alors $\mathrm{H}^{i}(\underline{a}'\,;M)=0$ pour tout $i\leqslant n-2$. Par récurrence sur $n$, on en déduit que la suite $\underline{a}'$ est $M$-régulière. Il reste avoir pourquoi $a_n$ est régulier modulo $\underline{a}'M$. Or on a la suite exacte

$$0=\mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}\,;M)\ \longrightarrow\ \mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}'\,;M)\ \xrightarrow{\times a_n}\ \mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}'\,;M)$$

Comme $\mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}'\,;M)\simeq M/\underline{a}'M$, on en déduit que la multiplication par $a_n$ sur $M/\underline{a}'M$ est injective *i.e.* $a_n$ est régulier modulo $\underline{a}'M$. □

**Remarque 6.3.** D'après la self-duality du complexe de Koszul, on sait que $\mathrm{H}^{n-1}(\underline{a}\,;M)\simeq\mathrm{H}_1(\underline{a}\,;M)$. Dans l'une des deux situations *(i)* ou *(ii)*, le point *a)* pour $k=n-1$ s'énonce : « si $\underline{a}$ est 1-sécante sur $M$ alors $\underline{a}$ est $M$-complètement sécante » et le point *b)* s'énonce : « si $\underline{a}$ est 1-sécante sur $M$ alors $\underline{a}$ est $M$-régulière ». En particulier, si $\underline{a}$ est $M$-complètement sécante alors $\underline{a}$ est $M$-régulière.

En fait, on peut remplacer « régulière » par « commutativement régulière » car une suite 1-sécante reste 1-sécante après permutation (idem pour une suite complètement sécante). Par exemple, une suite 1-sécante de polynômes homogènes de degré $>0$ est commutativement régulière.

## 6.2 Sur un anneau cohérent, une suite 1-sécante est complètement sécante

On généralise le contexte $(i)$ de la proposition précédente : la suite $\underline{a}$ n'est plus supposée être à coefficients dans le radical de Jacobson.

**Proposition 6.4.** *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau cohérent et* $M$ *un* $\mathbf{A}$*-module de présentation finie. Soit* $k\geqslant 0$ *fixé. Alors*

$$\mathrm{H}_k(\underline{a}\,;M)=0\quad\Longrightarrow\quad\mathrm{H}_i(\underline{a}\,;M)=0\quad\textit{pour tout } i\geqslant k$$

*On obtient les cas particuliers suivants.*

*Pour* $k=1$ *: si la suite* $\underline{a}$ *est* 1*-sécante sur* $M$*, alors elle est complètement sécante sur* $M$*.*

*Pour* $k=0$ *: si la suite est* $M$*-unimodulaire, alors elle est complètement sécante sur* $M$ *; mieux, son complexe de Koszul est acyclique.*

***Preuve.*** On procède par récurrence sur la longueur $n$ de la suite $\underline{a}$. On note $\underline{a}'=(a_2,\dots,a_n)$. La longue suite exacte en homologie Koszul est :

$$\cdots\ \longrightarrow\ \mathrm{H}_k(\underline{a}'\,;M)\ \xrightarrow{\times a_1}\ \mathrm{H}_k(\underline{a}'\,;M)\ \longrightarrow\ \mathrm{H}_k(\underline{a}\,;M)\ \longrightarrow\ \cdots$$

Comme $\mathrm{H}_k(\underline{a}\,;M)=0$, la multiplication par $a_1$ du $\mathbf{A}$-module $\mathrm{H}_k(\underline{a}'\,;M)$ est surjective, ce que l'on écrit

$$a_1\,\mathrm{H}_k(\underline{a}'\,;M)=\mathrm{H}_k(\underline{a}'\,;M).$$

On donne un coup de determinant trick au $\mathbf{A}$-module de type fini $\mathrm{H}_k(\underline{a}'\,;M)$ (c'est même un module de présentation finie, en tant que quotient du noyau de $d_k$, application linéaire entre deux modules de présentation finie sur un anneau cohérent). Il existe donc $u\in\mathbf{A}$ tel que

$$(1+ua_1)\,\mathrm{H}_k(\underline{a}'\,;M)=0. \tag{$\diamond$}$$

Considérons à présent le monoïde $S=1+\langle a_1\rangle$ et travaillons avec le $S^{-1}\mathbf{A}$-module $S^{-1}M$ qui est un module de présentation finie ([LQ11] principe local-global concret 4.13 page 199) sur un anneau cohérent ([LQ11] principe local-global concret 3.5 page 33). L'égalité $(\diamond)$ se réécrit alors $\mathrm{H}_k(\underline{a}'\,;S^{-1}M)=0$ (on utilise ici que la localisation commute au quotient ainsi qu'au noyau et image d'une application linéaire). En appliquant l'hypothèse de récurrence (qui porte sur $\underline{a}'$ de longueur $n-1$), on obtient

$$\forall\, i\geqslant k,\quad\mathrm{H}_i(\underline{a}'\,;S^{-1}M)=0$$

On reprend la longue suite exacte en homologie Koszul avec le module $S^{-1}M$ :

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_{i+1}(\underline{a}'\,; S^{-1}M) \longrightarrow \mathrm{H}_{i+1}(\underline{a}\,; S^{-1}M) \longrightarrow \mathrm{H}_{i}(\underline{a}'\,; S^{-1}M) \longrightarrow \cdots$$

et on voit que $\mathrm{H}_{i+1}(\underline{a}\,; S^{-1}M) = 0$ pour tout $i \geqslant k$ car coincé entre deux zéros. Il existe donc $v \in \mathbf{A}$ tel que

$$(1 + va_1)\mathrm{H}_{i+1}(\underline{a}\,; M) = 0.$$

Or $a_1 \in \langle \underline{a} \rangle$, donc $a_1\mathrm{H}_{i+1}(\underline{a}\,; M) = 0$ (l'idéal tue l'homologie Koszul). Par conséquent

$$\forall i \geqslant k, \quad \mathrm{H}_{i+1}(\underline{a}\,; M) = 0$$

ce qu'il fallait montrer. □

# 7 Suite commutativement régulière

**Définitions équivalentes**

Une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ est dite commutativement régulière si pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la suite $\underline{a}_\sigma = (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$ est régulière. Les équivalences suivantes sont très faciles voire même un peu redondantes, mais nous préférons les énoncer pour de bon.

**Proposition 7.1.** *Pour une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, sont équivalents :*
*(1) $\underline{a}$ est commutativement régulière*
*(2) $\forall\, p \leqslant n,\ \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(p)})$ est régulière (i.e. toute sous-suite de $\underline{a}$ est régulière)*
*(3) $\forall\, I \subset \{1, \ldots, n\},\ \forall\, j \notin I$, l'élément $a_j$ est régulier modulo $\langle a_i \mid i \in I \rangle$*

***Preuve.***
(1) ⇒ (2) Soit $p \leqslant n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La suite $\underline{a}_\sigma$ est régulière par (1) donc également la suite constituée de ses $p$ premiers termes.
(2) ⇒ (3) Soit $I$ une partie de cardinal $m$ et $j \notin I$. Considérons une permutation $\sigma$ telle que $\mathfrak{a}_I = \langle a_i \mid i \in I \rangle = \langle a_{\sigma(k)} \mid 1 \leqslant k \leqslant m \rangle$ et telle que $\sigma(m+1) = j$. D'après le point (2), la suite $(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(m)}, a_{\sigma(m+1)})$ est régulière, donc en particulier $a_{\sigma(m+1)} = a_j$ est régulier modulo $\mathfrak{a}_I$.
(3) ⇒ (1) est facile. □

**$\underline{a}$ commutativement régulière ⇔ toutes les sous-suites de $\underline{a}$ sont 1-sécantes**

En général, une suite 1-sécante n'est pas régulière. Cependant, c'est le cas (et on a même mieux) si l'on suppose que toute sous-suite de la suite en question est 1-sécante.

**Proposition 7.2** (Caractérisation des suites commutativement régulières)**.** *Une suite $\underline{a}$ est commutativement régulière si et seulement si toutes ses sous-suites sont 1-sécantes.*

***Preuve.*** ⇒ Une suite commutativement régulière a toutes ses sous-suites régulières (d'après (1) ⇒ (2) de la proposition 7.1) donc a toutes ses sous-suites 1-sécantes (car une suite régulière est 1-sécante, confer la démonstration élémentaire de la proposition 4.2).

⇐ Commençons par faire la constatation suivante : tout élément d'une suite 1-sécante est régulier modulo les autres. En effet, prenons $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ une suite 1-sécante et considérons l'appartenance $u_i b_i \in \langle b_1, \ldots, \widehat{b_i}, \ldots, b_m \rangle$ que l'on écrit $\sum u_j b_j = 0$. La suite $\underline{b}$ est 1-sécante donc, en particulier, on a $u_i \in \langle b_1, \ldots, \widehat{b_i}, \ldots, b_m \rangle$.

Passons maintenant à la preuve proprement dite. Supposons que toutes les sous-suites de $\underline{a}$ sont 1-sécantes. D'après le point (3) de la proposition 7.1, il suffit de montrer que $a_j$ est régulier modulo $\langle a_i \mid i \in I \rangle$ pour toute partie $I$ et tout $j \notin I$. La "suite" $\big((a_i)_{i\in I},\, a_j\big)$ est une sous-suite de $\underline{a}$ donc est 1-sécante. D'après la constatation précédente, $a_j$ est bien régulier modulo $\langle a_i \mid i \in I \rangle$. □

**Sous-suites *croissantes* régulières ⇒ suite commutativement régulière**

**Proposition 7.3.** *Pour une suite $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, il y a équivalence entre*

(*i*) *La suite $\underline{a}$ est commutativement régulière sur $M$ (ce qui est encore équivalent à : toute sous-suite de $\underline{a}$ est $M$-régulière)*

(*ii*) *Toute sous-suite* croissante *de $\underline{a}$ est $M$-régulière, i.e. pour toute partie $I = (i_1 < \cdots < i_k)$ de $[\![1, n]\!]$, la suite $\underline{a}_I = (a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ est $M$-régulière*

Pour la preuve, on utilise un résultat classique, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite reste régulière après permutation de deux termes *consécutifs*. Cela figure par exemple chez Northcott, cf. [Nor76, lemma 3, chapitre 5] :

> *Soit $\underline{a}$ une suite $M$-régulière. La suite $(a_1, \dots, a_{p+1}, a_p, \dots, a_n)$ est $M$-régulière si et seulement si $a_{p+1}$ est $M$-régulier modulo $a_1M + \cdots + a_{p-1}M$.*

***Preuve.*** Pour alléger la rédaction, on dira « régulière » pour « $M$-régulière ». L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ résulte facilement de l'implication (1) ⇒ (2) de la proposition 7.1. Pour $(ii) \Rightarrow (i)$, on procède en deux temps. Dans un premier temps, on établit que si $\underline{a}$ vérifie $(ii)$ alors la suite obtenue après permutation de deux termes consécutifs de $\underline{a}$ vérifie encore $(ii)$. Notons $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n)$ la suite $(a_1, \dots, a_{p+1}, a_p, \dots, a_n)$. Soit $I$ une partie de $[\![1, n]\!]$. Si $I$ ne contient pas à la fois $p$ et $p+1$, il est facile de voir que $\underline{b}_I$ est régulière : en effet, dans ce cas, $\underline{b}_I = \underline{a}_I$ et $\underline{a}$ vérifie $(ii)$. Traitons maintenant le cas de $I = (i_1, \dots, i_\rho, i_{\rho+1}, \dots, i_k)$ où $i_\rho = p$ et $i_{\rho+1} = p+1$. La suite $\underline{b}_I$ est égale à $(a_{i_1}, \dots, a_{p+1}, a_p, \dots, a_{i_k})$. On va montrer, à l'aide du résultat classique ci-dessus, que cette suite est régulière. D'une part, la suite $(a_{i_1}, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{i_k})$ est régulière (car il s'agit de $\underline{a}_I$ qui est régulière d'après $(ii)$). D'autre part, $a_{p+1}$ est régulier modulo $a_{i_1}M + \cdots + a_{i_{\rho-1}}M$ (en effet, la suite $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{\rho-1}}, a_{i_{\rho+1}})$ est régulière car $\underline{a}$ vérifie $(ii)$). Ces deux points montrent que la suite permutée $(a_{i_1}, \dots, a_{p+1}, a_p, \dots, a_{i_k})$ est régulière, ce qui était annoncé. Dans un deuxième temps, supposons que $\underline{a}$ vérifie $(ii)$ et montrons que $\underline{a}$ vérifie $(i)$. Comme une permutation de $\mathfrak{S}_n$ est un produit de transpositions du type $(p, p+1)$, on utilise le « premier temps » de la preuve qui montre alors que $\underline{a}$ vérifie $(i)$. □

**Un critère de régularité pour une suite de polynômes**

Voici un critère très général dû à Jean-Pierre Jouanolou (cf. [Jou97, lemme 3.11.18.24]). Dans ce lemme, Jouanolou utilise la terminologie « complètement sécante » en ayant précisé auparavant sa signification « elle est régulière ds n'importe quel ordre » (ligne 5 au-dessus de l'énoncé du lemme). Nous nous sommes donc permis de citer son énoncé sous la forme ci-dessous car dans cette thèse, *complètement sécante* a un sens différent. Notre terminologie *complètement sécante* est celle utilisée par Bourbaki, Algèbre X, §9, n° 6, définition 2.

> *Soit $\mathbf{k}$ un anneau commutatif quelconque. On munit $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ d'un ordre monomial $\prec$. Pour un polynôme $f = a_\alpha X^\alpha + \sum_{\beta \prec \alpha} a_\beta X^\beta$ avec $a_\alpha \neq 0$, on note $\mathrm{in}(f) = a_\alpha X^\alpha$ son terme dominant. Soit $(f_1, \dots, f_r)$ une suite de polynômes non nuls de $\mathbf{k}[\underline{X}]$. Si $\big(\mathrm{in}(f_1), \dots, \mathrm{in}(f_r)\big)$ est commutativement régulière alors $(f_1, \dots, f_r)$ est aussi commutativement régulière.*

Il n'est pas difficile de montrer qu'une suite de monômes unitaires deux à deux premiers entre eux est commutativement régulière (par « monôme unitaire », on entend un monôme du type $X^\alpha$, avec un coefficient 1 donc). En appliquant le résultat de Jouanolou, on en déduit :

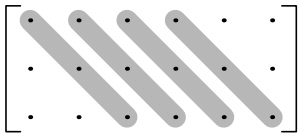
**Corollaire 7.4.** *Sur un anneau de polynômes à coefficients dans un anneau quelconque et avec un ordre monomial fixé, une suite de polynômes unitaires ayant des monômes dominants deux à deux premiers entre eux est commutativement régulière.*

**L'idéal des mineurs pleins de la matrice générique**

On considère la matrice générique $X$ de format $q \times p$ avec $p \geqslant q$. Examinons la profondeur de l'idéal déterminantiel des mineurs maximaux (*i.e.* d'ordre $q$). D'après la proposition 3.3, on sait que $\mathrm{Gr}\big(\mathcal{D}_q(X)\big) \geqslant p - q + 1$. On peut en fait exhiber une suite régulière de longueur $p - q + 1$ constituée de mineurs. Il s'agit des mineurs bâtis sur l'ensemble de colonnes

$$[1 \dots q], \qquad [2 \dots q+1], \qquad \dots \qquad [p-q+1 \dots p].$$

En considérant l'ordre lexicographique et en rangeant les indéterminées par ligne ou par colonne, chaque mineur est unitaire et son monôme dominant est le produit des coefficients de la diagonale. Par conséquent, les monômes dominants de ces $p-q+1$ mineurs sont premiers entre eux deux à deux.



# 8 Acyclicité et Unimodularité

Si $\mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M)=0$ pour tout $i$, l'égalité $\underline{a}M=M$ est immédiate (sans aucune hypothèse sur $M$ !). On peut se poser la question de la réciproque. C'est vrai si $M=\mathbf{A}$ (ce que l'on voit grâce à la preuve de $\underline{a}\mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M)=0$). C'est vrai si $M$ est de type fini (c'est essentiellement du determinant-trick). Mais ce n'est pas vrai pour un module $M$ quelconque. Afin de bien voir que l'hypothèse de finitude est primordiale, nous donnons les détails de ce cas, bien qu'il soit (très) facile.

### Le cas d'un module de type fini

**Proposition 8.1.** *Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module de type fini. Alors*

$$\underline{a}M=M \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M)=0 \quad \textit{pour tout } i\geqslant 0$$

***Preuve.*** On utilise le petit lemme que voici (suivi de sa preuve) :

*Soit $b\in\mathbf{A}$ et $M$ un $\mathbf{A}$-module quelconque. Alors*

$$bM=0 \quad\Longrightarrow\quad b\mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M)=0 \quad \textit{pour tout } i\geqslant 0$$

Si $C'\xrightarrow{u}C\xrightarrow{v}C''$ sont deux différentielles consécutives, le groupe d'homologie est $\operatorname{Ker}v/\operatorname{Im}u$. Donc $b(\operatorname{Ker}v/\operatorname{Im}u)=(b\operatorname{Ker}v+\operatorname{Im}u)/\operatorname{Im}u=\operatorname{Im}u/\operatorname{Im}u=0$. Pour la deuxième égalité, on utilise que $b\operatorname{Ker}v=0$ car $bC=0$ (le module $C$ est monté sur $M$ : c'est un certain $\bigwedge^d(\mathbf{A}^n)\otimes M$).

Enfin, revenons à la preuve de la proposition. Si $\underline{a}M=M$ avec $M$ de type fini alors un coup de déterminant trick donne $(1-\alpha)M=0$ pour un certain $\alpha\in\langle\underline{a}\rangle$. D'après le lemme, on a donc $(1-\alpha)\mathrm{H}^i(\underline{a}\,;M)=0$ Mais $\alpha$ est dans $\langle\underline{a}\rangle$ donc il tue la cohomologie qui est donc nulle. □

### Le cas d'un module quelconque

Nous allons expliciter une suite $\underline{a}$ et un module $M$ tel que $\check{\mathrm{H}}^0_{\underline{a}}(M)=M$ avec $\underline{a}M=M$. Le module $M$ que nous proposons est effectivement « non nul ». On revient en cohomologie Koszul en disant que la nullité du $\check{\mathrm{H}}^0_{\underline{a}}(M)$ équivaut à celle du $\mathrm{H}^0(\underline{a}\,;M)$. Bref, on aura $\mathrm{H}^0(\underline{a}\,;M)\neq 0$.

Prenons comme anneau de base, l'anneau $\mathbf{S}=\mathbf{k}[X_1,\ldots,X_n]$ ; comme suite, la suite $\underline{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ ; et comme module, le $n$-ème module de cohomologie de Čech $H:=\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S})$.

▷ Montrons que $H=\underline{X}H$ *i.e.* $H=X_iH$ pour tout $i$. Pour alléger, on suppose que $i=n$. La suite exacte courte de modules

$$0\longrightarrow \mathbf{S}\xrightarrow{\times X_n}\mathbf{S}\longrightarrow \mathbf{S}/\langle X_n\rangle\longrightarrow 0$$

donne lieu à la longue suite exacte en cohomologie de Čech dont le morceau en degré $n$ est

$$\cdots\longrightarrow H\xrightarrow{\times X_n}H\longrightarrow \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S}/\langle X_n\rangle)\longrightarrow\cdots$$

On a $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S}/\langle X_n\rangle)\simeq\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{x}}(\mathbf{S}/\langle X_n\rangle)$ où $\underline{x}$ est l'image de $\underline{X}$ dans le quotient. Ainsi l'idéal $\langle\underline{x}\rangle$ du quotient est $(n-1)$-engendré. D'après l'invariance par radical (par idéal ici) de la cohomologie de Čech, on en déduit que $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{x}}(\mathbf{S}/\langle X_n\rangle)=0$. Donc $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{X}}(\mathbf{S}/\langle X_n\rangle)=0$. Par conséquent, la multiplication par $X_n$ sur le module $H$ est surjective ce que l'on voulait démontrer.

▷ On a $\check{\mathrm{H}}^0_{\underline{a}}(H)=H$ car de manière générale, les modules de cohomologie de Čech, relativement à une suite $\underline{a}$, sont de $\underline{a}$-torsion (où un module $E$ est de $\underline{a}$-torsion si $\check{\mathrm{H}}^0_{\underline{a}}(E)=E$).

# 9 Les monômes d'une suite quasi-régulière

## 9.1 Suite quasi-régulière et suite quasi-singulière

La quasi-régularité s'occupe de la $\mathbf{A}/\langle \underline{a}\rangle$-dépendance linéaire des monômes en $\underline{a}$ de degré fixé. Elle enrichit donc la Lech-indépendance définie plus haut qui s'occupait uniquement des monômes de degré 1. Cette notion figure notamment dans EGA IV, Etude locale des schémas et des morphismes de schémas, chapitre 0, §15 : Suites $M$-régulières et suites $M$-quasi-régulières. Voici la définition précise :

**Définition 9.1.** *Une suite $\underline{a}$ est dite $M$-quasi-régulière si, en notant $\mathfrak{a} = \langle \underline{a}\rangle$, on a l'implication*

$$\forall\, d \in \mathbb{N}, \quad \forall\, F \in M[\underline{X}]_d, \qquad F(\underline{a}) \in \mathfrak{a}^{d+1}M \;\Rightarrow\; F \in \mathfrak{a}M[\underline{X}]$$

*Dit de manière un peu plus structurelle, une suite $\underline{a}$ est $M$-quasi-régulière si le morphisme canonique surjectif d'évaluation en $\underline{a}$*

$$(M/\mathfrak{a}M)[\underline{X}] \twoheadrightarrow \mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(M)\ , \qquad F \;\longmapsto\; F(\underline{a}) \quad \textit{pour } F \in M[\underline{X}]_d$$

*est injectif c'est-à-dire est un isomorphisme.*

**Remarque 9.2.**

• L'implication de la définition est encore équivalente à la suivante :

$$\forall\, d \in \mathbb{N}, \quad \forall\, F \in M[\underline{X}]_d, \qquad F(\underline{a}) = 0 \;\Rightarrow\; F \in \mathfrak{a}M[\underline{X}]$$

En effet, soit $F$ homogène de degré $d$ tel que $F(\underline{a}) \in \mathfrak{a}^{d+1}M$. Alors il existe un polynôme $G \in \mathfrak{a}M[\underline{X}]_d$ tel que $F(\underline{a}) = G(\underline{a})$ (écrire $\mathfrak{a}^{d+1}M = \mathfrak{a}.\mathfrak{a}^d M$). On se ramène à du « $= 0$ » via $(F-G)(\underline{a}) = 0$ d'où $F - G \in \mathfrak{a}M[\underline{X}]$. Comme $G \in \mathfrak{a}M[\underline{X}]$, il en est de même de $F$.

• La quasi-régularité d'un seul élément $a$ dit que pour tout $d \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in M$, une appartenance $a^d x \in a^{d+1}M$ implique $x \in aM$.

• Une suite $\underline{a}$ est quasi-régulière si pour tout $d \in \mathbb{N}$, les classes des monômes $a^\alpha$ avec $|\alpha| = d$ forment une $\mathbf{A}/\langle \underline{a}\rangle$-base de $\langle \underline{a}\rangle^d/\langle \underline{a}\rangle^{d+1}$.

En particulier, deux suites *de même longueur* engendrant le même idéal sont simultanément quasi-régulières ou non. □

Tout comme on a des relations triviales linéaires $a_i a_j - a_j a_i = 0$ pour les monômes de degré 1 en $\underline{a}$, on a des relations triviales linéaires pour les monômes de degré $d$. Elles sont du type $a_i(a_j a^\beta) - a_j(a_i a^\beta) = 0$ pour $|\beta| = d-1$. Si $\underline{a}$ est 1-sécante (*i.e.* si le module des syzygies entre les $a_i$ est engendré par les relateurs triviaux) alors une relation linéaire entre les $(a^\alpha)_{|\alpha|=d}$ est combinaison linéaire des $a_i\varepsilon_{j,\beta} - a_j\varepsilon_{i,\beta}$ où $\varepsilon_{i,\beta}$ est l'élément de la base canonique de $\mathbf{A}^N$ avec $N = \binom{n+d-1}{d-1}$ qui correspond au monôme $a_i a^\beta$ avec $|\beta| = d-1$. Une fois que l'on sait cela, il est immédiat qu'une suite 1-sécante est quasi-régulière. C'est exactement le cheminement de Bourbaki dans son théorème 1 du paragraphe 9 d'Algèbre Homologique (Algèbre chap. X). Il fait reposer l'implication $(iii) \Rightarrow (v)$ sur l'implication plus forte $(iii) \Rightarrow (iv)$.

Cette section a pour but de donner une preuve directe et élémentaire de l'implication $(iii) \Rightarrow (v)$ de Bourbaki *i.e.* du résultat « 1-sécante ⇒ quasi-régulière ». L'hypothèse et la conclusion sont intimement liées aux relations entre les monômes en $\underline{a}$ de degré fixé. Par ailleurs, une autre condition fait intervenir des monômes en $\underline{a}$ : il s'agit de l'appartenance $0 \in \mathcal{S}(\underline{a})$ (provoquée par une hypothèse idoine sur la Kdim) qui se présente sous la forme $(a_1 \cdots a_n)^e \in \langle (a_1 \ldots a_{n-1})^e a_n^{e+1},\ \ldots,\ a_1^e a_2^{e+1},\ a_1^{e+1}\rangle$ pour un certain $e \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la suite $\underline{a}$ est dite *singulière*. En particulier, si $\underline{a}$ est singulière, on a l'appartenance, plus faible bien sûr, $(a_1 \cdots a_n)^e \in \langle a_1^{e+1},\ \ldots,\ a_n^{e+1}\rangle$. Une telle suite sera dite *quasi-singulière*. On peut définir la même notion, relativement à un module (cf. la section VI-1.2 sur la dimension de Krull d'un module).

**Définition 9.3.** *Une suite $\underline{a}$ est dite $M$-quasi-singulière si pour tout $x \in M$, il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que $(a_1 \cdots a_n)^e x \in \underline{a}^{e+1}M$.*

Dans ce qui suit, on ne va pas cesser de jongler entre la quantification sur $e \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Le contexte permettra toujours de choisir l'un ou l'autre des quantificateurs en vertu de l'équivalence élémentaire ci-dessous, où interviennent les deux « monômes en $\underline{a}$ » $(a_1 \cdots a_n)^e$ et $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}$, ainsi que les deux suites $\underline{a}^{e+1} = (a_1^{e+1}, \ldots, a_n^{e+1})$ et $\underline{a}^{\alpha+\mathbb{1}} = (a_1^{\alpha_1+1}, \ldots, a_n^{\alpha_n+1})$.

Pour tout $x \in M$, on a : $\quad \exists\, e \in \mathbb{N}, \quad (a_1 \cdots a_n)^e x \;\in\; \underline{a}^{e+1}M \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad a^\alpha x \;\in\; \underline{a}^{\alpha+\mathbb{1}}M$

**Définition 9.4.** *Un élément $x$ vérifiant l'une des deux conditions sera dit $\underline{a}$-quasi-singulier. L'ensemble des éléments $\underline{a}$-quasi-singuliers forme un module appelé « sous-module de $\underline{a}$-quasi-singularité de $M$ » et noté* $\mathrm{QS}(\underline{a}\,;M)$. *Bref, on définit*

$$\mathrm{QS}(\underline{a}\,;M) \;=\; \big\{x\in M \;\mid\; \exists\, e\in\mathbb{N},\ (a_1\cdots a_n)^e x \;\in\; \underline{a}^{e+1}M\big\} \;=\; \big\{x\in M \;\mid\; \exists\,\alpha\in\mathbb{N}^n,\ a^\alpha x \;\in\; \underline{a}^{\alpha+\mathbb{1}}M\big\}.$$

Avec cette définition, une suite $\underline{a}$ est $M$-quasi-singulière si et seulement si $\mathrm{QS}(\underline{a}\,;M)=M$. Une seconde remarque : il est clair que $\underline{a}M\subset\mathrm{QS}(\underline{a}\,;M)$. Dans la suite, on va voir que si la suite $\underline{a}$ est 1-sécante sur $M$, on a l'inclusion réciproque. Autrement dit, « à part les multiples de $\underline{a}$, il n'existe pas d'élément $\underline{a}$-quasi-singulier » ou encore « les éléments quasi-singuliers sont triviaux » pourvu que $\underline{a}$ soit 1-sécante sur $M$. Mieux, l'égalité $\mathrm{QS}(\underline{a}\,;M)=\underline{a}M$ est équivalente au fait que la suite $\underline{a}$ est quasi-régulière.

Voici une autre façon de caractériser, de manière imagée, les éléments de $\mathrm{QS}(\underline{a}\,;M)$ : un élément $x\in M$ est dans $\mathrm{QS}(\underline{a}\,;M)$ s'il possède une *appartenance $\underline{a}$-monomiale non banale*. Justifions un peu cette terminologie dans le cas où $M=\mathbf{A}$. Il est naturel de définir une appartenance $\underline{a}$-monomiale non banale comme étant une appartenance du type $a^\alpha\in\langle a^{\nu_1},\dots,a^{\nu_s}\rangle$ où $\alpha\not\succcurlyeq\nu_i$ et $\succcurlyeq$ désigne la relation d'ordre de $\mathbb{N}^n$ composante à composante.

Un exemple classique d'appartenance $\underline{a}$-monomiale non banale : dans la définition précédente, on prend $s=n$ et $\nu_i=(0,\dots,\alpha_i+1,\dots,0)$, c'est-à-dire $a^\alpha\in\langle a_1^{\alpha_1+1},\dots,a_n^{\alpha_n+1}\rangle$, ce que l'on écrit de manière condensée $a^\alpha\in\langle\underline{a}^{\alpha+\mathbb{1}}\rangle$.

Encore plus simple : on reprend l'exemple précédent avec $\alpha=(e,\dots,e)$ où $e\in\mathbb{N}$. On pourrait qualifier une telle appartenance *d'appartenance $\underline{a}$-monomiale non banale standard* : $(a_1\cdots a_n)^e\in\langle a_1^{e+1},\dots,a_n^{e+1}\rangle=\langle\underline{a}^{e+1}\rangle$.

En fait, on peut se contenter de considérer les appartenances monomiales non banales standard au vu du résultat suivant :

**Proposition 9.5.** *Une appartenance $\underline{a}$-monomiale non banale génère une appartenance $\underline{a}$-monomiale non banale standard. Plus précisément, s'il existe $\alpha,\nu_1,\dots,\nu_s\in\mathbb{N}^n$ tel que $a^\alpha\in\langle a^{\nu_1},\dots,a^{\nu_s}\rangle$ avec $\alpha\not\succcurlyeq\nu_i$ pour tout $i$, alors il existe $e\in\mathbb{N}$ tel que $(a_1\cdots a_n)^e\in\langle a_1^{e+1},\dots,a_n^{e+1}\rangle=\langle\underline{a}^{e+1}\rangle$.*

***Preuve.*** On considère une appartenance du type $a^\alpha\in\langle a^{\nu_1},\dots,a^{\nu_s}\rangle$ avec $\alpha\not\succcurlyeq\nu_i$ pour tout $i$. On choisit $\varepsilon=(e,\dots,e)$ de sorte que $\varepsilon\succcurlyeq\alpha$. Par exemple, on peut prendre $e=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\alpha_i$ la plus grande composante de $\alpha$. On multiplie l'appartenance initiale par $a^{\varepsilon-\alpha}$ de sorte que, en notant $\mu_i=\varepsilon-\alpha+\nu_i$, on tombe sur $a^\varepsilon\in\langle a^{\mu_1},\dots,a^{\mu_s}\rangle$. Comme $\alpha\not\succcurlyeq\nu_i$, on a $\varepsilon\not\succcurlyeq\mu_i$ donc il existe une composante de $\mu_i$ qui est strictement supérieure à $e$, *i.e.* supérieure à $e+1$. Ainsi $a^{\mu_i}\in\langle a_1^{e+1},\dots,a_n^{e+1}\rangle$. En se souvenant que $a^\varepsilon\in\langle a^{\mu_1},\dots,a^{\mu_s}\rangle$, on a donc $a^\varepsilon\in\langle a_1^{e+1},\dots,a_n^{e+1}\rangle$ ce qui est l'appartenance voulue car $a^\varepsilon$ est exactement $(a_1\cdots a_n)^e$. □

Par exemple, pour des indéterminées d'un anneau de polynômes, il n'y a pas d'appartenance monomiale non banale. La célèbre conjecture monomiale de Hochster dit qu'un système de paramètres se comporte comme une suite d'indéterminées. Plus précisément, si $\underline{a}$ est un système de paramètres d'un anneau local *noethérien*, alors il n'y a pas d'appartenance $\underline{a}$-monomiale non banale (standard).

Dans la suite, on sera amené à utiliser la terminologie suivante :

**Définition 9.6.** *Une suite $\underline{a}$ est dite $M$-unimodulaire si $\underline{a}M=M$.*

## 9.2 Une suite 1-sécante est quasi-régulière

La proposition suivante dit que si $\underline{a}$ est 1-sécante sur $M$ alors les éléments de $M$ qui possèdent une appartenance $\underline{a}$-monomiale non banale sont dans $\underline{a}M$, ou encore les éléments $\underline{a}$-quasi-singuliers de $M$ sont triviaux *i.e.* dans $\underline{a}M$.

**Proposition 9.7.** *Si la suite $\underline{a}$ est 1-sécante sur $M$, alors* $\mathrm{QS}(\underline{a}\,;M)=\underline{a}M$.
*En particulier, relativement à un module, une suite 1-sécante et quasi-singulière est unimodulaire.*

***Preuve.*** Soit $x\in M$. Soit $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$ tel que $a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}x\in a_1^{\alpha_1+1}M+\cdots+a_n^{\alpha_n+1}M$. On va montrer que $x\in\underline{a}M$.

On procède par récurrence sur $d = |\alpha|$. Pour $d = 0$, c'est immédiat (pour $d = 1$ cela découle de l'hypothèse de 1-sécance). Soit $d \geqslant 1$. On peut supposer $\alpha_1 \geqslant 1$ de sorte que $\alpha_2 + \cdots + \alpha_n < d$. On a

$$a_1^{\alpha_1}\,(a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}\,x \;+\; a_1\,\bullet) \quad\in\quad a_2^{\alpha_2+1}M \,+\, \cdots \,+\, a_n^{\alpha_n+1}M$$

Puisque $\underline{a}$ est 1-sécante, la suite $(a_1^{\alpha_1}, a_2^{\alpha_2+1}, \ldots, a_n^{\alpha_n+1})$ l'est également, d'après le $(a, b, ab)$-trick en homologie Koszul pour $k = 1$. Par conséquent, on a

$$a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}\,x \quad\in\quad a_1M \,+\, a_2^{\alpha_2+1}M \,+\, \cdots \,+\, a_n^{\alpha_n+1}M$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $x \in \underline{a}M$. □

A présent, montrons que si les éléments $\underline{a}$-quasi-singuliers sont triviaux alors $\underline{a}$ est quasi-régulière (on verra plus loin que c'est même une équivalence). La preuve de cette implication repose sur une propriété de la relation d'ordre $\preccurlyeq$ de $\mathbb{N}^n$ composante à composante donnée dans la remarque suivante.

**Remarque 9.8.** Soit $d \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha| = |\beta| = d$. On a l'implication évidente suivante : $\beta \preccurlyeq \alpha \Rightarrow \beta = \alpha$, qui, prise à rebours donne : si $\alpha \neq \beta$ alors il existe $i$ tel que $\beta_i \geqslant \alpha_i + 1$. En particulier, si $\alpha \neq \beta$ alors $a^\beta \in \langle \underline{a}^{\alpha+\mathbb{1}}\rangle$.

**Proposition 9.9.** *Si* $\mathrm{QS}(\underline{a}\,; M) = \underline{a}M$ *alors* $\underline{a}$ *est* $M$*-quasi-régulière.*

***Preuve.*** Soit $d \in \mathbb{N}$. Considérons une combinaison $\sum_{|\beta|=d} a^\beta x_\beta = 0$ entre les monômes de degré $d$ de $\underline{a}$ avec des $x_\beta \in M$. On veut montrer que chaque $x_\beta$ est dans $\underline{a}M$. Soit $\alpha$ fixé tel que $|\alpha| = d$. D'après la remarque 9.8, on a $a^\alpha x_\alpha = -\sum_{\beta\neq\alpha} a^\beta x_\beta \in \underline{a}^{\alpha+\mathbb{1}}M$. Ainsi $x_\alpha$ appartient à $\mathrm{QS}(\underline{a}\,; M)$. L'hypothèse fournit alors $x_\alpha \in \underline{a}M$. □

En mettant bout à bout les deux propositions précédentes, on obtient directement :

**Théorème 9.10.** *Relativement à un module, une suite* 1*-sécante est quasi-régulière.*

## 9.3 Une caractérisation de la quasi-régularité

Une suite $\underline{a}$ est $M$-quasi-régulière si et seulement si les seuls éléments $\underline{a}$-quasi-singuliers sont triviaux :

$$\underline{a} \text{ est } M\text{-quasi-régulière} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \Big(\forall\,\beta \in \mathbb{N}^n,\ \forall\, x \in M, \quad a^\beta x \in \underline{a}^{\beta+\mathbb{1}}M \quad\Rightarrow\quad x \in \underline{a}M\Big)$$

La proposition 9.9 montre l'implication facile $\Leftarrow$. Occupons-nous de $\Rightarrow$ dans le résultat ci-dessous.

**Proposition 9.11.** *Si* $\underline{a}$ *est* $M$*-quasi-régulière, alors* $\mathrm{QS}(\underline{a}\,; M) = \underline{a}M$.
*En particulier, relativement à un module, une suite quasi-régulière et quasi-singulière est unimodulaire.*

***Preuve.*** Soit $x \in \mathrm{QS}(\underline{a}\,; M)$. Il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que $(a_1\cdots a_n)^e x \in a_1^{e+1}M + \cdots + a_n^{e+1}M$. Il s'agit de montrer que $x \in \underline{a}M$. Avant de commencer la preuve, on remarque que dans l'appartenance précédente, à gauche, il y a un monôme en $\underline{a}$ de degré $ne$ et à droite des monômes de degré $e + 1$.

▷ Supposons $ne < e + 1$, auquel cas soit $e = 0$, soit $n = 1$. Si $e = 0$, c'est fini. Si $n = 1$, on a $a_1^e x \in a_1^{e+1}M$. Le fait que $\underline{a}$ soit $M$-quasi-régulière fournit directement $x \in a_1M$.

▷ Reste le cas $ne \geqslant e + 1$, le plus difficile.

Montrons par récurrence que, pour tout $r \leqslant ne - (e + 1)$, on a

$$(\clubsuit)_r \qquad\qquad (a_1\cdots a_n)^e x \;\in\; \langle\underline{a}\rangle^r\,\big(a_1^{e+1}M + \cdots + a_n^{e+1}M\big)$$

Le cas $r = 0$ est évident car $x \in \mathrm{QS}(\underline{a}\,; M)$. Désormais $1 \leqslant r \leqslant ne - (e + 1)$. Supposons l'appartenance vérifiée pour $r - 1$ et montrons-la pour $r$. On explicite l'appartenance $(\clubsuit)_{r-1}$ en :

$$(a_1\cdots a_n)^e x \;=\; \sum_\beta a^\beta x_\beta$$

où la somme est faite sur les $\beta \in \mathbb{N}^n$ s'écrivant $\gamma + \alpha_i$ où $\alpha_i = (0, \ldots, e + 1, \ldots, 0)$ et $|\gamma| = r - 1$ ; en particulier $|\beta| = r + e$.

On utilise à présent que $r+e \leqslant ne$ (car $r+e \leqslant ne-1$) et on va écrire $(a_1 \cdots a_n)^e$ comme un multiple d'un monôme de degré $r+e$ qui n'est pas du type $a^\beta$ précédent. Pour cela, on effectue la division euclidienne de $r+e$ par $e$ c'est-à-dire $r+e = qe+p$ avec $0 \leqslant p < e$ (comme $qe \leqslant r+e \leqslant ne-1 < ne$, on a $q < n$). Ainsi $(a_1 \cdots a_n)^e = a_1^e \cdots a_q^e a_{q+1}^p \times \bullet$ est multiple d'un certain $a^\beta$ de degré $r+e$ mais qui n'est pas du type précédent. Par conséquent, la propriété de $M$-quasi-régularité appliquée à $d = r+e$ implique que les $x_\beta$ sont dans $\underline{a}M$. On a donc

$$(a_1 \cdots a_n)^e x \ \in \ \langle \underline{a} \rangle^{r-1} \langle \underline{a} \rangle \left( a_1^{e+1} M + \cdots + a_n^{e+1} M \right)$$

d'où la propriété au rang $r$.

Maintenant, on applique (♤) à $r = ne-(e+1)$. Par conséquent $(a_1 \cdots a_n)^e x = \sum_\beta a^\beta x_\beta$ où la somme porte sur les $\beta$ du type $\beta = \gamma + \alpha_i$ avec $|\gamma| = r$ et $\alpha_i = (0, \ldots, e+1, \ldots, 0)$. D'après la $M$-quasi-régularité de $\underline{a}$, on conclut que $x \in \underline{a}M$. □

## 9.4 Quelques propriétés supplémentaires

Grâce à cette caractérisation de la quasi-régularité, on peut montrer que la quasi-régularité se comporte bien vis-à-vis de l'exponentiation.

**Proposition 9.12.** *Si $\underline{a}$ est $M$-quasi-régulière alors pour tout $\nu \in \mathbb{N}^n$, la suite $\underline{a}^\nu$ est $M$-quasi-régulière.*

***Preuve.*** La proposition est évidente si $\nu \not\succcurlyeq \mathbb{1}$ car alors $\nu$ possède au moins une composante nulle, donc la suite $\underline{a}^\nu$ est unimodulaire. Supposons désormais $\nu \succcurlyeq \mathbb{1}$. Il suffit de prouver l'implication suivante (hérédité de la récurrence sur $\mathbb{N}^n$) pour tout $\varepsilon_i$ vecteur de la base canonique :

$$\underline{a} \text{ quasi-régulière et } \underline{a}^\nu \text{ quasi-régulière} \quad \Longrightarrow \quad \underline{a}^{\nu+\varepsilon_i} \text{ quasi-régulière}$$

Soit $\beta$ tel que $a^\beta x \in \underline{a}^{\beta+\nu+\varepsilon_i} M$. On veut montrer que $x \in \underline{a}^{\nu+\varepsilon_i} M$. Tout d'abord, on a évidemment $a^\beta x \in \underline{a}^{\beta+\nu} M$. Comme $\underline{a}^\nu$ est quasi-régulière, on a $x \in \underline{a}^\nu M$. On écrit cette dernière appartenance en $x = \sum a_j^{\nu_j} x_j$. Pour obtenir ce que l'on souhaite, il suffit donc de montrer $x_i \in \underline{a}M$.

On a $x - a_i^{\nu_i} x_i = \sum_{j \neq i} a_j^{\nu_j} x_j \in \underline{a}^{\nu+\varepsilon_i} M$. On multiplie par $a^\beta$ d'où $a^\beta x - a^\beta a_i^{\nu_i} x_i \in a^\beta \underline{a}^{\nu+\varepsilon_i} M \subset \underline{a}^{\beta+\nu+\varepsilon_i} M$. Or $a^\beta x \in \underline{a}^{\beta+\nu+\varepsilon_i} M$ par hypothèse, donc on récupère $a^\beta a_i^{\nu_i} x_i \in \underline{a}^{\beta+\nu+\varepsilon_i} M$ ce qui s'écrit encore $a^{\beta+\nu_i\varepsilon_i} x_i \in \underline{a}^{\beta+\nu+\varepsilon_i} M$. On utilise à présent que $\nu \succcurlyeq \mathbb{1}$, ainsi $\nu + \varepsilon_i \succcurlyeq \nu_i\varepsilon_i + \mathbb{1}$ (inégalité largement vérifiée pour $j \neq i$ et c'est une égalité pour $j = i$). Donc $a^{\beta+\nu_i\varepsilon_i} x_i \in \underline{a}^{\beta+\nu_i\varepsilon_i+\mathbb{1}} M$. Comme $\underline{a}$ est quasi-régulière, on obtient $x_i \in \underline{a}M$ ce qu'il fallait démontrer. □

Voici un résultat qui fait appel à l'exponentiation d'une suite quasi-régulière.

**Proposition 9.13.** *Soit $\mathfrak{a}$ radicalement engendré par $n$ éléments et contenant une suite quasi-régulière de longueur $n+1$. Alors $1 \in \mathfrak{a}$.*

***Preuve.*** Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite telle que $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\underline{a}}$. Soit $\underline{b}$ une suite quasi-régulière de longueur $n+1$ contenue dans $\mathfrak{a}$. Il existe un exposant $e$ tel que $\underline{b}^e \in \langle \underline{a} \rangle$. La suite $\underline{b}^e$ est aussi quasi-régulière d'après la proposition 9.12, donc en particulier Lech-indépendante. En utilisant le résultat de Lech (cf proposition 4.5), on en déduit que $1 \in \langle \underline{a} \rangle$ donc $1 \in \mathfrak{a}$. □

Voici un cas particulier, démontré sans utiliser l'exponentiation.

**Proposition 9.14.** *Soit $\underline{a}$ une suite quasi-régulière de longueur $n$. Si $\langle \underline{a} \rangle$ est radicalement $(n-1)$-engendré alors $1 \in \langle \underline{a} \rangle$.*

***Preuve.*** Soit $\underline{b}$ une suite de longueur $n-1$ qui engendre radicalement $\langle \underline{a} \rangle$ c'est-à-dire telle que $\sqrt{\underline{a}} = \sqrt{\underline{b}}$. On a $\check{\mathrm{H}}_{\underline{b}}^n(\mathbf{A}) = 0$. Or $\check{\mathrm{H}}_{\underline{b}}^i(\mathbf{A}) \simeq \check{\mathrm{H}}_{\underline{a}}^i(\mathbf{A})$ pour tout $i$. Donc $\check{\mathrm{H}}_{\underline{a}}^n(\mathbf{A}) = 0$ ce qui implique que la suite $\underline{a}$ est quasi-singulière. Comme $\underline{a}$ est supposée quasi-régulière, cela force $1 \in \langle \underline{a} \rangle$ d'après la proposition 9.11. □

## 10 1-sécance et dimension de Krull

Cette section anticipe un peu sur le chapitre suivant (confer la définition VI-1.2 pour la définition d'une suite $M$-singulière). Nous l'avons volontairement laissée ici car il sera surtout question de propriétés sur les suites 1-sécantes.

Une suite $M$-singulière est $M$-quasi-singulière (ce qui s'écrit de manière cryptique : $\mathcal{S}(\underline{a})^{-1}M = 0 \Rightarrow \mathrm{QS}(\underline{a}\,; M) = M$). De plus, le caractère 1-sécant de $\underline{a}$ empêche l'existence d'éléments quasi-singuliers non triviaux (cf. proposition 9.7). Par conséquent :

**Proposition 10.1.** *Si $\underline{a}$ est $M$-singulière et 1-sécante sur $M$ alors $\underline{a}$ est $M$-unimodulaire. Autrement dit :*

$$\left\{\begin{array}{l}\mathcal{S}(\underline{a})^{-1}M = 0\\ \mathrm{H}_1(\underline{a}\,; M) = 0\end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad M = \underline{a}M$$

Comme application, voici une démonstration de l'inégalité $\mathrm{Gr} \leqslant \mathrm{Kdim}$ pour un module de type fini. Nous démontrerons cette inégalité sans hypothèse de finitude sur le module à la proposition VI-3.1 à l'aide de la cohomologie de Čech.

**Théorème 10.2.** *Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module de type fini. Pour tout entier $d$, on a*

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Kdim}\, M \leqslant d\\ \mathrm{Gr}(\underline{a}\,; M) \geqslant d+1\end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad M = \underline{a}M$$

***Preuve.*** On pose $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\operatorname{Ann} M$ et on note $\underline{b}$ l'image de $\underline{a}$ dans $\mathbf{B}$. On a $\mathrm{Gr}_{\mathbf{B}}(\underline{b}\,; M) \geqslant d+1$. Comme $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant d$ et que Gr est invariant par radical, on peut supposer que $\underline{b}$ est de cardinal $d+1$. D'une part, $\underline{b}$ est $M$-singulière (car $\mathrm{Kdim}\, M \leqslant d$ et $\#\underline{b} = d+1$). D'autre part, $\underline{b}$ est complètement sécante sur $M$ (car $\mathrm{Gr}_{\mathbf{B}}(\underline{b}\,; M) \geqslant d+1 = \#\underline{b}$) donc en particulier 1-sécante sur $M$. On applique la proposition 10.1 à la suite $\underline{b}$ de l'anneau $\mathbf{B}$ et au $\mathbf{B}$-module $M$ ce qui donne $M = \underline{b}M$. En remontant à $\mathbf{A}$, on obtient $M = \underline{a}M$ car $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\operatorname{Ann} M$. □

Signalons une preuve de 10.1 légèrement différente de celle présentée ci-dessus. Les ingrédients sont globalement les mêmes, à savoir l'utilisation du $(a, b, ab)$-trick en homologie Koszul pour $k = 1$. Mais elle n'est pas inintéressante car elle permet de dégager un lemme peu répandu ( ?) concernant les suites 1-sécantes. Pour simplifier l'exposé, on la présente avec un anneau, mais elle fonctionnerait tout aussi bien avec un module.

**Lemme 10.3.** *Si $\underline{a}$ est 1-sécante alors la suite amputée d'un terme $\underline{a}' = \underline{a} \setminus a_i$ est 1-sécante sur $\mathbf{A}/\langle a_i\rangle$.*

***Preuve du lemme.*** Pour faire simple, supposons $i = 1$. Considérons des $\lambda_k \in \mathbf{A}$ tels que

$$\overline{\lambda_2}\overline{a_2} + \cdots + \overline{\lambda_n}\overline{a_n} = 0 \quad \text{dans } \mathbf{A}/\langle a_1\rangle$$

Alors il existe $\lambda_1 \in \mathbf{A}$ tel que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$$

Comme la suite $\underline{a}$ est 1-sécante, il existe une matrice antisymétrique $\Omega$ telle que

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}\Omega$$

On a alors, dans le quotient $\mathbf{A}/\langle a_1\rangle$, l'égalité suivante (ne pas oublier que $a_1$ est nul dans le quotient) :

$$\begin{bmatrix}\overline{\lambda_2} & \cdots & \overline{\lambda_n}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{a_2} & \cdots & \overline{a_n}\end{bmatrix}\Omega^-$$

où $\Omega^-$ désigne la sous-matrice carrée de taille $n-1$ en bas à droite de $\Omega$, qui est antisymétrique et donc $(a_2, \ldots, a_n)$ est 1-sécante sur $\mathbf{A}/\langle a_1\rangle$. □

***Nouvelle preuve de 10.1.*** L'hypothèse $0 \in \mathcal{S}(\underline{a})$ dit qu'il existe un exposant $e \in \mathbb{N}$ tel que

$$(a_1 \cdots a_n)^e \ \in \ \langle a_1^{e+1}, \ldots, a_n^{e+1} \rangle$$

ce que l'on écrit :

$$\big((a_2 \cdots a_n)^e \ + \ \bullet a_1\big) a_1^e \ \in \ \langle a_2^{e+1}, \ldots, a_n^{e+1} \rangle$$

Comme la suite $\underline{a}$ est 1-sécante, il en est de même de la suite $(a_1^e, a_2^{e+1}, \ldots, a_n^{e+1})$ d'après le $(a, b, ab)$-trick en homologie, et on en déduit

$$(a_2 \cdots a_n)^e \ + \ \bullet a_1 \ \in \ \langle a_2^{e+1}, \ldots, a_n^{e+1} \rangle$$

puis

$$(a_2 \cdots a_n)^e \ \in \ \langle a_1, a_2^{e+1}, \ldots, a_n^{e+1} \rangle$$

Par conséquent,

$$(a_2 \cdots a_n)^e \ \in \ \langle a_2^{e+1}, \ldots, a_n^{e+1} \rangle \quad \text{dans le quotient } \mathbf{A}/\langle a_1 \rangle$$

On va voir que l'on se retrouve dans la situation initiale avec une suite $\underline{a}' = (a_2, \ldots, a_n)$ de longueur $n-1$ de l'anneau $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\langle a_1 \rangle$. Tout d'abord, on a bien $0 \in \mathcal{S}(\underline{a}')$ d'après l'appartenance ci-dessus. Ensuite, la suite $\underline{a}'$ est 1-sécante sur $\mathbf{A}'$ d'après le lemme. On recommence jusqu'à tomber sur $1 = 0$ dans $\mathbf{A}/\langle \underline{a} \rangle$, d'où $1 \in \langle \underline{a} \rangle$. □

# Chapitre VI

# Dimension de Krull

## 1 Suites singulières et monoïdes bords

### 1.1 Dimension de Krull d'un module

Dans [LQ11] est exposée une approche constructive de la dimension de Krull d'un anneau commutatif. Cette approche se généralise naturellement à un module et permet de donner une définition constructive de la dimension d'un module, qui coïncide avec la définition classique.

Rappelons qu'une suite $\underline{a} = (a_0, \dots, a_d)$ d'éléments de $\mathbf{A}$ est dite singulière si son monoïde bord

$$\mathcal{S}(\underline{a}) \;=\; a_0^{\mathbb{N}} \Big( a_1^{\mathbb{N}} \big( \cdots \big( a_d^{\mathbb{N}} \, (1 + a_d \mathbf{A}) + \cdots \big) + a_1 \mathbf{A} \big) + a_0 \mathbf{A} \Big)$$

contient 0. Cela revient à demander l'existence d'un exposant $e \in \mathbb{N}$ et de scalaires $u_0, \dots, u_d$ de $\mathbf{A}$ tels que

$$a_0^e \Big( a_1^e \big( \cdots \big( a_d^e (1 + u_d a_d) + \cdots \big) + u_1 a_1 \big) + u_0 a_0 \Big) \;=\; 0$$

Dans [LQ11], la dimension de Krull est définie de manière récurrente en utilisant des monoïdes bords sur des suites à un seul élément. Ici nous adoptons le point de vue de [DQ06], équivalent à la définition récurrente via la proposition 2.8 du chapitre XIII de [LQ11].

**Définition 1.1.** *Pour un entier $d \geqslant 0$, on écrit* $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant d$ *lorsque toute suite $(a_0, \dots, a_d)$ ayant $d+1$ éléments est singulière, ou encore lorsque :*

$$\forall\, a_0, \dots, a_d \in \mathbf{A}, \quad \exists\, e \in \mathbb{N}, \qquad (a_0 \cdots a_d)^e \;\in\; \langle\, (a_0 \cdots a_{d-1})^e a_d^{e+1},\, \dots,\, a_0^e a_1^{e+1},\, a_0^{e+1} \,\rangle$$

Cette définition est motivée par le fait qu'elle est équivalente à la définition classique (cf. [DQ06, Théorème 2.7] ou faire $M = \mathbf{A}$ dans la proposition 1.4). Autrement dit, on a $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant d$ si et seulement si la longueur maximale des chaînes strictement croissantes d'idéaux premiers est inférieure ou égale à $d$.

Dans le but de généraliser tout cela au cas d'un module, commençons par donner la définition d'une suite singulière pour un module. Cela repose sur la constatation suivante : pour $M = \mathbf{A}$, l'égalité $\mathcal{S}(\underline{a})^{-1}\mathbf{A} = 0$ est équivalente à $0 \in \mathcal{S}(\underline{a})$.

**Définition 1.2.** *Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module. Une suite $(a_0, \dots, a_d)$ d'éléments de $\mathbf{A}$ est dite $M$-singulière si $\mathcal{S}(\underline{a})^{-1}M = 0$, c'est-à-dire si pour tout $x \in M$, il existe un exposant $e \in \mathbb{N}$ et des scalaires $u_0, \dots, u_d \in \mathbf{A}$ tels que*

$$\Big( a_0^e \big( a_1^e \big( \cdots (a_d^e (1 + u_d a_d) + \cdots) + u_1 a_1 \big) + u_0 a_0 \big) \Big)\, x \;=\; 0$$

*De manière condensée, c'est équivalent à : pour tout $x \in M$, il existe $s \in \mathcal{S}(\underline{a})$ tel que $sx = 0$, ou encore pour tout $x \in M$,* $\operatorname{Ann} x \cap \mathcal{S}(\underline{a}) \neq \emptyset$.

**Remarque 1.3.** Une suite $(a_0, \dots, a_d)$ est $M$-singulière si et seulement si pour tout $x \in M$, il existe un exposant $e \in \mathbb{N}$ tel que

$$(a_0 \cdots a_d)^e\, x \;\in\; (a_0 \cdots a_{d-1})^e a_d^{e+1}\, \mathbf{A}x \;+\; \cdots \;+\; a_0^e a_1^{e+1}\, \mathbf{A}x \;+\; a_0^{e+1}\, \mathbf{A}x$$

En particulier, si $\underline{a}$ est $M$-singulière, pour tout $x \in M$, il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que

$$(a_0 \cdots a_d)^e\, x \;\in\; (a_0 \cdots a_{d-1})^e a_d^{e+1} M \;+\; \cdots \;+\; a_0^e a_1^{e+1} M \;+\; a_0^{e+1} M$$

et, a fortiori, tel que :

$$(a_0 \cdots a_d)^e\, x \;\in\; a_d^{e+1} M \;+\; \cdots \;+\; a_1^{e+1} M \;+\; a_0^{e+1} M$$

**Proposition 1.4.** *Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module. Il y a équivalence entre*

1. *Toute suite de $\mathbf{A}$ ayant $d+1$ éléments est $M$-singulière.*
2. *La longueur maximale des chaînes strictement croissantes d'idéaux premiers du support de $M$ est inférieure ou égale à $d$.*

*On rappelle que* $\operatorname{Supp} M$ *est l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ tels que $M_{\mathfrak{p}}$ soit non nul. C'est un ensemble stable par sur-inclusion, i.e.*

$$\big(\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M \quad et \quad \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}\big) \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{q} \in \operatorname{Supp} M$$

*Par ailleurs, un idéal premier $\mathfrak{p}$ est dans le support de $M$ si et seulement si $\mathfrak{p}$ contient l'annulateur d'un élément $x \in M$ (en effet, $x \neq 0$ dans $M_{\mathfrak{p}} \Leftrightarrow \operatorname{Ann} x \subset \mathfrak{p}$).*

On détaille la preuve, qui est similaire à celles des lemmes 2.4 et 2.5 de [DQ06].

***Preuve.*** $1 \Rightarrow 2$. Par l'absurde : supposons qu'il existe une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers du support de $M$ de longueur $d+1$

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{d+1} \subset \operatorname{Supp} M$$

Il existe donc des scalaires $a_0, \dots a_d$ de $\mathbf{A}$ tels que $a_i \in \mathfrak{p}_{i+1} \setminus \mathfrak{p}_i$ pour tout $i$. Comme $\mathfrak{p}_0 \in \operatorname{Supp} M$, il existe un $x \in M$ tel que $\operatorname{Ann} x \subset \mathfrak{p}_0$. Par ailleurs, la suite $\underline{a} = (a_0, \dots, a_d)$ est $M$-singulière par hypothèse, donc il existe un élémént $s$ tel que $s \in \operatorname{Ann} x \cap \mathcal{S}(\underline{a})$. Ainsi $s$ appartient l'idéal premier $\mathfrak{p}_0$. Par définition, $s$ est de la forme $s = (s' + u_0 a_0) a_0^e$ où $s' \in \mathcal{S}(a_1, \dots, a_d)$. Comme $a_0 \notin \mathfrak{p}_0$, on obtient $s' + u_0 a_0 \in \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1$. Et comme $a_0 \in \mathfrak{p}_1$, on obtient $s' \in \mathfrak{p}_1$. En écrivant $s' = (s'' + u_1 a_1) a_1^e \in \mathfrak{p}_1$ et en procédant de la même façon, on obtient $s'' \in \mathfrak{p}_2$. Et ainsi de suite jusqu'à obtenir $1 \in \mathfrak{p}_{d+1}$.

$2 \Rightarrow 1$. Par contraposée : supposons qu'il existe $\underline{a} = (a_0, \dots, a_d)$ tel que $\mathcal{S}(\underline{a})^{-1} M \neq 0$. Il existe donc $x \in M$ tel que $\mathcal{S}(\underline{a}) \cap \operatorname{Ann} x = \emptyset$. On applique alors le fait suivant (cf. lemme 2.2 de [DQ06]) :

> *Soit un idéal $I$ de $\mathbf{A}$ et un monoïde $S = (S' + x\mathbf{A})x^{\mathbb{N}}$, où $S'$ est un monoïde et $x \in \mathbf{A}$. Si $S \cap I = \emptyset$ alors il existe un premier $\mathfrak{p} \supset I$ tel que $x \notin \mathfrak{p}$ et $S' \cap (\mathfrak{p} + x\mathbf{A}) = \emptyset$.*

Il existe donc un premier $\mathfrak{p}_0 \supset \operatorname{Ann} x$ tel que $a_0 \notin \mathfrak{p}_0$ et $\mathcal{S}(a_1, \dots, a_d) \cap (\mathfrak{p}_0 + a_0\mathbf{A}) = \emptyset$. On applique à nouveau le fait avec l'idéal $I = \mathfrak{p}_0 + a_0\mathbf{A}$ : il existe un idéal premier $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_0 + a_0\mathbf{A} \supsetneq \mathfrak{p}_0$ tel que $a_1 \notin \mathfrak{p}_1$ et $\mathcal{S}(a_2, \dots, a_d) \cap (\mathfrak{p}_1 + a_1\mathbf{A}) = \emptyset$. Et ainsi de suite jusqu'à obtenir un idéal premier $\mathfrak{p}_{d+1}$ contenant strictement $\mathfrak{p}_d$. On a ainsi construit une chaîne strictement croissante d'idéaux premiers de $\operatorname{Supp} M$ (car tous les $\mathfrak{p}_i$ contiennent $\operatorname{Ann} x$) de longueur $d+1$. □

On définit la dimension d'un $\mathbf{A}$-module $M$ de la façon suivante :

**Définition 1.5.** *Pour un entier $d \geqslant 0$, on écrit* $\operatorname{Kdim} M \leqslant d$ *lorsque toute suite $(a_0, \dots, a_d)$ d'éléments de $\mathbf{A}$ ayant $d+1$ éléments est $M$-singulière.*

Cette définition est élémentaire dans le sens où la quantification n'a pas lieu sur les idéaux premiers, mais sur les éléments. On verra le caractère opérationnel de cette définition au moment où l'on revisitera le Grothendieck's Vanishing Theorem (cf. section 2). Par ailleurs, si le module $M$ est de type fini, on retrouve la définition usuelle via la dimension de l'anneau $\mathbf{A}/\operatorname{Ann} M$. En effet, sans aucune hypothèse, on a pour tout monoïde $S$ du type $\mathcal{S}(\underline{a})$ où $\underline{a}$ est une suite de $\mathbf{A}$ de longueur $d+1$ :

$$S^{-1}\frac{\mathbf{A}}{\operatorname{Ann} M} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S \cap \operatorname{Ann} M \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, s \in S,\ sM = 0$$

et cette dernière condition est équivalente à $S^{-1}M = 0$ lorsque $M$ est de type fini.

### 1.2 Une inclusion de monoïdes bords

**Proposition 1.6.** *Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. On note $\underline{a}^k = (a_1^k, \dots, a_n^k)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion suivante*

$$\mathcal{S}(\underline{a}) \ \subset \ \mathcal{S}(\underline{a}^k)^{\mathrm{sat}}$$

***Preuve.*** Pour $k = 0$, c'est immédiat. Désormais, on suppose $k \geqslant 1$. On procède par récurrence sur la longueur $n$ de la suite. Pour $n = 0$, c'est facile car le monoïde bord de la suite vide est réduit à 0 et donc son saturé est l'anneau tout entier. Supposons désormais $n \geqslant 1$ et notons $\underline{b} = (a_2, \dots, a_n)$ la suite $\underline{a}$ amputée de son premier terme. Soit $x \in \mathcal{S}(\underline{a})$ que l'on écrit $x = (y - u_1 a_1) a_1^e$ avec $y \in \mathcal{S}(\underline{b})$. On multiplie $x$ par

$$s = (y^{k-1} + y^{k-2}(u_1 a_1) + \cdots + y(u_1 a_1)^{k-2} + (u_1 a_1)^{k-1}) a_1^{(k-1)e}$$

de sorte que

$$sx = (y^k - v_1 a_1^k)(a_1^k)^e$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à $y^k \in \mathcal{S}(\underline{b})$ dit que $y^k \in \mathcal{S}(\underline{b}^k)^{\mathrm{sat}}$, donc il existe $t \in \mathbf{A}$ tel que $ty^k \in \mathcal{S}(\underline{b}^k)$ d'où

$$tsx = (ty^k - tv_1 a_1^k)(a_1^k)^e \ \in \ \big(\mathcal{S}(\underline{b}^k) + a_1^k \mathbf{A}\big)(a_1^k)^{\mathbb{N}} = \mathcal{S}(\underline{a}^k)$$

Autrement dit $x \in \mathcal{S}(\underline{a}^k)^{\mathrm{sat}}$. □

## 2 Cohomologie de Čech et dimension de Krull

Dans cette section, nous mettons à profit la définition de la dimension de Krull donnée à la section précédente pour fournir une nouvelle preuve du fameux « Grothendieck's Vanishing Theorem », que l'on appellera dans la suite « Kdim-Vanishing-Theorem ».

Dans la littérature, le résultat est très souvent énoncé en cohomologie locale noethérienne. Voici par exemple l'énoncé de [BS07] « *Let $M$ be an $R$-module. Then $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ for all $i > \dim(M)$* », l'anneau $R$ étant noethérien. Les auteurs se ramènent au cas d'un module de type fini sur un anneau local avec l'idéal $\mathfrak{a}$ contenu dans le maximal, et procèdent ensuite par récurrence sur la dimension du module. De plus, l'hypothèse noethérienne est déterminante à cause de la présence d'idéaux premiers associés.

Dans d'autres ouvrages, le résultat est seulement énoncé avec l'idéal maximal d'un anneau local. C'est le cas chez [BH98]. Bruns et Herzog font appel au complexe de Čech (car cohomologie locale et cohomologie de Čech coïncident en terrain noethérien) et la preuve est alors réduite au fait évident suivant : « le complexe de Čech d'une suite de longueur $d$ a une cohomologie nulle en degrés $> d$ » !

Signalons tout de même qu'Hamilton et Marley dans [HM07] formulent le théorème en cohomologie de Čech non noethérienne. Cependant, leur condition sur la dimension porte sur l'anneau et non sur le module, et leur démonstration commence par « *It is enough to prove the statement in the case $(R, m)$ is a quasi-local ring* ».

Notre preuve se démarque donc de celles existantes : aucune hypothèse noethérienne n'est requise et la démonstration est directe dans le sens où l'on utilise uniquement les termes de la suite $\underline{a}$ et « rien d'autre ».

### 2.1 Le dernier module de cohomologie de Čech

Concentrons-nous sur le dernier module de cohomologie de Čech c'est-à-dire sur $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(M)$ où $n = \#\underline{a}$ et plus particulièrement sur sa nullité. Le résultat de la proposition n'est en fait qu'une simple reformulation. Mais cette reformulation va s'avérer très utile pour notre preuve du Kdim-Vanishing-Theorem. On voit des traces de cela dans [BS07, exercise 5.1.21], ainsi que dans [ILL+07, exercise 6.29] dans le cas d'une suite réduite à 2 éléments.

On rappelle que la dernière flèche du complexe de Čech de $\underline{a}$ sur $M$ est donnée par

$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_{a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n} \ \longrightarrow \ M_{a_1 \cdots a_n}, \qquad \bigoplus_{i=1}^{n} x_i \ \longmapsto \ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (x_i)_{a_1 \cdots a_n}$$

En notant $M_{a_1\cdots\widehat{a_i}\cdots a_n}$ l'image de $M_{a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n}$ dans $M_{a_1\cdots a_n}$, on a alors

$$\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(M) \;=\; \frac{M_{a_1\cdots a_n}}{M_{\widehat{a_1}a_2\cdots a_n}+\cdots+M_{a_1\cdots a_{n-1}\widehat{a_n}}}$$

**Proposition 2.1.** *On a l'équivalence suivante*

$$\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(M)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, x\in M,\ \forall\, k\in\mathbb{N},\ \exists\, h\in\mathbb{N},\quad (a_1\cdots a_n)^h\, x \;\in\; a_1^{h+k}M+\cdots+a_n^{h+k}M$$

*En particulier, pour $M=\mathbf{A}$, cela prend la forme suivante :*

$$\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A})=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\, k\in\mathbb{N},\ \exists\, h\in\mathbb{N},\quad (a_1\cdots a_n)^h \;\in\; \langle a_1^{h+k},\dots,a_n^{h+k}\rangle$$

**Remarque 2.2.** On voit aisément que l'on a l'implication $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A})=0 \implies \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(M)=0$, implication ancrée dans l'isomorphisme $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(M)\simeq \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A})\otimes_{\mathbf{A}} M$. Par ailleurs, l'inégalité $\mathrm{cd}(\underline{a}\,;M)\leqslant \mathrm{cd}(\underline{a}\,;\mathbf{A})$ (cf. proposition 5.6 du chapitre II) vient corroborer cette remarque.

***Preuve.***

$\Rightarrow$. Supposons $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(M)=0$ c'est-à-dire $M_{a_1\cdots a_n}=M_{\widehat{a_1}a_2\cdots a_n}+\cdots+M_{a_1\cdots a_{n-1}\widehat{a_n}}$. Soit $x\in M$ et $k\in\mathbb{N}$. Considérons l'élément $\dfrac{x}{(a_1\cdots a_n)^k}$ de $M_{a_1\cdots a_n}$. Grâce à l'hypothèse, il existe des $x'_i\in M$ et des exposants $e_i$ tels que

$$\frac{x}{(a_1\cdots a_n)^k} \;=\; \frac{x'_1}{(a_2\cdots a_n)^{e_1}} \;+\;\cdots\;+\; \frac{x'_n}{(a_1\cdots a_{n-1})^{e_n}} \qquad \text{dans } M_{a_1\cdots a_n}$$

On peut bien sûr supposer que $e_i=e$ pour tout $i$. On multiplie l'égalité précédente par $(a_1\cdots a_n)^{e+k}$. Cela fournit

$$(a_1\cdots a_n)^e x \;=\; a_1^{e+k}x_1+\cdots+a_n^{e+k}x_n \qquad \textit{dans le localisé } M_{a_1\cdots a_n}$$

où les $x_i$ sont dans $M$. En multipliant par une certaine puissance de $a_1\cdots a_n$, on obtient une appartenance *dans* $M$ du type

$$(a_1\cdots a_n)^h\, x \;\in\; a_1^{h+k}M+\cdots+a_n^{h+k}M$$

$\Leftarrow$. Considérons l'élément $\dfrac{x}{(a_1\cdots a_n)^k}$ de $M_{a_1\cdots a_n}$ où $x\in M$ et $k\in\mathbb{N}$. D'après l'hypothèse, il existe des $x_i\in M$ et un entier $h$ tel que

$$(a_1\cdots a_n)^h\, x \;=\; a_1^{h+k}x_1+\cdots+a_n^{h+k}x_n$$

En divisant par $(a_1\cdots a_n)^{h+k}$, on obtient donc, dans le localisé $M_{a_1\cdots a_n}$,

$$\frac{x}{(a_1\cdots a_n)^k} \;\in\; M_{\widehat{a_1}a_2\cdots a_n}+\cdots+M_{a_1\cdots a_{n-1}\widehat{a_n}}$$

□

**Théorème 2.3.** *Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module. Le dernier module de cohomologie de Čech relativement à $M$ d'une suite $M$-singulière est nul.*

*Autrement dit, pour $\underline{a}=(a_1,\dots,a_n)$, on a l'implication*

$$\mathcal{S}(\underline{a})^{-1}M=0 \quad\Longrightarrow\quad \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(M)=0$$

***Preuve.*** Fixons un élément $x\in M$ et un entier $k\in\mathbb{N}$. L'hypothèse dit qu'il existe $s\in\mathcal{S}(\underline{a})$ tel que $sx=0$. On utilise maintenant l'inclusion $\mathcal{S}(\underline{a})\subset\mathcal{S}(\underline{a}^k)^{\mathrm{sat}}$ : il existe un scalaire $\alpha\in\mathbf{A}$ tel que $t=\alpha s\in\mathcal{S}(\underline{a}^k)$. On récupère donc $tx=0$ avec $t\in\mathcal{S}(\underline{a}^k)$. Ainsi, en s'aidant de la remarque 1.3, on voit que

$$(a_1^k\cdots a_n^k)^e\, x \quad\in\quad (a_1^k)^{e+1}M\;+\;\cdots\;+\;(a_n^k)^{e+1}M$$

D'où $(a_1\cdots a_n)^h\, x\in a_1^{h+k}M\;+\;\cdots\;+\;a_n^{h+k}M$ avec $h=ke$. □

## 2.2 Le Kdim-Vanishing-Theorem en cohomologie de Čech

Une façon d'établir le Kdim-Vanishing-Theorem est de réduire le nombre d'éléments de la suite. Ceci est rendu possible via une hypothèse sur la dimension de *l'anneau*, mais est en revanche difficilement réalisable avec une hypothèse sur la dimension du module (sauf si celui-ci est de type fini, bien sûr). C'est la raison pour laquelle on commence par énoncer le théorème avec la condition sur la dimension portant sur l'anneau (et non sur le module).

**Théorème 2.4** (The Kdim-Vanishing-Theorem)**.** *Soit* $\underline{a}$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{A}$ *et* $d \in \mathbb{N}$ *tels que* $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant d$. *Alors* $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$ *pour tout* $i > d$.

***Preuve.*** Comme $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant d$, l'idéal $\langle \underline{a} \rangle$ est radicalement $(d+1)$-engendré (cf. [LQ11] chap XIV, théorème 1.3, page 786) c'est-à-dire qu'il existe une suite $\underline{b}$ de longueur $d+1$ telle que $\sqrt{\underline{a}} = \sqrt{\underline{b}}$. Par ailleurs, la cohomologie de Čech est invariante par radical. Quitte à remplacer $\underline{a}$ par $\underline{b}$, on peut donc supposer que $\underline{a}$ est de longueur $d+1$.

On obtient alors que $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$ pour tout $i > d+1$ car le complexe de Čech de $\underline{a}$ est de longueur $\#\underline{a} = d+1$. Il reste donc à tuer le dernier module $\check{\mathrm{H}}^{d+1}_{\underline{a}}(\mathbf{A})$. Deux stratégies sont possibles.

▷ Première stratégie. Rappelons que la nullité du dernier module équivaut à

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, h \in \mathbb{N}, \qquad (a_0 \cdots a_d)^h \ \in\ \langle a_0^{k+h}, \ldots, a_d^{k+h} \rangle$$

Par ailleurs, d'après la définition 1.1, l'hypothèse $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant d$ implique que pour toute suite $\underline{b}$ de longueur $d+1$, il existe un entier $e$ tel que

$$(b_0 \cdots b_d)^e \ \in\ \langle b_0^{e+1}, \ldots, b_d^{e+1} \rangle$$

Maintenant fixons un entier $k$ et appliquons ce qui précède à la suite $\underline{b} = \underline{a}^k$. Il existe donc un entier $e$ tel que $(a_0^k \cdots a_d^k)^e \ \in\ \langle a_0^{k(e+1)}, \ldots, a_d^{k(e+1)} \rangle$ *i.e.* $(a_0 \cdots a_d)^{ke} \ \in\ \langle a_0^{ke+k}, \ldots, a_d^{ke+k} \rangle$. Il suffit de poser $h = ke$ pour obtenir ce que l'on voulait.

▷ Deuxième stratégie. La différence avec la première stratégie est que l'on ne va pas utiliser une infinité de Kdim-équations (à savoir celles des $\underline{a}^k$), mais une seule (celle de $\underline{a}$). Allons-y. On exploite le fait que la suite $\underline{a}$ est singulière *i.e.* $0 \in \mathcal{S}(\underline{a})$ (en effet, $\underline{a}$ est de longueur $d+1$ dans un anneau de dimension de Krull inférieure à $d$). Et cette seule hypothèse permet de conclure grâce au théorème 2.3 appliqué avec $M = \mathbf{A}$. □

Avec la notion de « cohomological dimension » introduite à la section 5.2 du chapitre II, on peut reformuler le théorème précédent et l'enrichir un petit peu de la façon suivante :

**Théorème 2.5.** *Soit* $\underline{a}$ *une suite d'éléments de* $\mathbf{A}$. *Alors* $\operatorname{cd}(\underline{a}\,; \mathbf{A}) \leqslant \operatorname{Kdim} \mathbf{A}$ *et pour tout module* $M$, *on a* $\operatorname{cd}(\underline{a}\,; M) \leqslant \operatorname{Kdim} \mathbf{A}$. *Enfin,*

$$\operatorname{cd}(\underline{a}\,; M) \ \leqslant\ \operatorname{Kdim} M \qquad \textit{pour tout } \mathbf{A}\textit{-module } M \textit{ de type fini}$$

***Preuve.*** Seul le « Enfin » nécessite une justification, les autres inégalités résultent du théorème 2.4 et de la remarque 2.2. Posons $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\operatorname{Ann}(M)$ de sorte que le $\mathbf{A}$-module $M$ est également un $\mathbf{B}$-module. On utilise à présent que la cohomologie de Čech se comporte bien vis-à-vis des extensions d'anneaux (cf. [Eis05, Corollary A.1.8]) ; plus précisément, on a un isomorphisme de $\mathbf{B}$-modules $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) \simeq \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{b}}(M)$ où $\underline{b}$ est l'image de $\underline{a}$ dans $\mathbf{B}$. Par conséquent, on a $\operatorname{cd}_{\mathbf{A}}(\underline{a}\,; M) = \operatorname{cd}_{\mathbf{B}}(\underline{b}\,; M)$. Le théorème précédent appliqué à l'anneau $\mathbf{B}$ fournit $\operatorname{cd}_{\mathbf{B}}(\underline{b}\,; M) \leqslant \operatorname{Kdim} \mathbf{B}$. Comme $M$ est de type fini, $\operatorname{Kdim} M = \operatorname{Kdim} \mathbf{B}$ et donc l'inégalité précédente se réécrit finalement $\operatorname{cd}(\underline{a}\,; M) \leqslant \operatorname{Kdim} M$, ce qu'il fallait démontrer. □

**Remarque 2.6.** Pour un anneau local $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$ *noethérien* de dimension $d$, le dernier module de cohomologie locale $H^d_{\mathfrak{m}}(\mathbf{A})$ est non nul : c'est le « non vanishing theorem » de Grothendieck. Si on désigne par $\underline{a}$ un système de paramètres, le théorème 2.3 montre qu'une appartenance $0 \in \mathcal{S}(\underline{a})$ est impossible. Qu'en est-il si on lève l'hypothèse noethérienne ? Plus précisément, quel est l'impact d'une appartenance $0 \in \mathcal{S}(\underline{a})$ où $\underline{a}$ est une suite de cardinal minimum (*i.e.* de cardinal $\delta(\mathbf{A})$ avec les notations de la section 5.2) engendrant radicalement $\mathfrak{m}$ ?

## 2.3 Et pour un module quelconque ?

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré l'inégalité $\mathrm{cd}(\underline{a}\,;M) \leqslant \mathrm{Kdim}\, M$ pour tout module $M$ de type fini. En fait, cette inégalité s'étend à n'importe quel module. Ceci est bien connu par les spécialistes de la cohomologie locale noethérienne qui invoquent le fait que le foncteur de la cohomologie locale commute avec les limites directes et que tout module est limite directe de ses sous-modules de type fini. Cela fonctionne de la même façon en cohomologie de Čech comme nous allons le voir. Commençons par prouver un lemme qui est un cas particulier du fait que la cohomologie de Čech commute aux limites directes.

**Lemme 2.7.** *Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module, $\underline{a}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$ et $k \in \mathbb{N}$. Si pour tout sous-module $N$ de type fini de $M$ on a $\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(N) = 0$, alors $\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(M) = 0$.*

***Preuve.*** Pour un sous-module de type fini $N$ de $M$, on considère le morphisme injectif de complexes $\iota_N : \check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(N) \to \check{\mathrm{C}}^\bullet_{\underline{a}}(M)$. Il est clair que $\check{\mathrm{C}}^k_{\underline{a}}(M) \overset{\blacklozenge}{=} \bigcup_N \iota_N\big(\check{\mathrm{C}}^k_{\underline{a}}(N)\big)$ où $N$ parcourt tous les sous-modules de type fini de $M$.

Soit $x$ un cycle de $\check{\mathrm{C}}^k_{\underline{a}}(M)$, *i.e.* $d(x) = 0$. D'après l'égalité $\blacklozenge$, il existe un $y \in \check{\mathrm{C}}^k_{\underline{a}}(N)$ tel que $x = \iota_N(y)$. Donc $d(x) = (d \circ \iota_N)(y) = (\iota_N \circ d_N)(y)$ et on en déduit que $d_N(y)$ est dans le noyau de $\iota_N$ qui est injectif donc $d_N(y) = 0$. On utilise l'hypothèse $\check{\mathrm{H}}^k_{\underline{a}}(N) = 0$ qui fournit un élément $y' \in \check{\mathrm{C}}^{k-1}_{\underline{a}}(N)$ tel que $y = d_N(y')$. Donc $x = \iota_N(y) = (\iota_N \circ d_N)(y') = (d \circ \iota_N)(y')$. Ainsi $x$ est le bord de $\iota_N(y') \in \check{\mathrm{C}}^{k-1}_{\underline{a}}(M)$. On peut résumer la preuve par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\check{\mathrm{C}}^{k-1}(N) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^k(N) & \xrightarrow{d_N} & \check{\mathrm{C}}^{k+1}(N) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_N} & & \downarrow \\
\check{\mathrm{C}}^{k-1}(M) & \longrightarrow & \check{\mathrm{C}}^k(M) & \xrightarrow{d} & \check{\mathrm{C}}^{k+1}(M)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
y' & \longrightarrow & y & \longrightarrow & d_N(y) = 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota_N} & & \downarrow \\
\iota_N(y') & \dashrightarrow & x & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

□

**Théorème 2.8** (The Kdim-Vanishing-Theorem II)**.** *Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module et $\underline{a}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. Alors*

$$\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0 \quad \textit{pour tout } i > \mathrm{Kdim}\, M$$

*Autrement dit,* $\mathrm{cd}(\underline{a}\,;M) \leqslant \mathrm{Kdim}\, M$.

***Preuve.*** Pour tout module $N$ de type fini, on a $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(N) = 0$ pour tout $i > \mathrm{Kdim}\, N$ d'après le théorème 2.5. En particulier pour tout sous-module $N$ de type fini de $M$, on a $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(N) = 0$ pour tout $i > \mathrm{Kdim}\, M$ (car $\mathrm{Kdim}\, M \geqslant \mathrm{Kdim}\, N$). Ainsi $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ pour tout $i > \mathrm{Kdim}\, M$, en vertu du lemme précédent. □

Le résultat précédent et le sens $\Rightarrow$ de la proposition V-2.1 peuvent se résumer de manière informelle de la façon suivante : « La cohomologie de Čech est non triviale *éventuellement* entre les degrés $g$ et $d$ où $g = \mathrm{Gr}(\underline{a}\,;M)$ et $d = \mathrm{Kdim}\, M$ ».

**Théorème 2.9.** *Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module et $\underline{a}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. Pour des entiers $g$ et $d$, on a*

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Gr}(\underline{a}\,;M) \geqslant g \\ \mathrm{Kdim}\, M \leqslant d \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0 \quad \textit{pour } i < g \textit{ et pour } d < i$$

## 2.4 Où l'on contrôle les exposants figurant dans $0 \in \mathcal{S}(\underline{a}) \Rightarrow \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$

**Proposition 2.10.** *Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. On suppose que $0 \in \mathcal{S}(\underline{a})$, c'est-à-dire qu'il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que*

$$(a_1 \cdots a_n)^e \ \in\ \langle a_1^e a_1,\, (a_1a_2)^e a_2,\, \ldots,\, (a_1 \cdots a_{n-1})^e a_{n-1},\, (a_1 \cdots a_n)^e a_n \rangle$$

*Alors $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$. Autrement dit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $(a_1 \cdots a_n)^h \in \langle a_1^{h+k}, \ldots, a_n^{h+k} \rangle$. Plus précisément, pour $k = 0$ on peut prendre $h = 0$ et pour $k > 0$, on peut prendre*

$$h \ =\ \big((n-1)k - (n-2)\big)e \ =\ \big((n-1)(k-1) + 1\big)e$$

La preuve, relativement technique, repose sur le lemme suivant.

**Lemme 2.11.** *Considérons des éléments $a_1, \dots, a_m$ d'un anneau $\mathbf{A}$. Soit $e \in \mathbb{N}$ et des éléments $x_i \in \mathbf{A}$ tels que*

$$x_i \ \in \ \langle (a_1 \cdots a_i)^e a_i \rangle \quad \forall\, i \in [\![1, m]\!] \qquad \text{et} \qquad x_1 + \cdots + x_m \in \langle (a_1 \cdots a_m)^e \rangle.$$

*Soit $k \in \mathbb{N}$ et posons $N_{m,k} = mk - (m-1)$. Alors pour tout $N \geqslant N_{m,k}$, on a*

$$(x_1 + \cdots + x_m)^N \ \in \ \langle a_1^{eN+k}, \dots, a_m^{eN+k} \rangle.$$

***Preuve du lemme.*** Pour alléger les notations, on pose $s_m = x_1 + \cdots + x_m$ et $s_{m-1} = x_1 + \cdots + x_{m-1}$. La preuve se fait en deux temps.
*Premier temps.* On commence par constater que si l'appartenance a lieu pour un $N$ fixé, alors il en est de même pour $N+1$ et donc plus généralement pour $N+i$ avec $i \in \mathbb{N}$.

*Deuxième temps.* On montre ensuite le résultat pour $N = N_{m,k}$ par récurrence sur $m$.

Pour $m = 1$, c'est une évidence : il suffit d'utiliser que $x_1 \in \langle a_1^{e+1} \rangle$.

Pour l'hérédité, il faut d'abord s'assurer que les hypothèses faites au rang $m$ entraînent celles du rang $m-1$. Plus précisément, supposons que l'on ait $a_1, \dots, a_m$ et $x_1, \dots, x_m$ tels que

$$x_i \ \in \ \langle (a_1 \cdots a_i)^e a_i \rangle \quad \forall\, i \in [\![1, m]\!] \qquad \text{et} \qquad s_m \in \langle (a_1 \cdots a_m)^e \rangle.$$

Alors, on va voir que l'on a bien les mêmes appartenances au rang $m-1$. La seule chose qui ne se voit pas immédiatement est

$$s_{m-1} \in \langle (a_1 \cdots a_{m-1})^e \rangle.$$

Comme on a l'égalité $s_{m-1} = s_m - x_m$ et les appartenances $s_m \in \langle (a_1 \cdots a_m)^e \rangle$ et $x_m \in \langle (a_1 \cdots a_m)^e \rangle$, on obtient $s_{m-1} \in \langle (a_1 \cdots a_m)^e \rangle$ et donc a fortiori $s_{m-1} \in \langle (a_1 \cdots a_{m-1})^e \rangle$.

Ensuite, on amorce la récurrence en écrivant :

$$s_m^N \ = \ \sum_{\alpha+\beta=N} s_{m-1}^{\alpha} x_m^{\beta}$$

Examinons, pour $\alpha$ et $\beta$ fixés tels que $\alpha + \beta = N$, le terme $s_{m-1}^{\alpha} x_m^{\beta}$.

Remarquons tout d'abord que $N = N' + k - 1$ où $N' = N_{m-1,k}$. Puisque $\alpha + \beta = N = N' + k - 1$, deux cas se présentent : soit $\alpha \geqslant N'$, soit $\beta \geqslant k$.

$\triangleright$ Si $\beta \geqslant k$, on utilise

$$\begin{cases} s_{m-1} \in \langle a_m^e \rangle \\ x_m \in \langle a_m^{e+1} \rangle \end{cases}$$

pour dire que

$$s_{m-1}^{\alpha} x_m^{\beta} \ \in \ \langle a_m^{e\alpha} a_m^{e\beta+\beta} \rangle \ = \ \langle a_m^{eN+\beta} \rangle$$

$\triangleright$ Si $\alpha \geqslant N' = N_{m-1,k}$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$s_{m-1}^{N'} \ \in \ \langle a_1^{eN'+k}, \dots, a_{m-1}^{eN'+k} \rangle$$

D'après le « premier temps » de la preuve, on sait que l'appartenance a lieu pour tout entier supérieur à $N'$, donc en particulier pour $\alpha$, *i.e.* :

$$s_{m-1}^{\alpha} \in \langle a_1^{e\alpha+k}, \dots, a_{m-1}^{e\alpha+k} \rangle$$

Une multiplication par $x_m^{\beta}$, en utilisant que $x_m \in \langle (a_1 \cdots a_{m-1})^e \rangle$, fournit

$$s_{m-1}^{\alpha} x_m^{\beta} \ \in \ \langle a_1^{e\alpha+k+e\beta}, \dots, a_{m-1}^{e\alpha+k+e\beta} \rangle \ = \ \langle a_1^{eN+k}, \dots, a_{m-1}^{eN+k} \rangle$$

la dernière égalité étant due au fait que $\alpha + \beta = N$. □

***Preuve de la proposition.*** Tout d'abord, on commence par remarquer que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a

$$(a_1 \cdots a_n)^e \ \in \ \langle a_1^e a_1,\, (a_1a_2)^e a_2,\, \ldots, (a_1 \cdots a_{n-1})^e a_{n-1},\, (a_1 \cdots a_n)^e a_n^q \rangle$$

En effet, il suffit d'écrire que, modulo les $n-1$ premiers générateurs de l'idéal, on a $(a_1 \cdots a_n)^e a_n \in \langle (a_1 \cdots a_n)^e a_n^2 \rangle$ et d'itérer.

Maintenant, explicitons l'appartenance précédente : il existe des $u_i \in \mathbf{A}$ tels que

$$(a_1 \cdots a_n)^e = x_1 + \cdots + x_n \qquad \text{où } x_i = u_i (a_1 \cdots a_i)^e a_i \text{ pour } i \in [\![1, n-1]\!] \text{ et } x_n = u_n (a_1 \cdots a_n)^e a_n^q.$$

On élève le tout à la puissance $N \in \mathbb{N}$ et on écrit :

$$(x_1 + \cdots + x_n)^N \in \langle (x_1 + \cdots + x_{n-1})^N \rangle + \langle x_n \rangle$$

On fixe $k \in \mathbb{N}$ et on utilise maintenant le lemme avec les $m = n-1$ termes : c'est possible grâce à l'égalité $(a_1 \cdots a_n)^e = (x_1 + \cdots + x_{n-1}) + x_n$ et $x_n \in \langle (a_1 \cdots a_{n-1})^e \rangle$.

Pour tout $N \geqslant N_{n-1,k}$, on obtient donc

$$(x_1 + \cdots + x_n)^N \in \langle a_1^{eN+k}, \ldots, a_{n-1}^{eN+k} \rangle + \langle x_n \rangle$$

Or pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in \langle a_n^q \rangle$ ce qui est donc le cas pour $q = eN + k$. Ainsi

$$(x_1 + \cdots + x_n)^N \in \langle a_1^{eN+k}, \ldots, a_n^{eN+k} \rangle$$

Ce qui précède montre que l'on peut prendre, dans la proposition, la borne $h = \big((n-1)k - (n-2)\big)e$. □

## 2.5 Le cas particulier des suites de longueur $n = 2$

Dans [HKM09, proposition 2.6], les auteurs donnent le résultat suivant :

*Soit $R$ un anneau noethérien et $I = \langle x, y \rangle$ un idéal de $R$. Alors on a l'équivalence*

$$H_I^2(R) = 0 \iff \exists\, e \in \mathbb{N},\ (xy)^e \in \langle x^{e+1},\, y^{e+1} \rangle$$

Il s'agit d'un résultat énoncé en termes de cohomologie locale noethérienne. On peut donner le même résultat en termes de cohomologie de Čech sur un anneau commutatif quelconque. Plus précisément :

**Proposition 2.12.** *Soient $x, y$ deux éléments d'un anneau commutatif $\mathbf{A}$. Alors*

$$\check{\mathrm{H}}^2_{(x,y)}(\mathbf{A}) = 0 \iff \exists\, e \in \mathbb{N},\ (xy)^e \in \langle x^{e+1},\, y^{e+1} \rangle$$

***Preuve.*** Le seul sens intéressant de la proposition est $\Leftarrow$. Soit donc $k \in \mathbb{N}$. On veut montrer l'existence d'un $h \in \mathbb{N}$ tel que $(xy)^h \in \langle x^{k+h},\, y^{k+h} \rangle$. On commence par réécrire l'hypothèse sous la forme

$$(xy)^e = X + Y, \quad \text{avec } X = ux^{e+1} \text{ et } Y = vy^{e+1} \tag{$\diamond$}$$

On a donc

$$X \in \langle x^{e+1} \rangle \cap \langle y^e \rangle \quad \text{et} \quad Y \in \langle y^{e+1} \rangle \cap \langle x^e \rangle.$$

On élève l'égalité ($\diamond$) à la puissance $2k-1$ :

$$\big((xy)^e\big)^{2k-1} \in \sum_{i+j=2k-1} \langle X^i Y^j \rangle$$

En posant $h = (2k-1)e$, on a les appartenances suivantes, pour $i$ et $j$ vérifiant $i + j = 2k - 1$,

$$X^i Y^j \in \langle x^{(e+1)i+ej} \rangle = \langle x^{h+i} \rangle, \qquad X^i Y^j \in \langle y^{ei+(e+1)j} \rangle = \langle y^{h+j} \rangle.$$

Par conséquent, si $i \geqslant k$, alors $X^i Y^j \ \in \ \langle x^{h+k} \rangle$ ; et si $j \geqslant k$, alors $X^i Y^j \ \in \ \langle y^{h+k} \rangle$.

Bref, on obtient

$$(xy)^h \ \in \ \langle x^{h+k},\ y^{h+k} \rangle \qquad \text{avec } h = (2k-1)e.$$

□

**Remarque 2.13.** La conjecture monomiale de Hochster dit qu'étant donné un système de paramètres $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ d'un anneau local noethérien, il n'existe pas d'entier $e \in \mathbb{N}$ tel que $(a_1 \cdots a_d)^e \in \langle a_1^{e+1}, \ldots, a_d^{e+1} \rangle$. En dimension $d = 2$, la proposition précédente montre que si un tel entier existe, alors le module $\check{\mathrm{H}}^d_{\underline{a}}(\mathbf{A})$ est nul. Mais en cohomologie locale noethérienne, Grothendieck a montré que le module $H^d_{\mathfrak{m}}(\mathbf{A})$ ne s'annule pas (cf. [ILL+07, Theorem 9.3]).

# 3 Profondeur et dimension de Krull

## 3.1 L'inégalité « profondeur $\leqslant$ dimension »

Le Kdim-Vanishing-Theorem permet de montrer que la profondeur est toujours inférieure à la dimension (sauf en cas d'unimodularité). On pourra comparer notre énoncé accompagné de sa démonstration aux énoncés noethériens (par exemple, cf. la proposition 1.2.12 de [BH98]).

**Proposition 3.1.** *Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module et $\underline{a}$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. Pour tout entier $d$, on a*

$$\begin{cases} \operatorname{Kdim} M \leqslant d \\ \operatorname{Gr}(\underline{a}\,;M) \geqslant d+1 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad M = \underline{a}M$$

*En particulier, si $M \neq \underline{a}M$ alors $\operatorname{Gr}(\underline{a}\,;M) \leqslant \operatorname{Kdim} M$.*

***Preuve.*** Comme $\operatorname{Kdim} M \leqslant d$, on a $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ pour tout $i > d$. L'hypothèse sur le Grade dit « annulation des $d+1$ premiers modules » c'est-à-dire $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M) = 0$ pour tout $i \leqslant d$. Par conséquent, $\check{\mathrm{H}}^i_{\underline{a}}(M)$ est nul pour tout entier $i$. D'après la proposition 4.2, on sait que cela entraîne $M = \underline{a}M$. □

## 3.2 Où l'on affine l'inégalité précédente

**Proposition 3.2.** *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$. Pour tous entiers $d$ et $k$, on a*

$$\begin{cases} \operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant d \\ \operatorname{Gr}(\mathfrak{a}) \geqslant k \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) \;\leqslant\; d-k$$

*En abrégé,*

$$\operatorname{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) \;\leqslant\; \operatorname{Kdim}\mathbf{A} - \operatorname{Gr}(\mathfrak{a})$$

***Preuve.*** Si $k \geqslant d+1$ alors la proposition précédente affirme que $1 \in \mathfrak{a}$ donc l'inégalité $\operatorname{Kdim}\mathbf{A}/\mathfrak{a} \leqslant -1$ est bien vérifiée.

Supposons à présent $k < d+1$ et considérons $d-k+1$ éléments $x_0, \ldots, x_{d-k}$ de $\mathbf{A}$. On veut montrer que $0 \in \mathcal{S}_{\mathbf{A}/\mathfrak{a}}(\underline{x})$ c'est-à-dire que $\mathcal{S}(\underline{x})$ rencontre $\mathfrak{a}$. On pose $\mathbf{B} = \mathcal{S}(\underline{x})^{-1}\mathbf{A}$ de sorte que $\mathfrak{a}\mathbf{B} = \mathcal{S}(\underline{x})^{-1}\mathfrak{a}$. Par définition de la dimension de Krull, on a $\operatorname{Kdim}\mathbf{B} \leqslant d-(d-k+1) = k-1$. De plus $\operatorname{Gr}(\mathfrak{a}\mathbf{B}) \geqslant k$. D'après la proposition précédente appliquée à l'anneau $\mathbf{B}$ et l'idéal $\mathfrak{a}\mathbf{B}$, on obtient $1 \in \mathcal{S}(\underline{x})^{-1}\mathfrak{a}$, c'est-à-dire $\mathcal{S}(\underline{x})$ rencontre $\mathfrak{a}$. □

On a un résultat analogue avec un module.

**Proposition 3.3.** *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$ et $M$ un $\mathbf{A}$-module. Pour tous entiers $d$ et $k$, on a*

$$\begin{cases} \operatorname{Kdim} M \leqslant d \\ \operatorname{Gr}(\mathfrak{a}\,;M) \geqslant k \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \operatorname{Kdim}(M/\mathfrak{a}M) \;\leqslant\; d-k$$

*En abrégé*

$$\operatorname{Kdim}(M/\mathfrak{a}M) \;\leqslant\; \operatorname{Kdim} M - \operatorname{Gr}(\mathfrak{a}\,;M)$$

***Preuve.*** La démonstration est semblable à celle faite sur un anneau. Si $k \geqslant d+1$ alors la proposition précédente affirme que $M = \mathfrak{a}M$ donc l'inégalité $\operatorname{Kdim} M/\mathfrak{a}M \leqslant -1$ est bien vérifiée.

Supposons à présent $k < d+1$ et considérons $d-k+1$ éléments $x_0, \ldots, x_{d-k}$ de $\mathbf{A}$. Pour simplifier les notations, on pose $N = \mathcal{S}(\underline{x})^{-1}M$, $\mathbf{B} = \mathcal{S}(\underline{x})^{-1}\mathbf{A}$ et $\mathfrak{b} = \mathcal{S}(\underline{x})^{-1}\mathfrak{a}$. Par conséquent, $N$ est un $\mathbf{B}$-module. Il s'agit de montrer que $\mathcal{S}(\underline{x})^{-1}M/\mathfrak{a}M = 0$ ce qui se réécrit, en utilisant que la localisation commute au quotient, $N = \mathfrak{b}N$.

Par définition de la dimension de Krull, on a $\operatorname{Kdim} N \leqslant k-1$. De plus $\operatorname{Gr}_{\mathbf{B}}(\mathfrak{b}\,;N) \geqslant k$. D'après la proposition 3.1, on obtient directement $N = \mathfrak{b}N$ ce qu'il fallait démontrer. □

## 3.3 Profondeur et hauteur

Dans cette thèse, nous n'utilisons pas la notion de hauteur. Cependant, il nous semble important de faire le lien avec la littérature classique lorsque c'est possible. Pour un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau $\mathbf{A}$, la hauteur est définie comme étant la borne inférieure des dimensions des localisés $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ contenant $\mathfrak{a}$ (en particulier, si $1 \in \mathfrak{a}$ alors $\mathrm{ht}(\mathfrak{a}) = +\infty$). L'inégalité suivante est bien connue, cf. [BH98, proposition 1.2.14].

**Proposition 3.4.** *Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de type fini, on a $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \leqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{a})$.*

***Preuve.*** Si $1 \in \mathfrak{a}$, il n'y a rien à montrer. Désormais, on suppose que $\mathfrak{a}$ est propre. On a $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \leqslant \mathrm{Gr}(S^{-1}\mathfrak{a}\,;S^{-1}\mathbf{A})$ car la localisation ne perturbe pas l'exactitude du complexe de Koszul. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier qui contient $\mathfrak{a}$. D'après la proposition 3.1, on a $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\mathbf{A}_\mathfrak{p}\,;\mathbf{A}_\mathfrak{p}) \leqslant \mathrm{Kdim}\,\mathbf{A}_\mathfrak{p}$. Finalement, on a $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \leqslant \mathrm{Kdim}\,\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ pour tout idéal $\mathfrak{p}$ premier contenant $\mathfrak{a}$, donc $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \leqslant \mathrm{ht}(\mathfrak{a})$. □

## 3.4 Des inégalités strictes

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini d'un anneau commutatif $\mathbf{A}$. On a donc les inégalités suivantes :

$$\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) \;\leqslant\; \mathrm{ht}(\mathfrak{a}) \;\leqslant\; \mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} - \mathrm{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$$

On se propose de donner un exemple où ces inégalités sont strictes. Dans l'espace affine de dimension 3, on considère le plan $\{x = 1\}$, la droite $\{x = y = 0\}$ et le point $\{x = y = z = 0\}$. La $\mathbf{k}$-algèbre des coordonnées de cet ensemble algébrique est $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X,Y,Z]/I := \mathbf{k}[x,y,z]$ où $I = \langle X-1\rangle\langle X,Y\rangle\langle X,Y,Z\rangle$. Comme idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$, prenons l'idéal de l'origine, *i.e.* l'idéal $\mathfrak{a} = \langle x,y,z\rangle$. Une fois n'est pas coutume, déterminons géométriquement les quantités ci-dessus et supposons donc que $\mathbf{k}$ est un corps. On a $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A}/\mathfrak{a} = 0$ car $\mathfrak{a}$ est l'idéal d'un point. On a $\mathrm{ht}(\mathfrak{a}) = 1$ car la plus grande composante irréductible à laquelle le point appartient est la droite de sorte que « le point est de codimension 1 ». Enfin, $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) = 0$ car $(x-1)x$ annule $\mathfrak{a}$ mais n'est pas nul. On a donc $0 < 1 < 2$.

## 3.5 Normalisation de Noether et profondeur

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{S} = \mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]$ où $\mathbf{k}$ est un corps. D'après [LQ11, Théorème VII-1.5], on sait qu'il existe un automorphisme $\Theta$ de la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{S}$ mettant l'idéal $\mathfrak{a}$ en position de Noether. Précisément, en posant $Y_i = \Theta(X_i)$, il existe un entier $d$ bien déterminé vérifiant les deux conditions :

$$\mathbf{k}[Y_1,\dots,Y_d] \cap \mathfrak{a} = 0 \qquad \text{et} \qquad Y_{d+1},\dots,Y_n \text{ sont entiers sur } \mathbf{k}[Y_1,\dots,Y_d] \text{ modulo } \mathfrak{a}.$$

On peut traduire cela en passant dans l'algèbre $\mathbf{A} = \mathbf{S}/\mathfrak{a} = \mathbf{k}[y_1,\dots,y_n]$ (où $y_i$ désigne la classe de $Y_i$ modulo $\mathfrak{a}$) :

$$y_1,\dots,y_d \text{ sont } \mathbf{k}\text{-algébriquement indépendants} \qquad \text{et} \qquad y_{d+1},\dots,y_n \text{ sont entiers sur } \mathbf{k}[y_1,\dots,y_d].$$

L'entier $d$ est alors la dimension de Krull de la $\mathbf{k}$-algèbre de présentation finie $\mathbf{A}$. Souvent, par exemple pour déterminer la dimension de Krull d'une telle algèbre, on se contente de fournir $d$ éléments $z_1,\dots,z_d$ de $\mathbf{A}$ tels que

$$z_1,\dots,z_d \text{ sont } \mathbf{k}\text{-algébriquement indépendants} \qquad \text{et} \qquad x_1,\dots,x_n \text{ sont entiers sur } \mathbf{k}[z_1,\dots,z_d]\,;$$

tout simplement car il est difficile d'exhiber un automorphisme $\Theta$. Il faut justement noter qu'une partie de la preuve de la proposition suivante repose sur l'existence d'un tel automorphisme.

**Proposition 3.5.** *Pour un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{S} = \mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]$ où $\mathbf{k}$ est un corps, on a l'égalité :*

$$\mathrm{Kdim}\,\mathbf{S} \;=\; \mathrm{Kdim}(\mathbf{S}/\mathfrak{a}) \;+\; \mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{S})$$

*Note : si $1 \in \mathfrak{a}$, il faut lire $n = -1 + (n+1)$. Si $\mathfrak{a} = 0$, il faut lire $n = n + 0$.*

***Preuve.*** On sait déjà que $\operatorname{Kdim}(\mathbf{S}/\mathfrak{a}) \leqslant \operatorname{Kdim}\mathbf{S} - \operatorname{Gr}(\mathfrak{a};\mathbf{S})$ d'après la proposition 3.2. Reste donc à montrer que $\operatorname{Gr}(\mathfrak{a};\mathbf{S}) \geqslant \operatorname{Kdim}\mathbf{S} - \operatorname{Kdim}\mathbf{S}/\mathfrak{a}$. On va en fait exhiber, à partir d'une normalisation de Noether de $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$, une suite régulière dans $\mathfrak{a}$ de longueur $n-d$ où $d = \operatorname{Kdim}\mathbf{S}/\mathfrak{a}$. Supposons donc disposer d'un automorphisme $\Theta$ comme ci-dessus. La deuxième condition se traduit par l'existence de $n-d$ polynômes unitaires $f_i(T) \in \mathbf{k}[Y_1,\dots,Y_d][T]$ tels que $f_i(Y_i) \in \mathfrak{a}$ pour $i = d+1,\dots,n$. La suite $\big(f_{d+1}(Y_{d+1}),\dots,f_n(Y_n)\big)$ est régulière, en vertu du lemme facile suivant (un peu plus général qu'il ne faut pour parvenir à nos fins). □

**Lemme 3.6.** *Soit* $\mathbf{R}$ *un anneau commutatif. Considérons* $m$ *polynômes de* $\mathbf{R}[T_1,\dots,T_m]$ *vérifiant :*
$f_1 = f_1(T_1)$ *primitif dans* $\mathbf{R}[T_1]$
$f_2 = f_2(T_1,T_2)$ *primitif dans* $\mathbf{R}[T_1][T_2]$
$\vdots$
$f_m = f_m(T_1,\dots,T_m)$ *primitif dans* $\mathbf{R}[T_1,\dots,T_{m-1}][T_m]$
*Ces conditions sont par exemple vérifiées lorsque* $f_i$ *est unitaire en* $T_i$*. Alors la suite* $(f_1,\dots,f_m)$ *est régulière.*

La proposition 3.5 ci-dessus est un cas particulier d'un résultat conjectural *noethérien* dû à Auslander (cf. [Rob92, p. 128]) :

> **Codimension conjecture from Auslander** : *Si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de type fini d'un anneau noethérien* $\mathbf{A}$ *admettant une résolution projective finie, alors* $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} = \operatorname{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) + \operatorname{Gr}(\mathfrak{a};\mathbf{A})$*. Plus généralement, si* $M$ *est un* $\mathbf{A}$*-module admettant une résolution projective finie, alors* $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} = \operatorname{Kdim}M + \operatorname{Gr}\big(\mathcal{F}_0(M);\mathbf{A}\big)$*.*

Note : ci-dessus, $\mathcal{F}_0(M)$ désigne l'idéal de Fitting d'indice 0 de $M$ qui a même radical que $\operatorname{Ann}M$.

Cette conjecture est bien noethérienne. Dans l'article [CR06], on trouve en effet un anneau local cohérent non noethérien de dimension $d$ avec un idéal maximal engendré par une suite complètement sécante de longueur $d-1$. Et on voit donc que l'égalité ci-dessus n'est pas vérifiée avec l'idéal maximal.

**Un h.s.o.p. pour $\mathfrak{I}_{n,d}$, « *squarefree Veronese ideal* »**

Soit $\mathbf{k}$ un anneau commutatif quelconque. On considère l'idéal $\mathfrak{I}_{n,d}$ de $\mathbf{S} = \mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]$ défini par

$$\mathfrak{I}_{n,d} \;=\; \langle X^I \mid \#I = d\rangle \qquad \text{où } X^I = X_{i_1}\cdots X_{i_d} \text{ pour } I = \{i_1,\dots,i_d\}$$

C'est l'idéal monomial constitué de tous les monômes square free de degré $d$ (cf. [HH10, ex. 8.7 p. 148] pour le nom de baptême). Pour $d=0$, l'idéal contient 1. Et pour $d \geqslant n+1$, l'idéal est nul. Dans la suite, pour éviter les cas particuliers, on prendra $d \in [\![1,n]\!]$.

En plus d'expliciter un h.s.o.p., nous voulons exhiber une suite régulière dans $\mathfrak{I}_{n,d}$ de longueur $n-(d-1)$ *et tout ceci indépendamment des qualités de* $\mathbf{k}$. Nous ne nous appuyerons pas sur un automorphisme à la Noether comme dans la preuve de la proposition ci-dessus (ce qui nécessiterait a priori de prendre un corps $\mathbf{k}$). Enfin, on note $\sigma_i$ la fonction symétrique élémentaire de degré $i$. C'est la somme des monômes de $\mathfrak{I}_{n,i}$ *i.e.* $\sigma_i = \sum_{\#I=i} X^I$.

Commençons par quelques rappels et faits élémentaires.

⊡ Le polynôme $g = T^n - \sigma_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^d \sigma_d T^{n-d} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$ annule $X_i$ pour tout $i$, puisque $g = \prod_{i=1}^n (T - X_i)$. Par ailleurs, il est clair que

$$\langle \sigma_d,\dots,\sigma_n\rangle \;\subset\; \mathfrak{I}_{n,d}$$

⊡ On a l'inclusion $\mathfrak{I}_{n,d} \subset \langle (X_j)_{j\in J}\rangle$ pour n'importe quelle partie $J$ de cardinal $n-d+1$. En effet un monôme $X^I$ de $\mathfrak{I}_{n,d}$ est construit avec une partie $I$ de cardinal $d$ de sorte que $I \cap J \neq \emptyset$. En particulier $\mathfrak{I}_{n,d} \subset \langle X_d,\dots,X_n\rangle$.

⊡ La suite $\underline{\sigma} = (\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ est $\mathbf{k}$-algébriquement libre et $\mathbf{k}[\underline{X}]$ est libre sur $\mathbf{k}[\underline{\sigma}]$ (donc en particulier « entier sur »). Notons que cette propriété permet de prouver la proposition suivante lorsque $d = n+1$.

⊡ La suite $\underline{a} = (\sigma_1,\dots,\sigma_{d-1},X_d,\dots,X_n)$ est complètement sécante (donc régulière vu le caractère homogène). En effet, grâce à ⊡ et ⊡, on a

$$\langle X_1^n,\dots,X_n^n\rangle \;\subset\; \langle \sigma_1,\dots,\sigma_n\rangle \;\subset\; \langle \sigma_1,\dots,\sigma_{d-1},X_d,\dots,X_n\rangle$$

**Proposition 3.7.** *La suite $(\sigma_1,\dots,\sigma_{d-1})$ forme un h.s.o.p. pour l'idéal $\mathfrak{I}_{n,d}$. Plus précisément*

(1) $\mathbf{k}[\sigma_1,\dots,\sigma_{d-1}]\cap\mathfrak{I}_{n,d}=0$

(2) *pour tout $i$, $X_i$ est entier sur $\mathbf{k}[\sigma_1,\dots,\sigma_{d-1}]$ modulo $\mathfrak{I}_{n,d}$ ; un certificat est donné par le polynôme $f(T)=T^n-\sigma_1T^{n-1}+\cdots+(-1)^{d-1}\sigma_{d-1}T^{n-d+1}\in\mathbf{k}[\sigma_1,\dots,\sigma_{d-1}][T]$ qui vérifie $f(X_i)\in\mathfrak{I}_{n,d}$.*

***Preuve.*** (1) Soit $P(T_1,\dots,T_{d-1})$ tel que $P(\sigma_1,\dots,\sigma_{d-1})\in\mathfrak{I}_{n,d}$. On élimine les variables $X_d,\dots,X_n$ via les évaluations $X_d:=0,\dots,X_n:=0$. D'après ⚀, on obtient $P(\sigma'_1,\dots,\sigma'_{d-1})=0$ où $\sigma'_i$ sont les polynômes symétriques élémentaires en les variables $X_1,\dots,X_{d-1}$. D'après ⚂, on obtient $P=0$, ce qu'il fallait démontrer.

(2) Cela résulte directement de ⚀. □

**Proposition 3.8.** *L'idéal $\mathfrak{I}_{n,d}$ contient une suite régulière de longueur $n-(d-1)$. Plus précisément, en notant*

$$f(T) \;=\; T^n-\sigma_1T^{n-1}+\cdots+(-1)^{d-1}\sigma_{d-1}T^{n-d+1}$$

*la suite $\big(f(X_d),\dots,f(X_n)\big)$ appartient à $\mathfrak{I}_{n,d}$ et est régulière.*

*Variante : on peut prendre $f(T) \;=\; T^d-\sigma_1T^{d-1}+\cdots+(-1)^{d-1}\sigma_{d-1}T$.*

***Preuve.*** Montrons dans un premier temps que la suite $\big(f(X_d),\dots,f(X_n)\big)$ est régulière sur $\mathbf{R}[X_d,\dots,X_n]$ avec $\mathbf{R}=\mathbf{k}[\sigma_1,\dots,\sigma_{d-1}]$. On va utiliser le lemme 3.6. Pour cela, il faut justifier que $X_d,\dots,X_n$ sont des indéterminées sur $\mathbf{R}$. On peut le voir grâce à ⚅ qui dit que $\underline{a}=(\sigma_1,\dots,\sigma_{d-1},X_d,\dots,X_n)$ est une suite régulière donc $\mathbf{k}$-algébriquement libre en vertu de la proposition V-5.3 (on a bien $\mathbf{k}\cap\langle\underline{a}\rangle=0$ car les éléments de $\underline{a}$ sont homogènes de degré $>0$).

Montrons enfin que la suite $\big(f(X_d),\dots,f(X_n)\big)$ est régulière sur $\mathbf{S}=\mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]$. On utilise pour cela le point ⚂ qui dit que $\mathbf{k}[X_d,\dots,X_n][X_1,\dots,X_{d-1}]$ est libre sur $\mathbf{k}[X_d,\dots,X_n][\sigma'_1,\dots,\sigma'_{d-1}]$ où $\sigma'_i$ sont les fonctions symétriques élémentaires en les variables $X_1,\dots,X_{d-1}$. Or il n'est pas difficile de voir que $\mathbf{k}[X_d,\dots,X_n][\sigma'_1,\dots,\sigma'_{d-1}]=\mathbf{k}[X_d,\dots,X_n][\sigma_1,\dots,\sigma_{d-1}]$ qui est encore égal à $\mathbf{R}[X_d,\dots,X_n]$. Bref, $\mathbf{S}$ est libre sur $\mathbf{R}[X_d,\dots,X_n]$ donc le premier temps permet de conclure. □

**Un h.s.o.p. pour la courbe rationnelle de degré 4 de $\mathbb{P}^3(\mathbf{k})$**

Considérons l'idéal

$$\mathfrak{a} \;=\; \langle X_0^2X_2-X_1^3,\;\; X_0X_2^2-X_1^2X_3,\;\; X_1X_3^2-X_2^3,\;\; X_0X_3-X_1X_2\rangle$$

de $\mathbf{S}=\mathbf{k}[X_0,X_1,X_2,X_3]$ où $\mathbf{k}$ est un anneau quelconque. C'est le noyau du morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres

$$\varphi:\ \mathbf{k}[X_0,X_1,X_2,X_3]\longrightarrow\mathbf{k}[U,V],\qquad X_0\mapsto U^4,\quad X_1\mapsto U^3V,\quad X_2\mapsto UV^3,\quad X_3\mapsto V^4$$

de sorte que $\mathbf{k}[x_0,x_1,x_2,x_3]=\mathbf{S}/\mathfrak{a}\simeq\mathbf{k}[U^4,U^3V,UV^3,V^4]$. Il est plutôt facile d'expliciter un h.s.o.p. en utilisant le modèle de droite : $(U^4,V^4)$ est un h.s.o.p. ; ce qui correspond à $(x_0,x_3)$ pour le modèle de gauche. Posons $\mathbf{R}=\mathbf{k}[X_0,X_3]$.

En vu d'expliciter une suite régulière dans $\mathfrak{a}$, signalons que $T^4-(U^4)^3V^4\in\mathbf{k}[U^4,V^4][T]$ est un polynôme unitaire annulant $U^3V$, donc $f_1=T^4-X_0^3X_3\in\mathbf{R}[T]$ vérifie $f_1(X_1)\in\mathfrak{a}$. Et $T^4-U^4(V^4)^3\in\mathbf{k}[U^4,V^4][T]$ est un polynôme unitaire annulant $UV^3$, donc $f_2=T^4-X_0X_3^3\in\mathbf{R}[T]$ vérifie $f_2(X_2)\in\mathfrak{a}$.

Le polynôme $f_1(X_1)\in\mathbf{R}[X_1]$ est à coefficients dans $\mathbf{R}=\mathbf{k}[X_0,X_3]$ et unitaire en $X_1$. Et $f_2(X_2)\in\mathbf{R}[X_2]$ est unitaire en $X_2$. Par conséquent la suite $(X_1^4-X_0^3X_3,\;X_2^4-X_0X_3^3)$ est une suite régulière de $\mathbf{R}[X_1,X_2]=\mathbf{S}$ qui appartient à l'idéal $\mathfrak{a}$.

On aurait pu également dénicher une suite régulière en utilisant le critère V-7.4. En effet, la suite $(X_1^3-X_0^2X_2,\;X_2^3-X_1X_3^3)$ est régulière car les monômes dominants de ces deux polynômes pour l'ordre GRevLex sont respectivement $X_1^3$ et $X_2^3$.

**Un h.s.o.p. pour les 3 points de $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$**

On considère l'idéal $\mathfrak{a} = \langle XY,\, XZ,\, YZ\rangle$ de $\mathbf{S} = \mathbf{k}[X,Y,Z]$. Cet idéal est un « squarefree Veronese ideal » avec les paramètres $n = 3$ et $d = 2$. Il n'est pas difficile d'expliciter à la main un h.s.o.p. Mieux on dispose d'un automorphisme *linéaire* $\Theta$

$$\Theta : \mathbf{k}[X,Y,Z] \to \mathbf{k}[X,Y,Z], \qquad X \mapsto X+Y+Z, \quad Y \mapsto Y, \quad Z \mapsto Z$$

vérifiant les conditions annoncées au début de la section 3.5. Posons $\mathbf{R} = \mathbf{k}[X+Y+Z]$. On a $\mathbf{R} \cap \mathfrak{a} = 0$ et les éléments $Y$ et $Z$ sont entiers sur $\mathbf{R}$ modulo $\mathfrak{a}$ :

$$Y^2 - (X+Y+Z)Y \in \mathfrak{a} \qquad \text{et} \qquad Z^2 - (X+Y+Z)Z \in \mathfrak{a}$$

Au passage, on remarque c'est le polynôme indiquée dans la « variante » de la proposition 3.8. Ainsi la suite $\big(-Y(X+Z),\, -Z(X+Y)\big)$ est une suite régulière de $\mathbf{R}[Y,Z] = \mathbf{S}$.

# 4 Compléter un polynôme homogène en un h.s.o.p.

Etant donné un polynôme $F \in \mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]$ homogène de degré $> 0$ à coefficients dans un corps $\mathbf{k}$, il est bien connu qu'il existe, pour la $\mathbf{k}$-algèbre graduée $\mathbf{k}[\underline{X}]/\langle F\rangle$, un système de coordonnées gradué (terminologie de Bourbaki) *i.e.* en anglais, *homogeneous system of parameters* (abrégé h.s.o.p.). Un résultat en apparence plus précis est donné par le point *b.* du lemme 13.2. d'Eisenbud [Eis95], à savoir :

> **Énoncé d'Eisenbud**. *Etant donné un corps* $\mathbf{k}$ *et un polynôme* $F \in \mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]$ *homogène* non nul [1] *de degré* $> 0$*, il existe* $n-1$ *polynômes* $\Phi_2,\dots,\Phi_n$ *homogènes de degrés* $> 0$ *tels que*
>
> $$\langle X_1,\dots,X_n\rangle \;\subset\; \sqrt{\langle F,\, \Phi_2,\, \dots,\, \Phi_n\rangle}$$

La preuve fournie par Eisenbud fait appel aux propriétés noethériennes de l'anneau de polynômes $\mathbf{k}[\underline{X}]$ avec notamment l'utilisation de premiers minimaux et du théorème d'évitement. Dans un premier temps, notre objectif consiste à donner une preuve effective du résultat d'Eisenbud, c'est-à-dire dans le cas d'un corps, à construire explicitement, à partir de $F$ bien sûr, $n-1$ polynômes homogènes de degrés $> 0$ complétant $F$. On commencera par traiter le cas d'un *monôme* $F$, de façon à dégager uniquement le procédé primitif (= procédé clé), relativement astucieux, il faut le reconnaître.

Mais ce n'est pas tout ! En enquêtant de plus près, on finit par obtenir un énoncé bien plus précis, valable sur tout anneau, mettant en jeu directement le polynôme $F$ via ses coefficients.

> **Énoncé** ♪ *Soit* $F \in \mathbf{A}[X_1,\dots,X_n]$ *homogène de degré* $> 0$*. Pour chaque coefficient* $a_\alpha$ *de* $F$*, il existe* $n-1$ *polynômes* $\Phi_{\alpha,2},\dots,\Phi_{\alpha,n}$ *homogènes de degrés* $> 0$ *tels que*
>
> $$a_\alpha\,\langle X_1,\dots,X_n\rangle \;\subset\; \sqrt{\langle F_\alpha,\, \Phi_{\alpha,2},\, \dots,\, \Phi_{\alpha,n}\rangle}$$
>
> *où* $F_\alpha$ *est un certain morceau de* $F$ *entièrement déterminé par le* $n$*-uplet* $\alpha$ *: le monôme* $a_\alpha X^\alpha$ *est le monôme de tête de* $F_\alpha$ *pour* RevLex *avec un ordre adéquat sur les indéterminées* $X_i$*.*

Pour comprendre l'impact de ce résultat, il est indispensable d'apporter des précisions sur le « sous-polynôme » $F_\alpha$ de $F$. On peut déjà mentionner que, sur un corps, on dispose facilement d'un $\alpha$ tel que $F_\alpha = F$ (cf. remarque 4.3) et donc l'énoncé ♪ couvre largement celui d'Eisenbud. Cet énoncé n'est pas venu tout seul. Il est le fruit de l'examen attentif du cas d'un polynôme à coefficients dans un *corps*. En traitant à la main un exemple [2], se dessine alors naturellement une structure « en strates » sur les monômes de $F$, cette structure étant paramétrée par les partitions de l'entier $m = \deg F$ de longueur $n$ où $n$ est le nombre d'indéterminées.

Qu'en est-il de l'obtention d'un énoncé sur un anneau local ? Dans cette situation, le polynôme $F$ n'est pas nécessairement du type $F_\alpha$. Il s'agit alors de singer le passage habituel du corps à l'anneau local qui consiste à raisonner modulo l'idéal maximal. Ici, on raisonne modulo l'idéal $\mathfrak{J}_\alpha$ qui est l'idéal des coefficients de $F$ qui ne sont pas dans $F_\alpha$, et le lemme de Nakayama termine le travail. On obtient donc l'énoncé suivant :

1. Utiliser le qualificatif « primitif » serait peut-être plus heureux.
2. Aussi simple soit-il, pourvu que $\deg F \geqslant 2$ !

**Énoncé** ♫ *Soit $F \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ homogène de degré $> 0$. Pour chaque coefficient $a_\alpha$ de $F$, il existe $n-1$ polynômes $\Phi_{\alpha,2}, \ldots, \Phi_{\alpha,n}$ homogènes de degrés $> 0$ et un coefficient $s_\alpha \in \mathbf{A}$ tels que*

$$s_\alpha \langle X_1, \ldots, X_n \rangle \ \subset \ \sqrt{\langle F,\, \Phi_{\alpha,2},\, \ldots,\, \Phi_{\alpha,n} \rangle}$$

*avec $s_\alpha \equiv a_\alpha^\bullet \bmod \mathfrak{J}_\alpha$ où $\mathfrak{J}_\alpha$ est l'idéal des coefficients de $F$ qui ne figurent pas dans $F_\alpha$.*

Et ce dernier énoncé a l'immense avantage de s'exprimer très facilement en français :

**Énoncé** ♪ *Soit $F = \sum a_\alpha X^\alpha \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ homogène de degré $> 0$ de contenu $\mathrm{c}(F) = \langle (a_\alpha) \rangle$. Alors il existe un système de localisations $(s_\alpha)$ vérifiant $\mathrm{c}(F) \subset \sqrt{\langle\, (s_\alpha)\, \rangle}$ tel que pour chaque $s = s_\alpha$, le polynôme $F$ soit complétable dans le localisé $\mathbf{A}_s[\underline{X}]$. En particulier, un polynôme homogène primitif[3] de degré $> 0$ est* localement *complétable.*

De plus, il permet de régler définitivement le cas de la complétion d'un polynôme *primitif* homogène de degré $> 0$ dans le cas d'un corps ou d'un anneau local. Plus précisément :

**Énoncé** ♬ *Soit $F$ un polynôme homogène de degré $> 0$ et primitif à coefficients dans un anneau local. Alors $F$ est complétable.*

C'est ce dernier énoncé qui nous permettra (cf. le théorème 5.7 de la section suivante) de revisiter l'indépendance analytique d'un système de paramètres d'un anneau local noethérien. En réalité, c'est en étudiant l'indépendance analytique que nous en sommes venus à élaborer cette section sur la complétion d'un polynôme homogène en un h.s.o.p. !

## 4.1 Compléter un monôme $a_\alpha X^\alpha$

Afin de ne pas concentrer l'information dans la section suivante, on se propose de traiter ici la complétion d'un monôme $X^\alpha$. Pour le même prix, on peut même se permettre le luxe de glisser un coefficient $a_\alpha$ d'un anneau $\mathbf{A}$. Et afin de coller à la suite (le cas d'un polynôme), on suppose que $\alpha$ est décroissant, *i.e.* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ avec $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$. Enfin, on suppose que $|\alpha| > 0$. Pour alléger un peu les notations, on retire l'indice $\alpha$ sur les $\Phi_{\alpha,k}$.

Voici la méthode mise en oeuvre pour le monôme $F = a_\alpha X^\alpha$. On considère le polynôme

$$\Phi_n \ = \ X_n^{|\alpha|-\alpha_n} \ + \ \frac{F}{X_n^{\alpha_n}}$$

homogène de degré $|\alpha| - \alpha_n > 0$ vérifiant $X_n^{|\alpha|} \ = \ X_n^{\alpha_n}\, \Phi_n - F \ \in \langle \Phi_n,\, F \rangle$.
On recommence avec le polynôme $\Phi_n(X_n := 0)$ homogène de degré $> 0$ et qui ne dépend que des $n-1$ premières indéterminées.

Pour $k \geqslant 2$, on voit donc comment définir $\Phi_k = \Phi_k(X_1, \ldots, X_k)$ à partir de $\Phi_{k+1}$

$$\Phi_k \ = \ X_k^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}} \ + \ \frac{\Phi_{k+1}(X_{k+1} := 0)}{X_k^{\alpha_k}}$$

qui est un polynôme homogène de degré $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1} > 0$ (du fait que $|\alpha| = m > 0$ et que $\alpha$ est décroissant). De cette définition, on tire l'appartenance

$$X_k^{\alpha_1+\cdots+\alpha_k} \ \in \ \langle \Phi_k,\, \Phi_{k+1},\, X_{k+1} \rangle$$

où on a posé $\Phi_{n+1} = F$ et $X_{n+1} = 0$.

A la fin, pour $k = 2$, on tombe sur

$$\Phi_2 \ = \ X_2^{\alpha_1} \ + \ a_\alpha X_1^{\alpha_1}$$

d'où l'on tire $a_\alpha X_1^{\alpha_1} \in \langle \Phi_1, \Phi_2, X_2 \rangle$ en posant $\Phi_1 = 0$ afin d'uniformiser un peu les choses.

On récupère globalement l'inclusion :

$$\langle a_\alpha X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_n \rangle \ \subset \ \sqrt{\langle F,\, \Phi_2,\, \ldots,\, \Phi_n \rangle}$$

3. Un polynôme est primitif lorsque l'idéal engendré par ses coefficients contient 1.

Il est évidemment très facile d'adapter le procédé ci-dessus à un $\alpha$ non-rangé. Il suffit pour cela de considérer une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui range $\alpha$, *i.e.* telle que $\alpha_{\sigma(1)} \geqslant \cdots \geqslant \alpha_{\sigma(n)}$.

Le procédé mis en place prouve largement le résultat suivant :

**Proposition 4.1.** *Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| > 0$. Il existe $n-1$ polynômes $\Phi_{\alpha,2}, \ldots, \Phi_{\alpha,n}$ homogènes de degrés $> 0$ tels que*

$$a_\alpha \langle X_1, X_2, \ldots, X_n\rangle \ \subset \ \sqrt{\langle a_\alpha X^\alpha, \Phi_{\alpha,2}, \ldots, \Phi_{\alpha,n}\rangle}$$

*En particulier, le monôme $a_\alpha X^\alpha$ est complétable sur le localisé $\mathbf{A}_{a_\alpha}[\underline{X}]$.*

**Remarque 4.2.** Pour le monôme $aX_1^m$, l'algorithme ci-dessus fournit $\Phi_2 = X_2^m + aX_1^m$, $\ldots$, $\Phi_n = X_n^m + aX_1^m$. A la main, il serait naturel de proposer $\Phi_2 = X_2$, $\ldots$, $\Phi_n = X_n$ pour obtenir ce que l'on vise, à savoir l'inclusion $\langle aX_1, \ldots, X_n\rangle \subset \sqrt{\langle aX_1^m, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\rangle}$.

Au vu de cette remarque, on propose l'amélioration suivante. Un monôme $a_\alpha X^\alpha$ de $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ avec $\alpha$ décroissant (pour simplifier l'exposé) peut être vu comme un monôme de $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_{n_\alpha}]$ où $n_\alpha$ est l'indice de la dernière indéterminée qui figure effectivement dans $X^\alpha$. Ainsi pour compléter un tel monôme, on commence par poser $\Phi_k = X_k$ pour $k \in [\![n_\alpha, n]\!]$ puis on applique le procédé ci-dessus pour déterminer les $\Phi_k$ avec $k \in [\![2, n_\alpha - 1]\!]$.

## 4.2 Compléter $F_\alpha$ grâce à RevLex

**Deux exemples avec deux indéterminées**

• Commençons par un exemple très simple, trop simple même. Cependant il a le mérite d'expliquer comment on peut affaiblir les hypothèses sur l'anneau de base en passant de $\mathbf{k}$ corps à $\mathbf{A}$ anneau quelconque. Considérons $F = aX^2+bXY+cY^2 \in \mathbf{A}[X,Y]$. Imaginons que l'on veuille compléter ce polynôme *sur un corps*. Il est alors naturel de distinguer les deux cas suivants :

① $a$ ou $c$ inversible ② $a = c = 0$ et $b$ inversible

Voyons dans ces deux cas, comment compléter le polynôme $F$ (c'est faisable, comme nous le dit Eisenbud).

① On suppose $a$ inversible. On applique le procédé précédent au *polynôme* $F$ en s'appuyant sur le *monôme* $aX^2$ et on obtient $\Phi = Y$ en tenant compte de la remarque 4.2.

Si $c$ inversible, la situation est symétrique et on obtient $\Phi = X$.

② On suppose $a = c = 0$ et $b$ inversible donc $F = bXY$. Le procédé appliqué à ce monôme fournit $\Phi = Y + bX$.

On vient d'établir les inclusions suivantes, valables sur un anneau quelconque :

$$a\langle X,Y\rangle \subset \sqrt{\langle F_a, \Phi_a\rangle} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_a = F \\ \Phi_a = Y \end{cases}$$

$$c\langle X,Y\rangle \subset \sqrt{\langle F_c, \Phi_c\rangle} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_c = F \\ \Phi_c = X \end{cases}$$

$$b\langle X,Y\rangle \subset \sqrt{\langle F_b, \Phi_b\rangle} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_b = bXY \\ \Phi_b = bX + Y \end{cases}$$

Dans le cas ①, interviennent les monômes $(2,0)$ et $(0,2)$ et dans le cas ② intervient le monôme $(1,1)$. Le fait d'avoir distingué ces deux cas n'est pas anodin comme nous le verrons plus loin.

• Voyons ce qui se passe pour un polynôme un peu plus dodu, à savoir $F = aX^4 + bX^3Y + cX^2Y^2 + dXY^3 + eY^4$. Comme dans l'exemple précédent, on commence par travailler avec un corps à la base, et on distingue 3 cas.

① $a$ ou $e$ inversible ② $(a = e = 0)$ et ($b$ ou $d$ inversible) ③ $a = e = b = d = 0$ et $c$ inversible

① Supposons $a$ inversible. En appliquant le procédé de complétion au polynôme $F$ en s'appuyant sur le monôme $aX^4$, on obtient $\Phi = Y$ en tenant compte de la remarque 4.2. Lorsque $e$ est inversible, on trouve $\Phi = X$.

② On suppose $a = e = 0$ et $b$ inversible. On applique le procédé de complétion au polynôme $F = bX^3Y + cX^2Y^2 + dXY^3$ en s'appuyant sur le monôme $bX^3Y$. Ce qui est remarquable, c'est que la définition de $\Phi$ donnée dans le procédé de complétion d'un *monôme* est valable pour ce *polynôme*. En effet, le procédé demande de diviser $F$ par $Y$, ce qui a bien du sens (heureusement que $a$ est nul, donc !). Ainsi $\Phi = Y^3 + bX^3 + cX^2Y + dXY^2$. Ce polynôme $\Phi$ a la vocation de provoquer les appartenances $Y^4 \in \langle \Phi, F\rangle$ et $bX^3 \in \langle \Phi, Y\rangle$. On a donc bien $b\langle X, Y\rangle \subset \sqrt{\langle F, \Phi\rangle}$. Le cas où $d$ est inversible se traite de la même façon.

③ On suppose $a = e = b = d = 0$ et $c$ inversible. Ainsi $F = cX^2Y^2$. Le procédé de complétion appliqué à ce monôme fournit $\Phi = Y^2 + cX^2$.

On vient d'établir les inclusions suivantes, valables sur un anneau quelconque :

$$a\langle X, Y\rangle \subset \sqrt{\langle F_a, \Phi_a\rangle} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} F_a = F \\ \Phi_a = Y \end{cases}$$

$$e\langle X, Y\rangle \subset \sqrt{\langle F_e, \Phi_e\rangle} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} F_e = F \\ \Phi_e = X \end{cases}$$

$$b\langle X, Y\rangle \subset \sqrt{\langle F_b, \Phi_b\rangle} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} F_b = bX^3Y + cX^2Y^2 + dXY^3 \\ \Phi_b = Y^3 + bX^3 + cX^2Y + dXY^2 \end{cases}$$

$$d\langle X, Y\rangle \subset \sqrt{\langle F_d, \Phi_d\rangle} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} F_d = bX^3Y + cX^2Y^2 + dXY^3 \\ \Phi_d = X^3 + bX^2Y + cXY^2 + dY^3 \end{cases}$$

$$c\langle X, Y\rangle \subset \sqrt{\langle F_c, \Phi_c\rangle} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} F_c = cX^2Y^2 \\ \Phi_c = Y^2 + cX^2 \end{cases}$$

**Bilan.** Il ressort de ces exemples une organisation des monômes en strates, strates qui sont paramétrées par les partitions de l'entier $m$ de longueur $n$. Dans le dernier exemple, on a $m = 4$ et $n = 2$ et les partitions correspondant aux trois cas sont $[4, 0]$ ; $[3, 1]$ ; $[2, 2]$.

### L'ordre RevLex sur les $n$-partitions de $m$ et organisation des monômes en strates

Les exemples nous incitent donc à considérer la relation d'ordre total RevLex, notée $\preccurlyeq$, sur les partitions d'un entier $m$ de longueur $n$. Pour deux $n$-partitions décroissantes $p = [p_1, \dots, p_n]$ et $q = [q_1, \dots, q_n]$ du même entier $m$, on définit $p \prec q$ via $p_i \geqslant q_i$ où $i = \sup\{k \mid p_k \neq q_k\}$.

Pour un $n$-uplet $\alpha$ vérifiant $|\alpha| = m$, on notera $\widetilde{\alpha}$ la partition correspondante.

Par exemple, voilà comment sont ordonnées les 3-partitions de 4 :

$$[4, 0, 0] \ \succ \ [3, 1, 0] \ \succ \ [2, 2, 0] \ \succ \ [2, 1, 1]$$

ce qui se traduit sur les monômes par la stratification :

$$X^4, Y^4, Z^4 \ // \ X^3Y,\ X^3Z,\ XY^3,\ XZ^3,\ Y^3Z,\ YZ^3 \ // \ X^2Y^2,\ X^2Z^2,\ Y^2Z^2 \ // \ X^2YZ,\ XY^2Z,\ XYZ^2$$

**Théorème** ♪ *Soit $F \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ homogène de degré $> 0$. Pour chaque coefficient $a_\alpha$ de $F$, il existe $n - 1$ polynômes $\Phi_{\alpha,2}, \dots, \Phi_{\alpha,n}$ homogènes de degrés $> 0$ tels que*

$$a_\alpha \langle X_1, \dots, X_n\rangle \ \subset \ \sqrt{\langle F_\alpha,\, \Phi_{\alpha,2},\, \dots,\, \Phi_{\alpha,n}\rangle} \qquad \text{où } F_\alpha \ = \ \sum_{\widetilde{\beta} \preccurlyeq \widetilde{\alpha}} a_\beta X^\beta$$

*Plus précisément, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ range $\alpha$ de manière décroissante, i.e. $\alpha_{\sigma(1)} \geqslant \cdots \geqslant \alpha_{\sigma(n)}$, alors on a l'inclusion*

$$\langle a_\alpha X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}\rangle \ \subset \ \sqrt{\langle F_\alpha,\, \Phi_{\alpha,2},\, \dots,\, \Phi_{\alpha,n}\rangle}$$

**Remarque 4.3.** Soit $F$ un polynôme à coefficients dans un corps. Alors il existe un $\alpha$ tel que $F = F_\alpha$. En effet, il suffit de considérer la partition dominante $p$ de $F$ (*i.e.* la plus grande partition pour l'ordre RevLex) et d'en trouver un représentant $\alpha$ *i.e.* vérifiant $\widetilde{\alpha} = p$. Dans ce cas, $a_\alpha X^\alpha$ est le coefficient dominant de $F$ pour l'ordre RevLex et avec $X_{\sigma(1)} > \cdots > X_{\sigma(n)}$ où $\sigma$ désigne une permutation rangeant $\alpha$ de manière décroissante.

***Preuve.*** La preuve consiste à faire une relecture de celle donnée dans le cas d'un monôme en prenant en considération l'ordre de parcours sur les monômes d'un polynôme. On considère une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui range $\alpha$ de manière décroissante donc $\widetilde{\alpha}_i = \alpha_{\sigma(i)}$. Pour alléger les notations, on pose $Y_k = X_{\sigma(k)}$. Toujours par souci de lisibilité, on notera $\Phi_k$ au lieu de $\Phi_{\alpha,k}$.

Tout d'abord, un $n$-uplet $\beta$ vérifie toujours $\beta_j \geqslant \widetilde{\beta}_n$ pour tout $j$. Les $\beta$ tels que $\widetilde{\beta} \preccurlyeq \widetilde{\alpha}$ vérifient $\widetilde{\beta}_n \geqslant \widetilde{\alpha}_n$, donc vérifient $\widetilde{\beta}_{\sigma(n)} \geqslant \widetilde{\beta}_n \geqslant \widetilde{\alpha}_n = \widetilde{\alpha}_n$. Cela a donc du sens de considérer

$$\Phi_n \;=\; Y_n^{|\alpha|-\widetilde{\alpha}_n} \;+\; \frac{F_\alpha}{Y_n^{\widetilde{\alpha}_n}}$$

Le polynôme $\Phi_n - Y_n^{|\alpha|-\widetilde{\alpha}_n} = F_\alpha / Y_n^{\widetilde{\alpha}_n}$ s'écrit $\sum a_\beta X^{\beta'}$ où $\beta'$ est le $n$-uplet défini à partir de $\beta$ par : $\beta' = \beta - \alpha_{\sigma(n)}\varepsilon_{\sigma(n)} = (\beta_1, \ldots, \beta_{\sigma(n)} - \alpha_{\sigma(n)}, \ldots, \beta_n)$. Ainsi $G = \Phi_n(Y_n := 0)$ ne contient que des $a_\beta$ tels que $\beta'_{\sigma(n)} = 0$ *i.e.* tels que $\beta_{\sigma(n)} = \alpha_{\sigma(n)}$, ce qui implique $\widetilde{\beta}_n = \widetilde{\alpha}_n$ puis $\widetilde{\beta}_{n-1} \geqslant \widetilde{\alpha}_{n-1}$ car $\widetilde{\beta} \preccurlyeq \widetilde{\alpha}$. Par conséquent, $G$ s'écrit $\sum a_\beta X^{\beta'}$ avec la condition $\widetilde{\beta'} \preccurlyeq \widetilde{\alpha'}$ (en effet, on a $\widetilde{\alpha'} = [\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_{n-1}, 0]$, $\widetilde{\beta'} = [\widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_{n-1}, 0]$ et on sait que $\widetilde{\beta}_{n-1} \geqslant \widetilde{\alpha}_{n-1}$).

On est donc dans les conditions initiales avec le polynôme $G$ qui dépend de $n-1$ indéterminées ($G$ ne dépend pas de $Y_n$, par construction). Comme dans la preuve de la complétion d'un monôme, on peut définir les $\Phi_k = \Phi_k(Y_1, \ldots, Y_k)$ par la formule de récurrence suivante :

$$(\gimel) \qquad \forall\, k \geqslant 2, \qquad \Phi_k \;=\; Y_k^{\widetilde{\alpha}_1 + \cdots + \widetilde{\alpha}_{k-1}} \;+\; \frac{\Phi_{k+1}(Y_{k+1} := 0)}{Y_k^{\widetilde{\alpha}_k}}$$

où on a posé $\Phi_{n+1} = F_\alpha$ et $Y_{n+1} = 0$. On recommence jusqu'à définir $\Phi_2$ et on obtient

$$\Phi_2(Y_2 := 0) \;=\; a_\alpha Y_1^{\widetilde{\alpha}_1}$$

En effet, les $a_\beta$ qui figurent dans $\Phi_2(Y_2 := 0)$ sont indexés par les $\beta$ vérifiant $\widetilde{\beta}_j = \widetilde{\alpha}_j$ pour tout $j \geqslant 2$. Comme $|\alpha| = |\beta|$, cela impose $\widetilde{\beta}_1 = \widetilde{\alpha}_1$ d'où l'expression de $\Phi_2(Y_2 := 0)$.

Bilan des courses. Pour tout $k \geqslant 2$, les $\Phi_k$ ainsi définis sont homogènes de degré $\widetilde{\alpha}_1 + \cdots + \widetilde{\alpha}_{k-1} > 0$ et vérifient

$$Y_k^{\widetilde{\alpha}_1 + \cdots + \widetilde{\alpha}_k} \;\in\; \langle \Phi_k,\, \Phi_{k+1},\, Y_{k+1} \rangle$$

où $\Phi_{n+1} = F_\alpha$ et $Y_{n+1} = 0$. De plus, $a_\alpha Y_1^{\widetilde{\alpha}_1} \in \langle \Phi_2, Y_2 \rangle$. Ainsi $\langle a_\alpha Y_1, \ldots, Y_n \rangle \subset \sqrt{\langle F_\alpha,\, \Phi_{\alpha,2},\, \ldots,\, \Phi_{\alpha,n} \rangle}$. □

**Une formule close pour les $\Phi_{\alpha,k}$**

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\sigma$ est une permutation rangeant $\alpha$ de manière décroissante. En posant $Y_k = X_{\sigma(k)}$, on a défini, dans la preuve précédente, une suite de polynômes $\Phi_{\alpha,k}$ pour $k \in [\![2, n]\!]$ par la formule récurrente suivante :

$$(\gimel) \qquad \forall\, k \geqslant 2, \qquad \Phi_{\alpha,k} \;=\; Y_k^{\widetilde{\alpha}_1 + \cdots + \widetilde{\alpha}_{k-1}} \;+\; \frac{\Phi_{\alpha,k+1}(Y_{k+1} := 0)}{Y_k^{\widetilde{\alpha}_k}}$$

où on a posé $\Phi_{\alpha,n+1} = F_\alpha$ et $Y_{n+1} = 0$.

On peut donner une formule close pour ces polynômes $\Phi_{\alpha,k}$ :

$$(\daleth) \qquad \Phi_{\alpha,k} \;=\; Y_k^{\widetilde{\alpha}_1 + \cdots + \widetilde{\alpha}_{k-1}} \;+\; \frac{\text{la } (\widetilde{\alpha}_{k+1}, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)\text{-composante de } F_\alpha}{Y_k^{\widetilde{\alpha}_k} \cdots Y_n^{\widetilde{\alpha}_n}}$$

où la $(\widetilde{\alpha}_{k+1},\dots,\widetilde{\alpha}_n)$-composante de $F_\alpha$ est le polynôme constitué des monômes $a_\beta X^\beta$ de $F_\alpha$ (donc $\widetilde{\beta}\preccurlyeq\widetilde{\alpha}$) tels que $\widetilde{\beta}_{\sigma(i)}=\widetilde{\alpha}_{\sigma(i)}$ pour $i\geqslant k+1$. Remarquons que le quotient est exact car les deux conditions : $\widetilde{\beta}\preccurlyeq\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}_{\sigma(i)}=\widetilde{\alpha}_{\sigma(i)}$ pour $i\geqslant k+1$ impliquent $\widetilde{\beta}_{\sigma(k)}\geqslant\widetilde{\alpha}_{\sigma(k)}$.

Pour établir $(\tilde{\gamma})$ à partir de $(\gamma)$, on procède par récurrence descendante sur $k$. Pour $k=n$, les formules sont identiques. Supposons $\Phi_{\alpha,k+1}$ défini par $(\tilde{\gamma})$ et montrons que le polynôme $\Phi_{\alpha,k}$ défini par $(\gamma)$ coïncide avec la formule $(\tilde{\gamma})$. Pour cela, on a besoin de connaître $\Phi_{\alpha,k+1}(Y_{k+1}:=0)$. La formule $(\tilde{\gamma})$ en $k+1$ dit qu'il s'agit du membre de gauche dans l'égalité ci-dessous (égalité qui se prouve très facilement : en réalisant $Y_{k+1}:=0$ dans la $(\widetilde{\alpha}_{k+2},\dots,\widetilde{\alpha}_n)$-composante de $F_\alpha$, on ne conserve que les $\beta$ tels que $\widetilde{\beta}_{\sigma(k)}=\widetilde{\alpha}_{\sigma(k)}$, ce qui fait donc apparaître la $(\widetilde{\alpha}_{k+1},\dots,\widetilde{\alpha}_n)$-composante de $F_\alpha$)

$$\frac{\text{la } (\widetilde{\alpha}_{k+2},\dots,\widetilde{\alpha}_n)\text{-composante de } F_\alpha}{Y_{k+1}^{\widetilde{\alpha}_{k+1}}\cdots Y_n^{\widetilde{\alpha}_n}}\big(Y_{k+1}:=0\big) \quad = \quad \frac{\text{la } (\widetilde{\alpha}_{k+1},\dots,\widetilde{\alpha}_n)\text{-composante de } F_\alpha}{Y_{k+1}^{\widetilde{\alpha}_{k+1}}\cdots Y_n^{\widetilde{\alpha}_n}}$$

Ainsi $\Phi_{\alpha,k}$ défini par $(\gamma)$ vaut :

$$\Phi_{\alpha,k} \;=\; Y_k^{\widetilde{\alpha}_1+\cdots+\widetilde{\alpha}_{k-1}} \;+\; \frac{1}{Y_k^{\widetilde{\alpha}_k}}\,\frac{\text{la } (\widetilde{\alpha}_{k+1},\dots,\widetilde{\alpha}_n)\text{-composante de } F_\alpha}{Y_{k+1}^{\widetilde{\alpha}_{k+1}}\cdots Y_n^{\widetilde{\alpha}_n}}$$

ce qui correspond bien à la formule $(\tilde{\gamma})$.

**Où l'on affine un peu le procédé**

On peut affiner un peu le procédé en réglant d'abord le sort des $\alpha_i$ nuls comme dans la remarque 4.2. Concrètement, si $n_\alpha\in[\![1,n]\!]$ est défini via $\alpha_{\sigma(i)}=0$ pour tout $i\in[\![n_\alpha,n]\!]$ et $\alpha_{\sigma(n_\alpha)}\neq 0$, alors on peut poser $\Phi_k=X_{\sigma(k)}$ pour tout $k\in[\![n_\alpha,n]\!]$.

**Quelques commentaires sur le caractère régulier des $\Phi_{\alpha,k}$**

Soit $\alpha\in\mathbb{N}^n$ supposé rangé de manière décroissante pour simplifier. Supposons que $a_\alpha$ soit un élément régulier de $\mathbf{A}$. Le théorème ♪ fournit l'inclusion $\langle a_\alpha X_1,\dots,X_n\rangle\subset\sqrt{\langle F_\alpha,\,\Phi_{\alpha,2},\,\dots,\,\Phi_{\alpha,n}\rangle}$. Comme la suite $(a_\alpha X_1,\dots,X_n)$ est complètement sécante, il en est de même de la suite $(F_\alpha,\,\Phi_{\alpha,2},\,\dots,\,\Phi_{\alpha,n})$. Les polynômes étant homogènes, la proposition V-6.2 implique que cette suite est commutativement régulière.

Si $\alpha=(m,0,\dots,0)$, on rappelle que l'on peut prendre $\Phi_{\alpha,k}=X_k$. Il n'est alors pas difficile de montrer que la suite $(\Phi_{\alpha,2},\dots,\Phi_{\alpha,n},F_\alpha)$ est régulière.

Si $\alpha\neq(m,0\dots,0)$, alors $\Phi_{\alpha,k}$ est homogène en les variables $X_1,\dots,X_k$ et unitaire de monôme dominant $X_k^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}}$ pour l'ordre lexicographique avec $X_n>\cdots>X_1$. En particulier, la suite $(\Phi_{\alpha,2},\dots,\Phi_{\alpha,n})$ est régulière (d'après le critère donné à la proposition V-7.4). Peut-on montrer à la main que $F_\alpha$ est régulier modulo les $\Phi_{\alpha,k}$ ?

Le fait que la suite $(F_\alpha,\Phi_{\alpha,2},\dots,\Phi_{\alpha,n})$ soit régulière implique que la suite des $\Phi_{\alpha,k}$ est régulière dans le quotient $\mathbf{A}[\underline{X}]/\langle F_\alpha\rangle$.

Mettons-nous dans la situation où il existe un $\alpha$ tel que $F=F_\alpha$ avec $a_\alpha$ inversible. Typiquement, cela fonctionne si $\mathbf{A}$ est un corps. On obtient d'une part que $\mathbf{A}[\underline{X}]/\langle F\rangle$ est entier sur $\mathbf{A}[\Phi_{\alpha,2},\dots,\Phi_{\alpha,n}]$ et d'autre part que les $\Phi_{\alpha,k}$ sont algébriquement indépendants modulo $F$ (cf. la proposition V-5.3 ; tout d'abord, $\mathbf{A}$ est un sous-anneau de $\mathbf{A}[\underline{X}]/\langle F\rangle$ car $F$ est homogène de degré $>0$ ; de plus, comme les $\Phi_{\alpha,k}$ sont homogènes de degré $>0$, on a $\langle\Phi_{\alpha,2},\dots,\Phi_{\alpha,n}\rangle\cap\mathbf{A}=\{0\}$).

## 4.3 Compléter $F$ localement avec Nakayama

**Théorème ♫** *Soit $F\in\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n]$ homogène de degré $>0$. Pour chaque coefficient $a_\alpha$ de $F$, il existe $n-1$ polynômes $\Phi_{\alpha,2},\dots,\Phi_{\alpha,n}$ homogènes de degrés $>0$ et $s_\alpha\in\mathbf{A}$ tels que*

$$s_\alpha\,\langle X_1,\dots,X_n\rangle\;\subset\;\sqrt{\langle F,\,\Phi_{\alpha,2},\,\dots,\,\Phi_{\alpha,n}\rangle}$$

*avec $s_\alpha\equiv a_\alpha^\bullet \bmod\mathfrak{J}_\alpha$ où $\mathfrak{J}_\alpha=\langle\,a_\beta\mid\widetilde{\beta}\succ\widetilde{\alpha}\,\rangle$.*

***Preuve.*** D'après le théorème ♪, il existe une puissance $e$ telle que

$$a_\alpha^e \langle \underline{X} \rangle^e \ \subset \ \langle F_\alpha,\, \Phi_{\alpha,2},\, \ldots,\, \Phi_{\alpha,n} \rangle$$

En utilisant que $F \equiv F_\alpha \bmod \mathfrak{J}_\alpha$, on obtient

$$a_\alpha^e \langle \underline{X} \rangle^e \ \subset \ \langle F,\, \Phi_{\alpha,2},\, \ldots,\, \Phi_{\alpha,n} \rangle \ + \ \mathfrak{J}_\alpha\, \mathbf{A}[\underline{X}]$$

On prend la composante homogène de degré $e$ de ces $\mathbf{A}[\underline{X}]$-modules gradués :

$$a_\alpha^e\, \mathbf{A}[\underline{X}]_e \ \subset \ \langle F,\, \Phi_{\alpha,2},\, \ldots,\, \Phi_{\alpha,n} \rangle_e \ + \ \mathfrak{J}_\alpha\, \mathbf{A}[\underline{X}]_e$$

Le lemme de Nakayama appliqué au $\mathbf{A}$-module de type fini $\mathbf{A}[\underline{X}]_e$ fournit un scalaire $s_\alpha$, égal à une certaine puissance de $a_\alpha^e$ modulo $\mathfrak{J}_\alpha$, tel que

$$s_\alpha\, \mathbf{A}[\underline{X}]_e \ \subset \ \langle F,\, \Phi_{\alpha,2},\, \ldots,\, \Phi_{\alpha,n} \rangle_e$$

L'idéal étant engendré par des polynômes homogènes, on obtient

$$s_\alpha\, \langle \underline{X} \rangle^e \ \subset \ \langle F,\, \Phi_{\alpha,2},\, \ldots,\, \Phi_{\alpha,n} \rangle$$

□

**Aparté.** On a utilisé le lemme de Nakayama sous la forme suivante : « Soient $E$ et $F$ deux sous-modules d'un même $\mathbf{A}$-module, $\mathfrak{c}$ un idéal et $a$ un scalaire. On suppose que $E$ est de type fini. Si $aE \subset F + \mathfrak{c}E$ alors $a^\bullet \in \mathfrak{c} + (F : E)$ *i.e.* il existe $c \in \mathfrak{c}$ tel que $(a^\bullet + c)E \subset F$.

Justification. On écrit $E = \mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_n$. On traduit l'hypothèse : il existe des éléments $y_1, \ldots, y_n$ de $F$ et une matrice carrée $C$ dont les coefficients $c_{ij}$ sont dans $\mathfrak{c}$ tels que

$$a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \ + \ C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (aI_n - C) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

En multipliant par la transposée de la comatrice, on obtient que $\det(aI_n - C)\, x_i \in F$. En développant ce déterminant, on obtient $(a^n + c)E \subset F$ pour un certain $c \in \mathfrak{c}$. **Fin de l'aparté.**

La réalisation pratique de « la mise en situation Nakayama » n'est pas aisée. On peut cependant l'illustrer facilement avec l'exemple $F = aX^2 + bXY + cY^2$ lorsque l'on s'intéresse au monôme $bXY$. Ici $F_b = bXY$. On rappelle que l'on obtient $\Phi_b = Y + bX$, noté $\Phi$ pour alléger, produisant les égalités $Y^2 = Y\Phi - F_b$ et $bX = \Phi - Y$ ; d'où $b^2X^2 = bX\Phi - F_b$. Et bien sûr $bXY = F_b$. Regroupons ces informations matriciellement :

$$\begin{pmatrix} b^2 & . & . \\ . & b & . \\ . & . & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^2 \\ XY \\ Y^2 \end{pmatrix} \ \equiv \ \begin{pmatrix} a & . & c \\ -a & . & -c \\ a & . & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^2 \\ XY \\ Y^2 \end{pmatrix} \quad \bmod \langle F, \Phi \rangle$$

On note $D$ la matrice diagonale et $R$ la matrice de droite à coefficients dans le « radical » $\mathfrak{J}_b = \langle a, c \rangle$. Ainsi, $s_b = \det(D - R)$ est congru à $b^3$ modulo $\langle a, c \rangle$ et vérifie $s_b \langle X, Y \rangle^2 \subset \langle F, \Phi \rangle$.

Comme annoncé en introduction, l'énoncé ♫ a une reformulation relativement agréable car exprimable uniquement en français :

**Théorème** ♪ *Soit $F = \sum a_\alpha X^\alpha \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ homogène de degré $> 0$ de contenu $\mathrm{c}(F) = \langle (a_\alpha) \rangle$. Alors il existe un système de localisations $(s_\alpha)$ vérifiant $\mathrm{c}(F) \subset \sqrt{\langle (s_\alpha) \rangle}$ tel que pour chaque $s = s_\alpha$, le polynôme $F$ soit complétable dans le localisé $\mathbf{A}_s[\underline{X}]$. En particulier, un polynôme homogène primitif de degré $> 0$ est* localement *complétable.*

***Preuve.*** La seule chose à vérifier est l'inclusion $\mathrm{c}(F) \subset \sqrt{\langle (s_\alpha) \rangle}$ où les $s_\alpha$ sont ceux de l'énoncé ♫ c'est-à-dire définis via $s_\alpha \equiv a_\alpha^\bullet \bmod \mathfrak{J}_\alpha$. En commençant par les $\alpha$ dont la partition $\widetilde{\alpha}$ est la plus grande, on montre pas à pas (en parcourant les partitions dans l'ordre décroissant) que $a_\alpha \in \sqrt{\langle s_\beta \ \mid \ \widetilde{\beta} \succ \widetilde{\alpha} \rangle}$. □

**Théorème** ♫ *Soit $F$ un polynôme homogène de degré $> 0$ et primitif à coefficients dans un anneau local. Alors $F$ est complétable.*

***Preuve.*** On utilise l'énoncé ♪ précédent. Le fait que $F$ soit primitif implique que les localisations $(s_\alpha)$ sont comaximales. Comme l'anneau est local, un certain $s = s_\alpha$ est inversible. Le polynôme étant complétable sur le localisé $\mathbf{A}_s[\underline{X}]$, il est complétable sur $\mathbf{A}[\underline{X}]$. □

## 4.4 Une implémentation en Magma

Pour terminer, donnons notre code Magma qui correspond à l'algorithme décrit précédemment. Nous accompagnons le code de quelques exemples.

Insistons sur le fait que l'algorithme présenté agit uniquement sur des $n$-uplets d'entiers. Il n'y a aucun test sur le degré d'un polynôme (qui nécessiterait d'avoir un test à 0 dans l'anneau de base). Le plus difficile, finalement, est d'ordonner un $n$-uplet !

HsopCompletionTools.magma

```
ITS := IntegerToString ;
MC := MonomialCoefficient ;

Tri := func <i,j | i gt j select -1 else i eq j select 0 else +1 > ;

ReverseMinus := func < p | Reverse([-pi : pi in p]) > ;

LessThan := function(p, q)
  // p, q sont deux partitions de même longeur et de même somme
  // Retourne p <=_revlex q i.e. ReverseMinus(p) <=_lex ReverseMinus(q)
  assert #p eq #q and &+p eq &+q ;
  return ReverseMinus(p) le ReverseMinus(q) ;
end function ;

RepresentativePartition := function(alpha)
  // alpha in N^n
  // Retourne LA partition alpha_tilde in N^n et UNE sigma in S_n
  // vérifiant alpha_tilde = alpha o sigma
  alpha_tilde := alpha ;
  Sort(~alpha_tilde, Tri, ~sigma) ;
  assert IsPartition(alpha_tilde) ;
  assert alpha_tilde eq PermuteSequence(alpha, sigma) ;
  return alpha_tilde, sigma ;
end function ;

IsHomogeneousOfDegree := function(F, d)
  return F eq 0 or (IsHomogeneous(F) and Degree(F) eq d) ;
end function ;

HasVariablesIn := function(F, variables)
  AX := Parent(F) ;
  complementary := {AX.i : i in [1..Rank(AX)]} diff variables ;
  // Faire attention au fait que Degree(0, Xi) = -1 en magma
  // Mais que si F est non nul et ne dépend pas de Xi, Degree(F, Xi) = 0
  // D'où le <= 0 ci-dessous
  return &and [Degree(F,Xi) le 0 : Xi in complementary] ;
end function ;

alphaPolynomial := function(F, alpha)
  AX := Parent(F) ;
  assert #alpha eq Rank(AX) ;
  assert IsHomogeneousOfDegree(F, &+alpha) ;
  UpPartition := RepresentativePartition(alpha) ;
  Tilde := func < w | RepresentativePartition(Exponents(w)) > ;
  return &+[AX| MC(F,w)*w : w in Monomials(F) | LessThan(Tilde(w), UpPartition)] ;
end function ;

BasicHsopCompletion := function(F, p, sigma)
  // p est une n-partition de m = deg(F) et sigma in S_n
  // Retourne Phi = [Phi_{alpha,k} : k in [2..n]] et D degrés des Phi_{alpha,k}
  // avec alpha défini par p = alpha o sigma
```

```
  assert F ne 0 and IsHomogeneous(F) ;
  AX := Parent(F) ;
  n := Rank(AX) ;
  assert sigma in Sym(n) ;
  X := [AX.i : i in [1..n]] ;
  m := Degree(F) ;
  assert IsPartition(p) and #p eq n and &+p eq m ;
  // Les degrés d_2=p_1, d_3=p_1+p_2, .., d_n=p_1+...+p_{n-1}
  // Pour k in [2..n], Phi_{alpha,k} est de degré d_k = D[k-1]
  // Attention au décalage : pour k in [2..n], d_k = D[k-1]
  D := [&+p[1..k] : k in [1..n-1]] ;
  Y := PermuteSequence(X, sigma) ;
  // En fin de boucle, Phi sera de longueur n-1 et contiendra
  //   [Phi_{alpha,2}, ..., Phi_{alpha,n}]
  // Attention au décalage Phi_{alpha,k} = Phi[k-1] pour k in [2..n]
  Phi := [AX| ] ;
  G := alphaPolynomial(F, p) ;
  // G prend les valeurs ...
  for k := n to 2 by -1 do
    G := ExactQuotient(G, Y[k]^p[k]) ;
    Phi[k-1] := G + Y[k]^D[k-1] ;
    G := Evaluate(G, Y[k], 0) ;
  end for ;
  assert &and [IsHomogeneousOfDegree(Phi[k], D[k]) : k in [1..n-1]] ;
  // Ici, G est égal à Phi_{2,alpha}_{Y_2 := 0} (pol. en une variable)
  // On vérifie que ce pol. en une variable vaut a_alpha*Y_1^{p[1]}
  Xalpha := Monomial(AX, PermuteSequence(p, sigma^-1)) ;
  assert Xalpha eq Monomial(AX,p)^sigma ;
  assert G eq MonomialCoefficient(F,Xalpha) * Y[1]^p[1] ;
  // On vérifie Phi_{alpha,n} = Phi[n-1]
  assert Y[n]^p[n] * Phi[n-1] eq Y[n]^m + alphaPolynomial(F,p) ;
  // On vérifie les autres Phi_{alpha,*}
  assert &and [Y[k]^p[k] * Phi[k-1] eq Y[k]^D[k] + Evaluate(Phi[k],Y[k+1],0) : k in [2..n-1]] ;
  // Pour k in [2..n], Phi_k est un pol. en k variables bien cernées (via sigma) :
  // Phi_2 in A[Y_1,Y_2], Phi_3 in A[Y_1,Y_2,Y_3], ...etc...
  // Attention à Phi_k = Phi[k-1]
  assert &and [HasVariablesIn(Phi[k-1], SequenceToSet(Y[1..k])) : k in [2..n]] ;
  return Phi, D ;
end function ;

BasicHsopCompletionWithBonus := function(F, p, sigma)
  AX := Parent(F) ;
  n := Rank(AX) ;
  X := [AX.i : i in [1..n]] ;
  m := Degree(F) ;
  n_alpha := Max([j : j in [1..n] | p[j] ne 0]) ;
  D := [&+p[1..k] : k in [1..n_alpha-1]] cat [1^^(n-n_alpha)] ;
  Y := PermuteSequence(X, sigma) ;
  Phi := [AX | ] ;
  for k in [n_alpha+1..n] do
    Phi[k-1] := Y[k] ;
  end for ;
  G := alphaPolynomial(F, p) ;
  for y in Phi do
    G := Evaluate(G, y, 0) ;
  end for ;
  for k := n_alpha to 2 by -1 do
    G := ExactQuotient(G, Y[k]^p[k]) ;
    Phi[k-1] := G + Y[k]^D[k-1] ;
    G := Evaluate(G, Y[k], 0) ;
  end for ;
  return Phi, D ;
end function ;

HsopCompletion := function(F, alpha : Bonus := true)
  alpha_tilde, sigma := RepresentativePartition(alpha) ;
  if Bonus then Phi, D := BasicHsopCompletionWithBonus(F, alpha_tilde, sigma) ;
    else Phi, D := BasicHsopCompletion(F, alpha_tilde, sigma) ;
  end if ;
  return Phi, D, sigma ;
```

```
end function ;

// "Calcul direct" de Phi_{p,sigma,k}(F)
QuasiPhi := function(F, p, sigma, k)
  AX := Parent(F) ;
  n := Rank(AX) ;
  assert k in [2..n] and sigma in Sym(n) ;
  assert IsPartition(p) and IsHomogeneousOfDegree(F, &+p) ;
  X := [AX.i : i in [1..n]] ;
  Y := PermuteSequence(X, sigma) ;
  G := alphaPolynomial(F, p) ;
  S := &+[AX| MonomialCoefficient(G,w)*w : w in Monomials(G) |
                    q[[k+1..n]^sigma] eq p[k+1..n] where q is Exponents(w)] ;
  pi := &*[AX| Y[i]^p[i] : i in [k..n]] ;
  d_k := &+p[1..k-1] ;
  assert IsHomogeneousOfDegree(s, d_k) ;
  return S/pi, Y[k]^d_k ;
end function ;

DirectPhi := function(F, p, sigma, k)
  s, YkPower := QuasiPhi(F, p, sigma, k) ;
  return s + YkPower ;
end function ;

AllPartitions := function(n, m)  // Partitions de m de longueur n
  P := [p cat [0^^(n-k)] : p in Partitions(m,k), k in [1..n]] ;
  // Pour revlex-trier P (de la plus petite partition à la plus grande),
  // on lex-range les ReverseMinus(p) pour p in P
  Q := Sort([ReverseMinus(p) : p in P]) ;
  // puis on remet d'aplomb via ReverseMinus o ReverseMinus = Identité
  return [ReverseMinus(q) : q in Q] ;
end function ;

Stratification := function(n, m) ;
  P := AllPartitions(n,m) ;
  S := [SetToSequence({PermuteSequence(p,sigma) : sigma in Sym(n)}) : p in P] ;
  return [Sort(strate) : strate in S] ;
end function ;

MonomialStratification := function(AX, m)
  n := Rank(AX) ;
  S := Stratification(n,m) ;
  SX := [[Monomial(AX, p) : p in strate] : strate in S] ;
  assert SequenceToSet(&cat SX) eq MonomialsOfDegree(AX, m) ;
  return SX ;
end function ;

RandomHomogeneousPolynomial := function(AX, m)
  M := MonomialsOfDegree(AX,m) ;
  repeat
    // F := &+[Random({-5..5})*w : w in M] ;
    F := &+[Random({-9..9})*Random(M) : i in [1..9]] ;
  until F ne 0 ;
  return F ;
end function ;
```

n=3, m=4

```
F = a1*X^4 + b1*X^3*Y + b2*X^3*Z + c1*X^2*Y^2 + d1*X^2*Y*Z + c2*X^2*Z^2 + b3*X*Y^3 + d2*X*Y^2*Z
    + d3*X*Y*Z^2 + b4*X*Z^3 + a2*Y^4 + b5*Y^3*Z + c3*Y^2*Z^2 + b6*Y*Z^3 + a3*Z^4
Les n-partitions de m :
[
    [ 4, 0, 0 ],
    [ 3, 1, 0 ],
    [ 2, 2, 0 ],
    [ 2, 1, 1 ]
]
-------------------- Les polynomes F_alpha --------------------
Falpha pour alphatilde = [4,0,0] :
a1*X^4 + b1*X^3*Y + b2*X^3*Z + c1*X^2*Y^2 + d1*X^2*Y*Z + c2*X^2*Z^2 + b3*X*Y^3 + d2*X*Y^2*Z +
    d3*X*Y*Z^2 + b4*X*Z^3 + a2*Y^4 + b5*Y^3*Z + c3*Y^2*Z^2 + b6*Y*Z^3 + a3*Z^4
```

```
Falpha pour alphatilde = [3,1,0] :
b1*X^3*Y + b2*X^3*Z + c1*X^2*Y^2 + d1*X^2*Y*Z + c2*X^2*Z^2 + b3*X*Y^3 + d2*X*Y^2*Z + d3*X*Y*Z^2
    + b4*X*Z^3 + b5*Y^3*Z + c3*Y^2*Z^2 + b6*Y*Z^3


Falpha pour alphatilde = [2,2,0] :
c1*X^2*Y^2 + d1*X^2*Y*Z + c2*X^2*Z^2 + d2*X*Y^2*Z + d3*X*Y*Z^2 + c3*Y^2*Z^2


Falpha pour alphatilde = [2,1,1] :
d1*X^2*Y*Z + d2*X*Y^2*Z + d3*X*Y*Z^2


==================== Completion avec Bonus ====================
-------------------- Completion de F_alpha pour alphatilde = [4,0,0] --------------------
alpha = [ 4, 0, 0 ]
Phi =
[
    Y,
    Z
]
---------------------------------
alpha = [ 0, 4, 0 ]
Phi =
[
    X,
    Z
]
-------------------- Completion de F_alpha pour alphatilde = [3,1,0] --------------------
alpha = [ 3, 1, 0 ]
Phi =
[
    b1*X^3 + c1*X^2*Y + b3*X*Y^2 + Y^3,
    Z
]
---------------------------------
alpha = [ 1, 0, 3 ]
Phi =
[
    X^3 + b2*X^2*Z + c2*X*Z^2 + b4*Z^3,
    Y
]
-------------------- Completion de F_alpha pour alphatilde = [2,2,0] --------------------
alpha = [ 2, 2, 0 ]
Phi =
[
    c1*X^2 + Y^2,
    Z
]
---------------------------------
alpha = [ 0, 2, 2 ]
Phi =
[
    c3*Y^2 + Z^2,
    X
]
-------------------- Completion de F_alpha pour alphatilde = [2,1,1] --------------------
alpha = [ 2, 1, 1 ]
Phi =
[
    d1*X^2 + d2*X*Y + Y^2,
    d1*X^2*Y + d2*X*Y^2 + d3*X*Y*Z + Z^3
]
---------------------------------
alpha = [ 1, 2, 1 ]
Phi =
[
    X^2 + d1*X*Y + d2*Y^2,
```

```
    d1*X^2*Y + d2*X*Y^2 + d3*X*Y*Z + Z^3
]
==================== Completion sans Bonus ====================
-------------------- Completion de F_alpha pour alphatilde = [4,0,0] --------------------
alpha = [ 4, 0, 0 ]
Phi =
[
    a1*X^4 + b1*X^3*Y + c1*X^2*Y^2 + b3*X*Y^3 + (a2 + 1)*Y^4,
    a1*X^4 + b1*X^3*Y + b2*X^3*Z + c1*X^2*Y^2 + d1*X^2*Y*Z + c2*X^2*Z^2 + b3*X*Y^3 + d2*X*Y^2*Z
        + d3*X*Y*Z^2 + b4*X*Z^3 + a2*Y^4 + b5*Y^3*Z + c3*Y^2*Z^2 + b6*Y*Z^3 + (a3 + 1)*Z^4
]
---------------------------------
alpha = [ 0, 4, 0 ]
Phi =
[
    (a1 + 1)*X^4 + b1*X^3*Y + c1*X^2*Y^2 + b3*X*Y^3 + a2*Y^4,
    a1*X^4 + b1*X^3*Y + b2*X^3*Z + c1*X^2*Y^2 + d1*X^2*Y*Z + c2*X^2*Z^2 + b3*X*Y^3 + d2*X*Y^2*Z
        + d3*X*Y*Z^2 + b4*X*Z^3 + a2*Y^4 + b5*Y^3*Z + c3*Y^2*Z^2 + b6*Y*Z^3 + (a3 + 1)*Z^4
]
-------------------- Completion de F_alpha pour alphatilde = [3,1,0] --------------------
alpha = [ 3, 1, 0 ]
Phi =
[
    b1*X^3 + c1*X^2*Y + b3*X*Y^2 + Y^3,
    b1*X^3*Y + b2*X^3*Z + c1*X^2*Y^2 + d1*X^2*Y*Z + c2*X^2*Z^2 + b3*X*Y^3 + d2*X*Y^2*Z +
        d3*X*Y*Z^2 + b4*X*Z^3 + b5*Y^3*Z + c3*Y^2*Z^2 + b6*Y*Z^3 + Z^4
]
---------------------------------
alpha = [ 1, 0, 3 ]
Phi =
[
    X^3 + b2*X^2*Z + c2*X*Z^2 + b4*Z^3,
    b1*X^3*Y + b2*X^3*Z + c1*X^2*Y^2 + d1*X^2*Y*Z + c2*X^2*Z^2 + b3*X*Y^3 + d2*X*Y^2*Z +
        d3*X*Y*Z^2 + b4*X*Z^3 + Y^4 + b5*Y^3*Z + c3*Y^2*Z^2 + b6*Y*Z^3
]
-------------------- Completion de F_alpha pour alphatilde = [2,2,0] --------------------
alpha = [ 2, 2, 0 ]
Phi =
[
    c1*X^2 + Y^2,
    c1*X^2*Y^2 + d1*X^2*Y*Z + c2*X^2*Z^2 + d2*X*Y^2*Z + d3*X*Y*Z^2 + c3*Y^2*Z^2 + Z^4
]
---------------------------------
alpha = [ 0, 2, 2 ]
Phi =
[
    c3*Y^2 + Z^2,
    X^4 + c1*X^2*Y^2 + d1*X^2*Y*Z + c2*X^2*Z^2 + d2*X*Y^2*Z + d3*X*Y*Z^2 + c3*Y^2*Z^2
]
-------------------- Completion de F_alpha pour alphatilde = [2,1,1] --------------------
alpha = [ 2, 1, 1 ]
Phi =
[
    d1*X^2 + d2*X*Y + Y^2,
    d1*X^2*Y + d2*X*Y^2 + d3*X*Y*Z + Z^3
]
---------------------------------
alpha = [ 1, 2, 1 ]
Phi =
[
    X^2 + d1*X*Y + d2*Y^2,
    d1*X^2*Y + d2*X*Y^2 + d3*X*Y*Z + Z^3
]
```

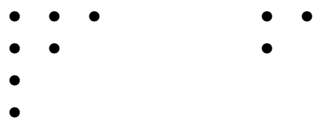
## 4.5 A propos des $n$-partitions de $m$

Ce que l'on appelle ici une $n$-partition de $m$ est une partition de $m$ de longueur $n$ où l'on autorise les 0. Si l'on veut coller à la terminologie des combinatoriciens, il faut parler des partitions de $m$ en au

plus $n$ parts. Justement, pour faire plaisir à la combinatoire, on change les notations et *on appelle $n$ l'entier dont on veut dénombrer les partitions en au plus $k$ parts.*

**Une relation de récurrence**

On commence par remarquer qu'il y a une bijection entre les partitions de $n$ en $k$ parts exactement (en nombre $\pi(n,k)$) et les partitions de $n$ en au plus $k$ parts (en nombre $p(n,k)$). On peut voir cela visuellement avec un diagramme de Ferrer. Pour une partition de $n$ en $k$ parts, la longueur de la première colonne est donc égale à $k$. Si on supprime cette colonne, on obtient une partition de $n-k$ avec des colonnes de longueur inférieure à la colonne enlevée (*i.e.* à $k$), autrement dit, on obtient une partition de $n-k$ en au plus $k$ parts. Par exemple, voici une partition de $n=7$ en exactement 4 parts (explicitement, $7=3+2+1+1$) et la partition de $n-k=3$ en au plus 4 parts (ici en 2 parts, précisément $3=2+1$) :



Par conséquent, $\pi(n,k)=p(n-k,k)$. Maintenant, on peut établir une relation de récurrence pour le nombre $p(n,k)$ de partitions de $n$ en au plus $k$ parts. En effet, on a clairement $p(n,k)=p(n,k-1)+\pi(n,k)$ d'où $p(n,k)=p(n,k-1)+p(n-k,k)$. Les premiers termes de $p(n,k)$ se trouvent dans la suite A026820 de l'OEIS de Sloane.

**Une formule close via la fonction génératrice**

Dans [Sta02, proposition 1.7.3, page 59], Stanley donne une belle formule pour le nombre $p(n,k,j)$ de partitions de $n$ en au plus $k$ parts avec chaque part inférieure à $j$ via la série génératrice :

$$\sum_{n\geqslant 0} p(n,k,j)q^n \;=\; \begin{bmatrix} j+k \\ j \end{bmatrix}_q$$

où le membre de droite est le $q$-analogue du coefficient binomial et est égal par définition à $\displaystyle\prod_{i=1}^{j}\frac{1-q^{k+i}}{1-q^i}$. La preuve de Stanley est très élégante et repose sur le dénombrement des matrices échelonnées de $\mathbb{F}_q^m$ où $m=j+k$. Ce n'est pas vraiment une surprise que le corps fini $\mathbb{F}_q$ intervienne, comme l'explique Stanley dans sa définition du $q$-analogue de $n!$ (cf. pages 30-31). Enfin, pour obtenir le nombre de partitions de $n$ en au plus $k$ parts, il suffit de prendre $j\geqslant n$.

# 5 Suite monomialement dépendante

Dans cette section, on introduit la notion de suite monomialement dépendante et par la même occasion celle de suite indépendante relativement à un idéal, généralisant la notion de suite quasi-régulière. Il est donc question, pour une suite $\underline{a}=(a_1,\ldots,a_n)$, de relations linéaires entre les monômes $a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}$ de même degré. Plus précisément, pour une suite $\underline{a}$, on définit l'idéal $\mathcal{C}(\underline{a})$ comme l'idéal engendré par les coefficients des polynômes homogènes du noyau du morphisme canonique $\varphi : \mathbf{A}[\underline{X}] \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{gr}_{\underline{a}}(\mathbf{A})$. Une suite est dite *monomialement dépendante* (pour alléger, *dépendante*) si $1\in\mathcal{C}(\underline{a})$.

En exploitant l'énoncé ♬ de la section précédente, on obtient un énoncé qui s'apparente à l'indépendance analytique d'un système de paramètres dans un anneau local noethérien mais sans hypothèse noethérienne :

> *Soit $\underline{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ une suite incluse dans l'idéal maximal d'un anneau* local *(non nécessairement noethérien). Si $\underline{a}$ est monomialement dépendante alors $\langle\underline{a}\rangle$ est radicalement $(n-1)$-engendré.*

En fait, grâce à l'énoncé ♪ de la section précédente, on obtient un résultat encore plus général (pas d'anneau local, pas d'hypothèse noethérienne) :

*Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite d'éléments $\mathbf{A}$ vérifiant $F(\underline{a}) = 0$ pour un polynôme $F$ homogène primitif. Alors il existe un système de localisations comaximales $(s_\alpha)$ tel que, dans chaque localisé $\mathbf{A}_{s_\alpha}$, l'idéal $\langle \underline{a} \rangle$ soit radicalement $(n-1)$-engendré.*

À la section suivante, on reformulera cet énoncé avec la notion d'idéal localement radicalement $d$-engendré, cf. la proposition 6.7.

Enfin, on donne une caractérisation de la dimension de Krull noethérienne à l'aide de la notion de suite monomialement dépendante (cf. le théorème 5.12) :

*Un anneau* noethérien *est de dimension de Krull $\leqslant d$ si et seulement si toute suite de longueur $d+1$ est monomialement dépendante.*

Il est intéressant de comparer cette caractérisation à la définition habituelle de la Kdim donnée au début du chapitre : un anneau $\mathbf{A}$ est de dimension de Krull $\leqslant d$ si et seulement si toute suite de longueur $d+1$ est singulière.

## 5.1 L'idéal $\mathcal{C}(\underline{a})$, Dépendance, Indépendance

**Définition 5.1.** *Pour une suite $\underline{a}$, on définit $\mathcal{C}(\underline{a})$ comme étant l'idéal des Coefficients des polynômes $F \in \mathbf{A}[\underline{X}]_d$ tels que $F(\underline{a}) \in \langle \underline{a} \rangle^{d+1}$. De manière un peu plus structurelle, c'est l'idéal des coefficients des polynômes homogènes de* $\operatorname{Ker}\varphi$ *où $\varphi : \mathbf{A}[\underline{X}] \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \operatorname{gr}_{\underline{a}}(\mathbf{A})$ est le morphisme canonique.*
*On peut exprimer cela à l'aide d'une formule utilisant des idéaux transporteurs $T_\alpha(\underline{a})$ dépendant de $\underline{a}$ :*

$$\mathcal{C}(\underline{a}) \;=\; \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^n} T_\alpha \;+\; \langle \underline{a} \rangle \qquad \text{où} \;\; T_\alpha \;=\; T_\alpha(\underline{a}) \;=\; \Big( \sum_{\substack{|\beta|=|\alpha| \\ \beta\neq\alpha}} \mathbf{A} a^\beta \;:\; a^\alpha \Big)$$

**Remarque 5.2.**

• Par définition, si $F \in \mathbf{A}[\underline{X}]_d$ vérifie $F(\underline{a}) \in \langle \underline{a} \rangle^{d+1}$ alors $\mathrm{c}(F) \subset \mathcal{C}(\underline{a})$.

• Soit $G \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ non nécessairement homogène tel que $G(\underline{a}) = 0$. Alors la composante homogène basse $F$ de $G$ est dans $\operatorname{Ker}\varphi$. En effet, en notant $d$ le degré de $F$, on a évidemment $F(\underline{a}) \in \langle \underline{a} \rangle^{d+1}$ car $G(\underline{a}) = 0$.

• Il peut être commode d'introduire les transporteurs $T_{(e,\ldots,e)}$ pour $e \in \mathbb{N}$ que nous noterons $T_e$. Il est facile de voir que $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^n} T_\alpha = \bigcup_{e\in\mathbb{N}} T_e$ de sorte que $\mathcal{C}(\underline{a})$ prend le visage suivant

$$\mathcal{C}(\underline{a}) \;=\; \bigcup_{e\in\mathbb{N}} T_e \;+\; \langle \underline{a} \rangle \qquad \text{où} \;\; T_e \;=\; \Big( \langle \underline{a}^{e+1} \rangle \langle \underline{a} \rangle^{ne-e-1} \;:\; (a_1 \cdots a_n)^e \Big)$$

Signalons que l'idéal $\langle \underline{a}^{e+1} \rangle \langle \underline{a} \rangle^{ne-e-1}$ qui intervient dans le transporteur $T_e$ est exactement l'idéal engendré par les monômes de degré $ne$ distincts du monôme $(a_1 \cdots a_n)^e$.

• On peut simplifier un tantinet l'expression de $\mathcal{C}(\underline{a})$. Pour $n = 1$, pour un scalaire $a \in \mathbf{A}$, on a $\mathcal{C}(a) = \bigcup_{e\in\mathbb{N}} (0 : a^e) + \langle a \rangle$. Et pour $n \geqslant 2$, on profite du fait que chaque $a_i$ est dans $T_{\varepsilon_j}$ pour $j \neq i$ où $\varepsilon_j$ est le $j$-ème vecteur canonique de $\mathbb{N}^n$. Ainsi

$$\mathcal{C}(a) = \bigcup_{e\in\mathbb{N}} (0 : a^e) + \langle a \rangle \quad \text{pour } n = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}(\underline{a}) = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^n} T_\alpha \quad \text{pour } n \geqslant 2$$

• Pour $n \geqslant 2$, l'idéal $\mathcal{C}(\underline{a})$ est exactement formé des coefficients des polynômes *homogènes* s'annulant en $\underline{a}$. Par exemple, considérons une égalité du type

$$u a_1^2 \;+\; v a_1 a_2 \;+\; w a_2^2 \;=\; x a_1^3 \;+\; y a_1^2 a_2 \;+\; z a_1 a_2^2 \;+\; t a_2^3$$

Focalisons-nous sur le coefficient $v$ et essayons d'en faire le coefficient d'un polynôme homogène s'annulant en $\underline{a}$. On peut faire basculer chaque monôme de degré 3 à gauche en l'écrivant comme multiple d'un monôme de degré 2 différent de $a_1 a_2$. Donc notre coefficient $v$ est préservé et se retrouve être le coefficient d'un polynôme homogène de degré 2 :

$$(u - x a_1 - y a_2) a_1^2 \;+\; v a_1 a_2 \;+\; (w - z a_1 - t a_2) a_2^2 \;=\; 0$$

Essayons maintenant de traiter le coefficient $u$ et d'en faire le coefficient d'un polynôme homogène s'annulant en $\underline{a}$. On peut faire basculer chaque monôme de degré 3 à gauche en l'écrivant comme multiple d'un monôme de degré 2 différent de $a_1^2$, *sauf pour le monôme* $a_1^3$. L'astuce consiste à multiplier l'égalité par $a_2$ de façon à se retrouver dans la situation précédente. Par exemple, voici une relation homogène de degré 3 dont $u$ est un coefficient :

$$xa_2.a_1^3 \,+\, u.a_1^2a_2 \,+\, (v - ya_1)a_1a_2^2 \,+\, (w - za_1 - ta_2)a_2^3 \;=\; 0$$

**Définition 5.3.** *On dira qu'une suite $\underline{a}$ d'éléments de* $\mathbf{A}$ *est* monomialement dépendante *si* $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$.
*En français : une suite $\underline{a}$ est monomialement dépendante s'il existe une relation linéaire entre les monômes en $\underline{a}$ de degré $d$ (pour un certain $d$) avec un coefficient inversible modulo $\langle \underline{a} \rangle$.*
*Dans la suite, « dépendante » signifie « monomialement dépendante ».*

Pour $n = 1$, *i.e.* pour un scalaire $a \in \mathbf{A}$, on a $1 \in \mathcal{C}(a) \Leftrightarrow 0 \in \mathcal{S}(a) \Leftrightarrow \exists\, e \in \mathbb{N},\ \exists\, u \in \mathbf{A},\ (1 - ua)a^e = 0$.
Pour $n \geqslant 2$, dire que $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$ c'est dire qu'il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que le monôme $(a_1 \cdots a_n)^e$ de degré $ne$ est une combinaison linéaire des autres monômes de degré $ne$ ; ou encore, c'est dire qu'il existe un polynôme homogène $F$ annulant $\underline{a}$ ayant un coefficient égal à 1.

**Remarque 5.4.** Une suite unimodulaire est dépendante. Pour $n = 1$, c'est immédiat. Soit $n \geqslant 2$ et $1 = u_1a_1 + u_2a_2 + \cdots + u_na_n$. En multipliant par $a_1a_2$, on obtient $a_1a_2 = (u_1a_2)a_1^2 + (u_2a_1)a_2^2 + \cdots + (u_na_1)a_2a_n$.

Dans la littérature, on croise également la notion de suite indépendante relativement à un idéal $\mathfrak{a}$, par exemple dans les articles [Val70], [Bar76], [Bru80]. Lorsque $\langle \underline{a} \rangle \subset \mathfrak{a}$, cette notion s'exprime en fonction de l'idéal $\mathcal{C}(\underline{a})$.

**Définition 5.5.** *Une suite $\underline{a}$ est dite $\mathfrak{a}$-indépendante si tout polynôme homogène s'annulant en $\underline{a}$ possède ses coefficients dans l'idéal $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire si $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} T_\alpha \subset \mathfrak{a}$, ou encore si*

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, \quad \forall\, F \in \mathbf{A}[\underline{X}]_m, \quad F(\underline{a}) = 0 \;\Rightarrow\; F \in \mathfrak{a}[\underline{X}]$$

**Remarque 5.6.**
• Dans le cas où $\langle \underline{a} \rangle \subset \mathfrak{a}$, dire que la suite $\underline{a}$ est $\mathfrak{a}$-indépendante c'est dire que $\mathcal{C}(\underline{a}) \subset \mathfrak{a}$. En particulier, $\underline{a}$ est $\langle \underline{a} \rangle$-indépendante si et seulement si $\mathcal{C}(\underline{a}) \subset \langle \underline{a} \rangle$ *i.e.* $\mathcal{C}(\underline{a}) = \langle \underline{a} \rangle$.
• Par définition, $\underline{a}$ est quasi-régulière si et seulement si $\mathcal{C}(\underline{a}) = \langle \underline{a} \rangle$.
• Pour $n \geqslant 2$, si $\underline{a}$ est $\mathfrak{a}$-indépendante alors chaque $a_i$ appartient à $\mathfrak{a}$ (penser aux relateurs triviaux).

## 5.2 Indépendance analytique dans un anneau local

**Rappel de quelques notations.** Pour un anneau local $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$, on note $\delta(\mathbf{A})$ sa dimension de Chevalley, c'est-à-dire le nombre minimal de générateurs radicaux de $\mathfrak{m}$. Dans la littérature (par exemple chez Schoutens, cf. [Sch13, definition 3.1, p. 8]), on trouve aussi la notation $\operatorname{gdim} \mathbf{A}$.

Pour une suite $\underline{a}$ d'un anneau $\mathbf{A}$, on définit $\delta(\underline{a})$ comme étant le nombre minimal de générateurs radicaux de $\langle \underline{a} \rangle$. Plus précisément, on définit, pour un entier $k$, l'inégalité $\delta(\underline{a}) \leqslant k$ via

$$\delta(\underline{a}) \leqslant k \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \underline{b} = (b_1, \ldots, b_k),\ \sqrt{\underline{a}} = \sqrt{\underline{b}}$$

□

Pour un anneau local $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$, il est d'usage de parler d'indépendance analytique pour parler de $\mathfrak{m}$-indépendance. Il est facile de voir qu'une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ est $\mathfrak{m}$-indépendante si et seulement si pour tous $\alpha, \nu_1, \ldots, \nu_s \in \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha| = |\nu_i|$, on a

$$a^\alpha \in \langle a^{\nu_1}, \ldots, a^{\nu_s} \rangle \quad \Rightarrow \quad \exists\, i,\ \alpha = \nu_i$$

Par ailleurs, si $\langle \underline{a} \rangle \subset \mathfrak{m}$, dire que $\underline{a}$ est analytiquement indépendante c'est exactement dire que $\mathcal{C}(\underline{a}) \subset \mathfrak{m}$ ou encore que $\underline{a}$ n'est pas dépendante ! Cette notion intervient dans le résultat classique « un s.o.p. d'un anneau local noethérien est analytiquement indépendant » ce qui s'écrit de manière cryptique :

$$\begin{array}{l}(\mathbf{A}, \mathfrak{m}) \text{ local } \textit{noethérien} \\ \mathfrak{m} = \sqrt{\underline{a}} \;\text{ avec }\; \#\underline{a} = \operatorname{Kdim} \mathbf{A}\end{array} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{C}(\underline{a}) \subset \mathfrak{m}$$

Dans la littérature, figurent plusieurs preuves de cette implication.

La preuve la plus répandue est sans aucun doute celle qui utilise l'égalité noethérienne $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} = \operatorname{Kdim}\operatorname{gr}_{\underline{a}}(\mathbf{A})$. En posant $G = \operatorname{gr}_{\underline{a}}(\mathbf{A})$, on considère $G/\mathfrak{m}G$ qui est de même dimension que $G$ (car il existe un entier $r$ tel que $\mathfrak{m}^r \subset \langle \underline{a} \rangle$ donc tel que $\mathfrak{m}^r G = 0$). Posons $n := \operatorname{Kdim}\mathbf{A}$. Si on avait $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$ alors on aurait $\operatorname{Kdim} G/\mathfrak{m}G \leqslant n-1$ (en effet, on a une surjection $\mathbf{k}[\underline{X}]/\langle f \rangle \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow G/\mathfrak{m}G$ où $f = F \bmod \mathfrak{m}\mathbf{A}[\underline{X}]$ et $F \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ étant un certificat de $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$). On aurait donc $\operatorname{Kdim} G \leqslant n-1$. Or en noethérien, on a l'égalité $\operatorname{Kdim} G = \operatorname{Kdim}\mathbf{A} = n$ (cf. [Mat89, Theorem 15.7, page 122]). D'où la contradiction.

Une autre preuve noethérienne, relativement atypique, est celle qui figure chez Northcott, cf. [Nor53, sections 4.3 et 4.4, pages 65-69]. Sa preuve repose sur une extension des scalaires à $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ puis sur un changement de variables générique. Plus précisément, Northcott introduit $n^2$ indéterminées $Z_{ij}$ et définit le changement de variables $X_i := \sum_j Z_{ij} Y_j$ en ayant pris le soin de localiser $\mathbf{B} = \mathbf{A}[Z_{ij}]$ par ses éléments réguliers (autrement dit, tout se passe dans l'anneau total des fractions de $\mathbf{B}$). La clé de la preuve repose sur le fait que le maximal $\mathfrak{m}'$ de l'anneau local $\mathbf{A}' := \mathbf{B}_{\mathfrak{m}\mathbf{B}}$ ne peut pas être radicalement $(n-1)$-engendré en terrain noethérien. A cette occasion, l'hypothèse noethérienne est utilisée à deux reprises : pour contrôler la dimension de Krull de $\mathbf{A}'$ (égale alors à celle de $\mathbf{A}$) et pour le KPIT.

Enfin, mentionnons la preuve de Zariski-Samuel (cf. [ZSC60, theorem 21, page 292]), intéressante dans le sens où l'hypothèse noethérienne n'est utilisée qu'au tout dernier moment via le KPIT. En fait, lorsque l'on relit la preuve, on constate qu'elle porte sur le nombre minimum de générateurs radicaux du maximal $\mathfrak{m}$, noté $\delta(\mathbf{A})$, et non pas sur $\operatorname{Kdim}\mathbf{A}$. C'est ce que nous allons voir ci-dessous.

Grâce à notre résultat sur la complétion d'un polynôme homogène primitif de degré $> 0$ à coefficients dans un anneau local, on obtient presque immédiatement le résultat suivant généralisant l'indépendance analytique d'un anneau local noethérien :

**Théorème 5.7.** *Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite incluse dans l'idéal maximal d'un anneau* local *(non nécessairement noethérien). Si $\underline{a}$ est dépendante alors $\langle \underline{a} \rangle$ est radicalement $(n-1)$-engendré. De manière cryptique :*

$$(\mathbf{A}, \mathfrak{m}) \text{ local avec } \langle \underline{a} \rangle \subset \mathfrak{m}, \qquad 1 \in \mathcal{C}(\underline{a}) \;\Rightarrow\; \delta(\underline{a}) \leqslant n-1$$

***Preuve.*** Tout d'abord, traitons le cas $n = 1$, disons $\underline{a} = (a)$. Dire que $1 \in \mathcal{C}(a)$ c'est dire qu'il existe $u \in \mathbf{A}$ et $e \in \mathbb{N}$ tel que $(1+ua)a^e = 0$. Comme $a \in \mathfrak{m}$, l'élément $1+ua$ est inversible. Par conséquent, l'élément $a$ est nilpotent et $\langle \underline{a} \rangle$ est radicalement 0-engendré.

Traitons maintenant le cas $n \geqslant 2$ (qui n'utilise pas $\langle \underline{a} \rangle \subset \mathfrak{m}$, mais sans cette hypothèse, le résultat est sans intérêt !). Dire que $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$ c'est dire qu'il existe un polynôme homogène $F \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $F(\underline{a}) = 0$ avec un coefficient inversible. En particulier, $F$ est de degré $> 0$. On a donc un polynôme $F$ homogène, primitif, de degré $> 0$. D'après l'énoncé ♫ page 112, il est complétable, *i.e.* il existe $n-1$ polynômes $\Phi_2, \ldots, \Phi_n$ homogènes de degrés $> 0$ tels que

$$\langle X_1, \ldots, X_n \rangle \;\subset\; \sqrt{\langle F, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \rangle}$$

*i.e.* tels que $\sqrt{\underline{X}} = \sqrt{\langle F, \Phi_2, \ldots, \Phi_n \rangle}$. On évalue en $\underline{a}$ et on obtient $\sqrt{\underline{a}} = \sqrt{\langle \Phi_2(\underline{a}), \ldots, \Phi_n(\underline{a}) \rangle}$. □

En particulier, on peut appliquer ce théorème à un s.o.p. (*i.e.* une suite engendrant radicalement le maximal) :

**Proposition 5.8.** *Soit $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$ un anneau local (non nécessairement noethérien). Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite engendrant radicalement $\mathfrak{m}$, i.e. $\mathfrak{m} = \sqrt{\underline{a}}$.*

*(i) Si $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$ alors $\mathfrak{m}$ est radicalement $(n-1)$-engendré, c'est-à-dire $\delta(\mathbf{A}) \leqslant n-1$.*

*(ii) En particulier, pour un anneau* local noethérien*, si $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$ alors* $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} \leqslant n-1$. *En prenant la contraposée : si*[4] $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} \geqslant n$ *alors $\mathcal{C}(\underline{a}) \subset \mathfrak{m}$. Autrement dit, un s.o.p. noethérien est analytiquement indépendant.*

***Preuve.*** La première partie est une conséquence immédiate de la proposition précédente. Pour la suite, il faut rappeller qu'en terrain noethérien, on a toujours l'inégalité $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} \leqslant \delta(\mathbf{A})$ (dit autrement, $\mathfrak{m}$ ne peut pas être radicalement engendré par moins de $\operatorname{Kdim}\mathbf{A}$ éléments en noethérien). □

4. Le maximal étant radicalement $n$-engendré par hypothèse, le terrain noethérien fait que $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} = n$ dans ce cas.

**Aparté.** Pour engendrer l'idéal maximal d'un anneau local noethérien, il faut au moins $d$ éléments où $d$ désigne la dimension de Krull de l'anneau. Et si on en a $d$, c'est remarquable. Remarquable dans le sens où n'importe quelle suite de longueur $d$ (en raison de l'hypothèse noethérienne, $d$ est le nombre minimal de générateurs radicaux du maximal) engendrant le maximal est régulière (c'est écrit partout, par exemple chez Eisenbud, cf. [Eis95, corollary 10.15, page 243]). On peut affirmer le même genre de choses sans hypothèse noethérienne. En effet, si le maximal d'un anneau local (non nécessairement noethérien) est engendré par $\delta$ éléments (en notant $\delta$ le nombre minimal de générateurs radicaux du maximal), alors c'est remarquable dans le sens où n'importe quelle suite de longueur $\delta$ engendrant le maximal est quasi-régulière. En effet, soit $\underline{a}$ une suite de longueur $\delta$ telle que $\mathfrak{m} = \langle \underline{a} \rangle$. La contraposée du point $(i)$ de la proposition 5.8 fournit $\mathcal{C}(\underline{a}) \subset \mathfrak{m}$ c'est-à-dire $\mathcal{C}(\underline{a}) \subset \langle \underline{a} \rangle$, ce qui est exactement la définition de la quasi-régularité de $\underline{a}$. **Fin de l'aparté.**

## 5.3 Une réciproque globale de la section précédente

Nous venons de voir que sur un anneau local $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$, l'appartenance $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$ fait chuter le nombre de générateurs radicaux de $\langle \underline{a} \rangle$ pourvu que $\langle \underline{a} \rangle \subset \mathfrak{m}$. Examinons la réciproque sur un anneau global (*i.e.* non nécessairement local). Une condition suffisante pour provoquer l'appartenance $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$ est de contraindre la dimension de Krull de l'algèbre graduée de $\langle \underline{a} \rangle$. Plus précisément :

**Proposition 5.9.** *Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite d'un anneau $\mathbf{A}$. On a l'implication*

$$\operatorname{Kdim} \operatorname{gr}_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \leqslant n-1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$$

***Preuve.*** Par définition, $\mathcal{C}(\underline{a})$ est l'idéal des coefficients des polynômes homogènes qui sont dans le noyau du morphisme canonique surjectif $\varphi : \mathbf{A}[\underline{X}] \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \operatorname{gr}_{\underline{a}}(\mathbf{A})$. On a donc $\operatorname{Ker}\varphi \subset \mathcal{C}(\underline{a})\mathbf{A}[\underline{X}]$, d'où un morphisme surjectif

$$\operatorname{gr}_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \;\simeq\; \mathbf{A}[\underline{X}]/\operatorname{Ker}\varphi \quad \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \quad \mathbf{A}[\underline{X}]/\mathcal{C}(\underline{a})\mathbf{A}[\underline{X}] \;\simeq\; \big(\mathbf{A}/\mathcal{C}(\underline{a})\big)[\underline{X}]$$

Par conséquent, la condition $\operatorname{Kdim} \operatorname{gr}_{\underline{a}}(\mathbf{A}) < n$ force l'anneau $\mathbf{A}/\mathcal{C}(\underline{a})$ à être nul, c'est-à-dire $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$. □

En terrain noethérien, une condition sur la dimension de l'anneau suffit à provoquer la dépendance de la suite :

**Proposition 5.10.** *Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite d'un anneau* noethérien *$\mathbf{A}$. On a l'implication*

$$\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant n-1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$$

***Preuve.*** Il suffit d'utiliser la proposition 5.9 et le fait suivant cf. [Eis95, ex. 13.8, p. 302] :

> *Pour une suite $\underline{a}$ d'un anneau* noethérien*, on a* $\operatorname{Kdim} \operatorname{gr}_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \leqslant \operatorname{Kdim} \mathbf{A}$. *Plus précisément,* $\operatorname{Kdim} \operatorname{gr}_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = \sup\{\ \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p}$ *premier contenant* $\langle \underline{a} \rangle\}$.

□

## 5.4 Des équivalences noethériennes

**Caractérisation de l'inégalité noethérienne** $\operatorname{ht}(\underline{a}) \geqslant \#\underline{a}$

L'équivalence que nous obtenons ci-dessous pour caractériser l'inégalité noethérienne $\operatorname{ht}(\underline{a}) \geqslant \#\underline{a}$ figure notamment chez Kunz [Kun85, theorem 4.14, pages 145-147] et Strooker [Str90, section 8.3, pages 149-150], auteurs s'inspirant d'une preuve de Davis [Dav67]. Notre approche est relativement différente.

**Corollaire 5.11.** *Soit $\mathbf{A}$ un anneau* noethérien *et $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. Alors*

$$\operatorname{ht}(\underline{a}) \geqslant n \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{C}(\underline{a}) \subset \sqrt{\underline{a}}$$

***Preuve.*** $\Rightarrow$ Si $\operatorname{ht}(\underline{a}) \geqslant n$ alors $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \geqslant n$ (*i.e.* $\operatorname{Kdim} \mathbf{A}_{\mathfrak{p}} \geqslant n$) pour tout premier minimal $\mathfrak{p}$ contenant $\langle \underline{a} \rangle$. Pour un tel premier, on obtient, en appliquant 5.8 $(ii)$, l'inclusion $\mathcal{C}(\underline{a})\mathbf{A}_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$ *i.e.* $\mathcal{C}(\underline{a}) \subset \mathfrak{p}$. Ainsi $\mathcal{C}(\underline{a}) \subset \sqrt{\underline{a}}$.

$\Leftarrow$ On suppose $\mathcal{C}(\underline{a}) \subset \sqrt{\underline{a}}$ *i.e.* $\mathcal{C}(\underline{a}) \subset \mathfrak{p}$ pour tout premier minimal $\mathfrak{p}$ contenant $\langle \underline{a} \rangle$, c'est-à-dire encore $1 \notin \mathcal{C}(\underline{a})\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$. En prenant la contraposée de 5.10, on obtient $\operatorname{Kdim} \mathbf{A}_{\mathfrak{p}} \geqslant n$ *i.e.* $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \geqslant n$ pour tout premier minimal $\mathfrak{p}$ contenant $\langle \underline{a} \rangle$. Ainsi $\operatorname{ht}(\underline{a}) \geqslant n$. □

### Caractérisation de la dimension de Krull en terrain noethérien

Rappelons qu'un anneau $\mathbf{A}$ est de dimension de Krull $\leqslant d$ si et seulement si toute suite de longueur $d+1$ est singulière. Autrement dit :

$$\operatorname{Kdim}\mathbf{A} \leqslant d \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \underline{a} = (a_0, \ldots, a_d), \quad 0 \in \mathcal{S}(\underline{a})$$

où $0 \in \mathcal{S}(\underline{a})$ équivaut à l'existence de $e \in \mathbb{N}$ tel que $(a_0 \cdots a_d)^e \in \langle a_0^{e+1}, a_1^e a_1^{e+1}, \ldots, (a_0 \cdots a_{d-1})^e a_d^{e+1} \rangle$.

Tout comme on a une caractérisation de la dimension de Krull avec les suites singulières, on a une caractérisation de la dimension de Krull *noethérienne* avec les suites dépendantes.

**Théorème 5.12.** *Un anneau* noethérien *est de dimension de Krull $\leqslant d$ si et seulement si toute suite de longueur $d+1$ est dépendante. Autrement dit, pour un anneau* noethérien $\mathbf{A}$*, on a l'équivalence*

$$\operatorname{Kdim}\mathbf{A} \leqslant d \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \underline{a} = (a_0, \ldots, a_d), \quad 1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$$

***Preuve.*** L'implication $\Rightarrow$ est donnée par la proposition 5.10. Pour l'autre implication : supposons que toute suite de longueur $d+1$ de $\mathbf{A}$ est monomialement dépendante. Soit $\mathfrak{p}$ un premier quelconque de $\mathbf{A}$ et montrons que $\operatorname{Kdim}\mathbf{A}_\mathfrak{p} \leqslant d$. D'après le KPIT, il suffit de montrer que le maximal $\mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ est radicalement $d$-engendré. Considérons une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbf{A}$ qui engendre radicalement $\mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{p}$. Si $n \leqslant d$, c'est terminé. Si $n \geqslant d+1$, alors la suite $\underline{a}$ est monomialement dépendante dans $\mathbf{A}$ donc également dans $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$. La proposition 5.8 affirme alors que $\mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ est radicalement $(n-1)$-engendré. Et on recommence avec une suite de cardinal $n-1$. □

L'équivalence du théorème est bien une équivalence *noethérienne*. Pour s'en convaincre, considérons le cas d'un anneau de valuation $\mathbf{A}$ non-noethérien. Toute suite de longueur 2 est dépendante [5], mais ce n'est pas pour autant que l'on peut en déduire que $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} \leqslant 1$ !

### Suite singulière versus suite dépendante

Si l'anneau est noethérien, on a donc l'équivalence (traduisant l'inégalité $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} < n$)

$$\forall\, \underline{a} = (a_1, \ldots, a_n), \quad 0 \in \mathcal{S}(\underline{a}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, \underline{a} = (a_1, \ldots, a_n), \quad 1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$$

Aucune implication ne semble faisable naïvement à la main. Étonnant ou pas ? En fait, nous pensons qu'il y a encore des points à élucider concernant le lien entre les relations de la Kdim générale (cf. section 1) et les relations de dépendance monomiale qui contrôlent la Kdim en terrain noethérien (cf. théorème 5.12).

Prenons l'exemple élémentaire d'une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ sur un corps $\mathbf{k}$. Dans ce cadre, il y a un dénominateur commun aux deux types de relations : ce dénominateur commun est la notion de dépendance $\mathbf{k}$-algébrique. Dit autrement, à partir d'une relation de dépendance $\mathbf{k}$-algébrique pour la suite $\underline{a}$, il est « facile » de produire une Kdim relation pour $\underline{a}$ (*i.e.* de provoquer l'appartenance $0 \in \mathcal{S}(\underline{a})$) ainsi qu'une relation de dépendance monomiale pour $\underline{a}$. Voici comment procéder. Soit $R \in \mathbf{k}[Y_1, \ldots, Y_n]$ un polynôme non nul vérifiant $R(\underline{a}) = 0$, certificat de la $\mathbf{k}$-dépendance algébrique de $\underline{a}$. Tout d'abord, en considérant la composante homogène basse de $R$, polynôme qui contient un coefficient inversible (car $\mathbf{k}$ est un corps), on produit une relation de dépendance monomiale (cf. le deuxième point de la remarque 5.2). Ensuite, désignons par $Y^\alpha = Y_1^{\alpha_1} \cdots Y_n^{\alpha_n}$ son monôme de plus petit degré lexicographique ; quitte à diviser $R$ par un scalaire, on peut supposer que le coefficient de $Y^\alpha$ dans $R$ est 1. La considération de l'ordre lexicographique permet d'écrire

$$R \;=\; Y^\alpha \;+\; Y_1^{\alpha_1} \cdots Y_n^{\alpha_n+1} R_n \;+\; Y_1^{\alpha_1} \cdots Y_{n-1}^{\alpha_{n-1}+1} R_{n-1} \;+\; \cdots \;+\; Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2+1} R_2 \;+\; Y_1^{\alpha_1+1} R_1$$

où $R_i \in \mathbf{k}[Y_i, Y_{i+1}, \ldots, Y_n]$. Ainsi l'égalité $R(\underline{a}) = 0$ produit une Kdim relation, *i.e.* $0 \in \mathcal{S}(\underline{a})$. C'est l'approche figurant dans [LQ11, proposition XIII-5.2].

Au passage, notons que l'on peut apporter une petite précision concernant la quasi-régularité et l'indépendance algébrique sur $\mathbf{k}$ lorsque $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre (cf. [Mat89, exercice 16.6 p. 133]). Cela vient compléter la proposition V-5.3.

5. Soit $x, y \in \mathbf{A}$. On a par exemple $y \in \langle x \rangle$, disons $y = \lambda x$. Alors le polynôme $F(X,Y) = Y - \lambda X$ est homogène de degré 1, possède un coefficient inversible et vérifie $F(x,y) = 0$, d'où une relation de dépendance monomiale pour $(x,y)$.

**Proposition 5.13.** *Soit $\underline{a}$ une suite d'un anneau $\mathbf{A}$ et $\mathbf{k} \subset \mathbf{A}$ un sous-anneau tel que $\mathbf{k} \cap \langle \underline{a} \rangle = \{0\}$. Si $\underline{a}$ est quasi-régulière alors $\underline{a}$ est $\mathbf{k}$-algébriquement indépendante.*

***Preuve.*** Soit $G$ un polynôme annulant $\underline{a}$. On peut toujours décomposer $G = G_d + G_{d+1} + \cdots + G_m$ en composantes homogènes avec $d \leqslant m$. Soit $\lambda$ un coefficient de $G_d$. Un tel $\lambda$ est dans $\mathbf{k} \cap \mathcal{C}(\underline{a})$. Or $\mathcal{C}(\underline{a}) = \langle \underline{a} \rangle$ car $\underline{a}$ est quasi-régulière (cf. le deuxième point de la remarque 5.6). Donc $\lambda \in \mathbf{k} \cap \langle \underline{a} \rangle = \{0\}$. Ainsi $G_d$ est nul. On recommence jusqu'à obtenir $G = 0$. □

On peut se poser d'autres questions concernant les suites monomialement dépendantes. Par exemple, si toute suite de longueur $d+1$ d'un anneau $\mathbf{A}$ est monomialement dépendante, est-ce encore vrai pour un sur-anneau $\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$ entier sur $\mathbf{A}$ ? Il est fort probable que des éléments de réponse figurent dans l'article [KT14], article qui a partiellement influencé nos réflexions.

# 6 Idéal localement radicalement $d$-engendré

Le résultat essentiel de la section 5.2 est évidemment le théorème 5.7, sorte d'indépendance analytique revisitée (dans un anneau local non nécessairement noethérien). Ce résultat fait appel à l'idéal $\mathcal{C}(\underline{a})$ et la preuve n'est pas vraiment uniforme dans le sens où le cas $n = 1$ est traité à part. On voit d'ailleurs que la définition de l'idéal $\mathcal{C}(\underline{a})$ en elle-même n'est pas uniforme.

On propose une propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ infiniment liée à l'appartenance $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$ et qui a l'avantage de prendre en charge tous les cas en même temps. De plus, cette propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ a la vocation de contrôler le nombre de générateurs radicaux locaux de l'idéal $\langle \underline{a} \rangle$. Plus précisément, pour une suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, si la propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est vérifiée alors l'idéal $\langle \underline{a} \rangle$ devient localement radicalement $(n-1)$-engendré au sens suivant :

**Définition 6.1.** *Soit $d \in \mathbb{N}$. Un idéal est dit* localement radicalement $d$-engendré *s'il existe un système fini de localisations comaximales $(s_i)$ tel que, dans chaque localisé $\mathbf{A}_{s_i}$, l'idéal soit radicalement $d$-engendré. Un tel idéal est nécessairement radicalement de type fini.*

**Remarque 6.2.** Soit $S$ un monoïde de $\mathbf{A}$.

(i) Pour un idéal quelconque $\mathfrak{a}$, on a l'égalité $\sqrt{S^{-1}\mathfrak{a}} = S^{-1}\sqrt{\mathfrak{a}}$. Pour l'inclusion $\supset$, considérons un élément $x/s$ avec $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, disons $x^n \in \mathfrak{a}$. Alors $(x/s)^n = x^n/s^n \in S^{-1}\mathfrak{a}$, donc $x/s \in \sqrt{S^{-1}\mathfrak{a}}$. Pour l'inclusion $\subset$, on considère $x \in \mathbf{A}$ et $s \in S$ tels que $(x/s)^n \in S^{-1}\mathfrak{a}$. Il existe alors $t \in S$ tel que $tx^n \in \mathfrak{a}$ donc tel que $tx \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Ainsi $\frac{x}{s} = \frac{tx}{ts}$ appartient à $S^{-1}\sqrt{\mathfrak{a}}$.

(ii) Deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ engendrent radicalement le même idéal dans $S^{-1}\mathbf{A}$ si $\sqrt{S^{-1}\mathfrak{a}} = \sqrt{S^{-1}\mathfrak{b}}$. L'inclusion $\sqrt{S^{-1}\mathfrak{a}} \subset \sqrt{S^{-1}\mathfrak{b}}$, *i.e.* $S^{-1}\mathfrak{a} \subset \sqrt{S^{-1}\mathfrak{b}}$, se traduit par $\forall\, a \in \mathfrak{a},\ \exists\, s \in S,\ sa \in \sqrt{\mathfrak{b}}$. En effet, soit $a \in \mathfrak{a}$ tel que $a^n \in S^{-1}\mathfrak{b}$. Il existe donc $s \in S$ tel que $sa^n \in \mathfrak{b}$ d'où $sa \in \sqrt{\mathfrak{b}}$.

(iii) Un idéal $\mathfrak{a}$ est radicalement $d$-engendré dans $S^{-1}\mathbf{A}$ s'il existe un idéal $d$-engendré $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ engendrent radicalement le même idéal dans $S^{-1}\mathbf{A}$.

(iv) Supposons $\mathfrak{a}$ radicalement de type fini, *i.e.* $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\underline{a}}$. Dire que $\mathfrak{a}$ est radicalement $d$-engendré dans $S^{-1}\mathbf{A}$, c'est dire qu'il existe une suite $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_d)$ de longueur $d$ telle que $s\langle \underline{a} \rangle \subset \sqrt{\underline{b}}$ et $t\langle \underline{b} \rangle \subset \sqrt{\underline{a}}$ pour certains $s, t \in S$ (on peut bien entendu supposer que $t = s$).

**Proposition 6.3.** *Pour un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$, il y a équivalence entre :*

*(i) $\mathfrak{a}$ est localement radicalement $d$-engendré au sens de la définition 6.1*

*(ii) $\mathfrak{a}$ est radicalement $d$-engendré dans $\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$*

***Preuve.*** Dans les deux cas de figure, l'idéal $\mathfrak{a}$ est radicalement de type fini, disons $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\underline{a}}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons qu'il existe un système de localisations comaximales $(s_i)$ tel que dans chaque localisé, $\mathfrak{a}$ soit radicalement $d$-engendré. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier. Alors il existe un $i$ tel que $s_i \notin \mathfrak{p}$. Le point (iv) de la remarque précédente permet de conclure.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Par hypothèse, pour tout premier $\mathfrak{p}$, il existe $s_{\mathfrak{p}} \notin \mathfrak{p}$ et une suite $\underline{b}_{\mathfrak{p}}$ de longueur $d$ vérifiant les deux inclusions du point (iv) de la remarque précédente. Pour conclure, il suffit de remarquer que l'idéal engendré par tous les $s_{\mathfrak{p}}$ contient 1, ce qui fournit un nombre fini d'éléments comaximaux vérifiant $(i)$. □

## 6.1 La propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ : « $F$ homogène primitif annulant $\underline{a}$ » est locale-globale

Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ une suite de $\mathbf{A}$. On considère la propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ suivante

$$\mathsf{P}_{\underline{a}} \ : \text{« il existe } F \in \mathbf{A}[\underline{X}] \text{ homogène primitif tel que } F(\underline{a}) = 0 \text{ »}$$

Comme indiqué ci-dessus, la propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est quasiment équivalente à l'appartenance $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$. Seul le cas $n = 1$ empêche l'équivalence, ou plutôt « fait la différence » entre les deux notions.

**Proposition 6.4.** *Si $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est vérifiée alors $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$. Plus précisément :*
- *si $n = 1$, la propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ dit que $a_1$ est nilpotent i.e. $a_1^d = 0$ ; en particulier $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$.*
- *si $n \geqslant 2$, la propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est équivalente à $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$.*

***Preuve.*** L'implication $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ vérifiée $\Rightarrow 1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$ est évidente en raison de l'inclusion $\mathrm{c}(F) \subset \mathcal{C}(\underline{a})$ où $F$ est un polynôme homogène annulant $\underline{a}$ (cf. le premier point de la remarque 5.2).

Donnons quelques détails supplémentaires. Pour $n = 1$, rappelons que $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$ est équivalent à $a_1^d(1 + ua_1) = 0$. Et pour $n = 2$, l'appartenance $1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$ est exactement équivalente à la propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ d'après les quatre lignes qui suivent la définition 5.3. □

**Remarque 6.5.** Donnons une preuve artisanale de l'implication $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ vraie $\Rightarrow 1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$. Soit $F$ un polynôme homogène *primitif* annulant $\underline{a}$. Pour tout coefficient $c_\alpha$ de $F$, on a $c_\alpha \in T_\alpha$ où on rappelle que $T_\alpha$ est le transporteur $\sum(\mathbf{A}a^\beta : a^\alpha)$, la somme portant sur les $\beta \neq \alpha$ tels que $|\beta| = |\alpha|$. Pour tout $\alpha$, on a donc $c_\alpha \in T_e$ pour $e$ assez grand, par exemple $e = \deg(F)$. Comme $F$ est primitif, il existe des coefficients $u_\alpha$ tels que $1 = \sum_\alpha u_\alpha c_\alpha$. On récupère donc $1 \in T_e$.

**Proposition 6.6.** *La propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est locale-globale au sens suivant : si $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est vérifiée après localisation en une famille finie de monoïdes comaximaux, alors $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est vraie.*

***Preuve.*** Si $n = 1$, *i.e.* si la suite est réduite à un seul élément $a$, alors $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est équivalente au fait que $a$ est nilpotent. Et il n'est pas difficile de montrer que « $a$ nilpotent » est une propriété locale-globale.

Pour $n \geqslant 2$, la propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est équivalente à $1 \in T_e$ pour un certain $e$. Soit $(s_i)$ un système de localisations comaximales tels que $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ soit vraie dans $\mathbf{A}_{s_i}$. Alors $s_i \in T_{e_i}$. Ainsi $s_i \in T_e$ pour $e$ assez grand. Par comaximalité des $s_i$, on a donc $1 \in T_e$ ce qu'il fallait démontrer. □

## 6.2 La propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ contrôle le nombre de générateurs radicaux locaux de $\langle \underline{a} \rangle$

**Proposition 6.7.** *Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ une suite de $\mathbf{A}$ telle que $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est vérifiée. Alors l'idéal $\langle \underline{a} \rangle$ est localement radicalement $(n-1)$-engendré.*

***Preuve.*** Il suffit d'utiliser l'énoncé 🎵 de la section précédente qui affirme : *Un polynôme homogène primitif de degré $> 0$ est localement complétable.* Notons que l'égalité $F(\underline{a}) = 0$ force le degré de $F$ à être strictement positif. Si l'on revient à 🎶 on voit que $s_\alpha \langle \underline{a} \rangle \subset \sqrt{\underline{b}}$ où $\underline{b} = (\Phi_{\alpha,2}, \dots, \Phi_{\alpha,n})$. Ainsi le point (iv) de la remarque 6.2 est bien vérifié avec $\langle \underline{b} \rangle \subset \langle \underline{a} \rangle$. □

**Čech-aparté.** On a l'implication $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ vraie $\Rightarrow \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$. La propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ implique l'existence d'un système de localisations comaximales $(s_i)$ tel que $\langle \underline{a} \rangle$ soit radicalement $(n-1)$-engendré dans chaque localisé $\mathbf{A}_{s_i}$. On a donc $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A})_{s_i} = \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}_{s_i}) = 0$ car la cohomologie de Čech est invariante par radical. Comme les localisations sont comaximales, on obtient $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$. Cette remarque est à mettre en relation avec le théorème 2.3 qui dit $0 \in \mathcal{S}(\underline{a}) \Rightarrow \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$. **Fin du Čech-aparté.**

## 6.3 Retour sur la Kdim noethérienne

**Proposition 6.8.** *On suppose que pour toute suite $\underline{a} = (a_0, \dots, a_d)$, la propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est vérifiée. Alors tout idéal radicalement de type fini est localement radicalement $d$-engendré.*

***Preuve.*** Soit $\mathfrak{a}$ un idéal radicalement de type fini, disons radicalement $n$-engendré. Si $n \leqslant d$, il n'y a rien à montrer. Si $n = d+1$, la proposition 6.7 permet de conclure. Si $n \geqslant d+2$, on itère 6.7 en utilisant le lemme des localisations successives, cf. [LQ11, Fait V-7.2.]. □

**Proposition 6.9.** *On suppose que pour toute suite $\underline{a} = (a_0, \dots, a_d)$, la propriété $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est vérifiée. Alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$ radicalement de type fini, on a $\delta(\mathbf{A}_\mathfrak{p}) \leqslant d$, i.e. l'idéal $\mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ est radicalement $d$-engendré. Si l'anneau est noethérien, pour tout premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$, on a alors* $\operatorname{Kdim}\mathbf{A}_\mathfrak{p} \leqslant d$.

***Preuve.*** Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathbf{A}$ radicalement de type fini. Tout d'abord, d'après la proposition 6.8, l'idéal $\mathfrak{p}$ est localement radicalement $d$-engendré. Ensuite, d'après la proposition 6.3, l'idéal $\mathfrak{p}$ est radicalement $d$-engendré dans $\mathbf{A}_\mathfrak{q}$ pour tout premier $\mathfrak{q}$ donc en particulier dans le localisé $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$. Bref, l'idéal $\mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ est radicalement engendré par $d$ éléments. □

On obtient une condition suffisante pour provoquer $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} \leqslant d$ sur un anneau noethérien similaire à celle donnée dans le théorème 5.12 à l'aide des suites monomialement dépendantes. Ceci n'a rien d'étonnant en vertu de la proposition 6.4.

**Proposition 6.10.** *Dans un anneau noethérien $\mathbf{A}$, si $\mathsf{P}_{\underline{a}}$ est vérifiée pour toute suite $\underline{a}$ de longueur $d+1$ alors* $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} \leqslant d$.

***Preuve.*** La proposition précédente affirme que $\operatorname{Kdim}\mathbf{A}_\mathfrak{p} \leqslant d$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$. Par conséquent $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} \leqslant d$. □

### Čech dimension et Krull dimension

Commençons par rappeler l'équivalence

$$\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, h \in \mathbb{N}, \quad (a_1 \cdots a_n)^h \ \in\ \langle a_1^{h+k}, \dots, a_n^{h+k}\rangle$$

Par conséquent, si on a $\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$ pour toute suite $\underline{a}$ de longueur $n$, alors $\check{\mathrm{H}}^{\#\underline{b}}_{\underline{b}}(\mathbf{A}) = 0$ pour toute suite $\underline{b}$ de longueur $\#\underline{b} \geqslant n$. Cette remarque légitime la définition suivante.

**Définition 6.11.** *Pour un entier $d$, on écrit* $\check{\mathrm{C}}\mathrm{dim}\,\mathbf{A} \leqslant d$ *lorsque pour toute suite $\underline{a}$ de longueur $d+1$, on a $\check{\mathrm{H}}^{d+1}_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$.*

On sait que (cf. théorème 2.3) pour une suite $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$, on a $0 \in \mathcal{S}(\underline{a}) \Rightarrow \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$. En particulier, on a $\check{\mathrm{C}}\mathrm{dim}\,\mathbf{A} \leqslant \operatorname{Kdim}\mathbf{A}$. Lorsque l'anneau est noethérien, on a l'autre inégalité. Même s'il nous faut utiliser les idéaux premiers et le non-vanishing theorem, il nous paraît intéressant de mentionner ce résultat.

**Proposition 6.12.** *Si $\mathbf{A}$ est noethérien, on a* $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} \leqslant \check{\mathrm{C}}\mathrm{dim}\,\mathbf{A}$ *d'où* $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} = \check{\mathrm{C}}\mathrm{dim}\,\mathbf{A}$.

***Preuve.*** Soit $d \in \mathbb{N}$. On suppose que $\check{\mathrm{C}}\mathrm{dim}\,\mathbf{A} \leqslant d$. Donc $\check{\mathrm{H}}^{\#\underline{b}}_{\underline{b}}(\mathbf{A}) = 0$ pour toute suite $\underline{b}$ de longueur $\#\underline{b} \geqslant d+1$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier. Montrons que $\operatorname{Kdim}\mathbf{A}_\mathfrak{p} \leqslant d$. On sait qu'il existe une suite $\underline{a}$ de $\mathbf{A}$ de longueur $\#\underline{a} = \operatorname{Kdim}\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ qui engendre radicalement $\mathfrak{p}$ dans le localisé. Le non-vanishing theorem affirme que $\check{\mathrm{H}}^{\#\underline{a}}_{\underline{a}}(\mathbf{A}_\mathfrak{p}) \neq 0$ donc a fortiori $\check{\mathrm{H}}^{\#\underline{a}}_{\underline{a}}(\mathbf{A}) \neq 0$. L'hypothèse implique alors $\#\underline{a} \leqslant d$, *i.e.* $\operatorname{Kdim}\mathbf{A}_\mathfrak{p} \leqslant d$. □

# Chapitre VII

# Profondeur et Résolution

## 1 Le théorème de Ferrand-Vasconcelos généralisé par Jouanolou

Dans cette section, nous présentons une généralisation du théorème de Ferrand-Vasconcelos. Nous la devons à Jean-Pierre Jouanolou [1].

### 1.1 L'énoncé de Ferrand-Vasconcelos

L'énoncé exact de Vasconcelos dans [Vas67] est le suivant :

> *Let $R$ be a local noetherian ring. Let $I$ be an ideal of finite projective dimension. Assume that $J$ is an ideal satisfying $I \supset J \supset I^2$ and such that $I/J \simeq (R/I)^r$. Then $I = (x_1, \ldots, x_r) + J$ where the $x_i$'s form an $R$-sequence.*

Vasconcelos en déduit alors le corollaire suivant :

> *Soit $R$ un anneau local noethérien et $I$ un idéal de $R$. Si $I$ admet une résolution projective finie et si $I/I^2$ est un $R/I$-module libre, alors $I$ est engendré par une suite régulière.*

Ce résultat est important puisqu'il permet de démontrer en mathématique classique qu'un anneau local noethérien de dimension homologique finie est régulier. C'est en tout cas la stratégie adoptée par Bourbaki (cf. AC X, §4, n° 2 : *Caractérisation homologique des anneaux noethériens réguliers*). La preuve fait appel à l'hypothèse noethérienne via la considération d'idéaux premiers associés.

Le théorème de Jouanolou est une généralisation de ce résultat. L'énoncé de Jouanolou n'est ni local, ni noethérien : tout se passe sur un anneau commutatif quelconque. Par ailleurs, la conclusion est mesurée en terme de true grade et non en terme de suite régulière.

### 1.2 L'énoncé de Jouanolou

**Théorème 1.1** (Jouanolou, [Jou]). *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal d'un anneau commutatif $\mathbf{A}$. On suppose que*
- (FPR) *l'idéal $\mathfrak{a}$ est $\mathbf{A}$-projectivement résoluble*
- (SpOff) *le $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ contient un libre de rang $n$ facteur direct*

*Alors* $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \geqslant n$.

Notons que $\mathfrak{a}$ est nécessairement de type fini à cause de l'hypothèse (FPR).

**Corollaire 1.2.** *Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite finie. Si $\langle \underline{a} \rangle$ admet une résolution projective finie et si $\underline{a}$ est Lech-indépendante alors $\underline{a}$ est complètement sécante.*

### 1.3 Démonstration

On va démontrer ce théorème par récurrence sur $n$. Le cas $n = 0$ est trivial. En revanche, pour $n = 1$ il faut travailler et il est indispensable de traiter ce cas pour mettre en branle la récurrence.

1. Je remercie chaleureusement Jean-Pierre Jouanolou d'avoir accepté que son théorème figure dans cette thèse. Je n'oublie pas d'y associer Claude Quitté qui a également contribué à ce travail.

## 1.4 Le cas $n = 1$

La conclusion du théorème avec $n = 1$ est $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) = 0$. Cette conclusion n'est pas banale, car même en renforçant l'hypothèse (FPR) en « $\mathfrak{a}$ est librement résoluble », cela ne va pas de soi.

**FFR and Vasconcelos** [CQ12, Theorem 2.6]. *Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module librement résoluble. Alors trois cas se présentent suivant le signe de $\chi_M$, caractéristique d'Euler-Poincaré de $M$ :*

▷ *si $\chi_M > 0$ alors $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(M) = 0$*

▷ *si $\chi_M = 0$ alors $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(M)$ est un idéal fidèle*

▷ *si $\chi_M < 0$ alors $\mathbf{A}$ est l'anneau nul*

**Aparté.** Supposons un instant que $\mathfrak{a}$ est librement résoluble. Alors il en est de même de $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ qui a pour annulateur $\mathfrak{a}$. D'après le résultat ci-dessus, deux cas se présentent : $\mathfrak{a} = 0$ ou $\mathfrak{a}$ est fidèle. Le cas $\mathfrak{a} = 0$ n'est pas possible en raison de l'hypothèse (SpOff) avec $n = 1$. Donc $\mathfrak{a}$ est fidèle, c'est-à-dire $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) = 0$.
**Fin de l'aparté.**

**Proposition 1.3.** *On suppose que $\mathfrak{a}$ est projectivement résoluble et que $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ est un $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module fidèle. Alors $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) = 0$.*

La preuve repose sur les deux résultats suivants :

**Une histoire d'annulateurs.** *Pour un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$, on a*

$$\mathrm{Ann}(\mathfrak{a} \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}) = \mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{a}, \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}/\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2) = (\mathfrak{a}^2 : \mathfrak{a})/\mathfrak{a}$$

*En particulier, si $(\mathfrak{a}^2 : \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ alors $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$ et dans ce cas, $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a} \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}) = \mathrm{Ann}(\mathfrak{a})$.*

**Un joli résultat de Jouanolou.** *Soit $M$ un sous-$\mathbf{A}$-module de $\mathbf{A}^r$ projectivement résoluble. Alors $M \oplus \mathbf{A}^r/M$ est librement résoluble de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_M = r$. En particulier ($r = 1$), si $\mathfrak{a}$ est un idéal projectivement résoluble, alors $\mathfrak{a} \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est librement résoluble de caractéristique d'Euler-Poincaré 1.*

***Preuve.*** On peut choisir une résolution projective de $M$ où les $L_i$ sont libres de rang fini et $P$ projectif de type fini :

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

On en déduit une résolution projective finie de $M' = \mathbf{A}^r/M$ que l'on juxtapose à celle de $M$ :

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow L_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow \mathbf{A}^r \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

On en fait la somme directe, ce qui donne, en posant $L_{-1} = \mathbf{A}^r$ :

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow P \oplus L_{n-1} \longrightarrow L_{n-1} \oplus L_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \oplus L_0 \longrightarrow L_0 \oplus L_{-1} \longrightarrow M \oplus M' \longrightarrow 0$$

Soit $Q$ tel que $L_n := Q \oplus P$ soit libre de rang fini. Par ajout de $0 \to Q \to Q \to 0$ à l'extrémité gauche, il vient une résolution *libre* de $M \oplus M'$ de caractéristique d'Euler-Poincaré $r = \mathrm{rg}(L_{-1})$ :

$$0 \longrightarrow L_n \longrightarrow L_n \oplus L_{n-1} \longrightarrow L_{n-1} \oplus L_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \oplus L_0 \longrightarrow L_0 \oplus L_{-1} \longrightarrow M \oplus M' \longrightarrow 0$$

□

***Preuve de la proposition 1.3.*** D'après le joli résultat de Jouanolou, $\mathfrak{a} \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est librement résoluble sur $\mathbf{A}$ avec une caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 1. Le théorème de Vasconcelos dit alors que $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a} \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}) = 0$. Le fait que $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ soit un $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module fidèle permet d'obtenir $(\mathfrak{a}^2 : \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ donc $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a} \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}) = \mathrm{Ann}(\mathfrak{a})$ (cf. ci-dessus). Par conséquent, on a $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) = 0$.

On peut faire la même preuve mais de manière plus « artisanale ». Soit $x \in \mathrm{Ann}(\mathfrak{a})$, *i.e.* $x\mathfrak{a} = 0$. En passant au quotient, on obtient $\overline{x}.\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 = 0$. Comme $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ est fidèle, on a $\overline{x} = 0$ *i.e.* $x \in \mathfrak{a}$. Par conséquent, $x$ tue $\mathfrak{a} \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ dont l'annulateur est nul (d'après Vasconcelos). Bref, on trouve bien que $x = 0$. □

**Bilan.** L'hypothèse $\mathfrak{a}$ projectivement résoluble a été renforcée grâce au joli résultat de Jouanolou en $\mathfrak{a}\oplus\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est librement résoluble de caractéristique d'Euler-Poincaré strictement positive. Par Vasconcelos, $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a})\cap\mathfrak{a}=0$. Et un petit bout de l'hypothèse (SpOff) a permis d'assurer $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a})\subset\mathfrak{a}$, forçant ainsi $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a})=0$. Finalement, on peut retenir que l'on obtient $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a})=0$ à peu de frais, à condition d'avoir avec soi le théorème de Vasconcelos et le joli résultat de Jouanolou.

## 1.5 De $(\mathbf{A},\mathfrak{a})$ à $(\mathbf{A}',\mathfrak{a}')$

On s'attaque maintenant au coeur de la récurrence et on suppose $n\geqslant 1$. Commençons par traduire l'hypothèse (SpOff) dans son intégralité : il existe des éléments $a_1,\dots,a_n$ de $\mathfrak{a}$ et un sous-$(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$-module $S$ de $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ tels que

$$(\star)\qquad \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2=\mathbf{A}/\mathfrak{a}\,.\,\overline{a}_1\oplus\cdots\oplus\mathbf{A}/\mathfrak{a}\,.\,\overline{a}_n\ \oplus\ S$$

D'après le paragraphe précédent, on sait que $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a})=0$ donc il existe un élément régulier $x$ dans $\mathfrak{a}$ après extension polynomiale des scalaires $\mathbf{A}\to\mathbf{A}[t]$.

### Une première passe

Dans un premier temps, on suppose que l'élément $x=a_1\in\mathfrak{a}$ est régulier. On note $\mathbf{A}'=\mathbf{A}/x\mathbf{A}$ et $\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}/x\mathbf{A}$.

• **Propager** (FPR) **à** $(\mathbf{A}',\mathfrak{a}')$

L'application $m_{\overline{x}}:\mathbf{A}/\mathfrak{a}\to\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ de multiplication par $\overline{x}:=x\mod\mathfrak{a}^2$ admet une rétraction $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-linéaire. En effet, $\overline{x}=\overline{a}_1$ engendre un sous-module libre de $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ facteur direct (grâce à la décomposition $(\star)$) et on dispose ainsi de la projection $r:\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow(\mathbf{A}/\mathfrak{a})\cdot\overline{a}_1\simeq\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ qui vérifie évidemment $r\circ m_{\overline{x}}=\mathrm{Id}_{\mathbf{A}/\mathfrak{a}}$.

Par conséquent en appliquant le lemme 1.8, on a la décomposition de $\mathbf{A}'$-modules [2]

$$(\diamond)\qquad \frac{\mathfrak{a}}{x\mathfrak{a}}\ \simeq\ \frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{a}}\ \oplus\ \mathfrak{a}'$$

D'après le résultat 1.9, on obtient que $\mathfrak{a}/x\mathfrak{a}$ est $\mathbf{A}'$-projectivement résoluble car $\mathfrak{a}$ est $\mathbf{A}$-projectivement résoluble et que $x$ est un élément $\mathbf{A}$-régulier (donc $\mathfrak{a}$-régulier !). Maintenant en utilisant la somme directe $(\diamond)$ et le résultat 1.10, on obtient que $\mathfrak{a}'$ est $\mathbf{A}'$-projectivement résoluble. On a donc propagé l'hypothèse (FPR) à $(\mathbf{A}',\mathfrak{a}')$.

• **Propager** (SpOff) **à** $(\mathbf{A}',\mathfrak{a}')$

On souhaite montrer que le $\mathbf{A}'/\mathfrak{a}'$-module $\mathfrak{a}'/\mathfrak{a}'^2$ contient un module libre de rang $n-1$ facteur direct. Tout d'abord, remarquons que $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ et $\mathbf{A}'/\mathfrak{a}'$ sont des anneaux canoniquement isomorphes. On va montrer que l'on a l'ismorphisme canonique de $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-modules :

$$\mathfrak{a}'/\mathfrak{a}'^2\ \simeq\ \frac{\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2}{(\mathbf{A}/\mathfrak{a})\cdot\overline{x}}$$

Pour cela, il suffit de considérer le morphisme canonique $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\mathfrak{a}'/\mathfrak{a}'^2$, $\overline{a}\longmapsto\overline{a'}$ et de montrer que son noyau est le sous-$\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module de $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ engendré par $\overline{x}$. Allons-y. Si $a'\in\mathfrak{a}'^2$ alors $a\in\mathfrak{a}^2+\mathbf{A}x$ *i.e.* $\overline{a}\in(\mathbf{A}/\mathfrak{a})\cdot\overline{x}$.

L'isomorphisme ci-dessus et la décomposition $(\star)$ permettent de conclure.

• **La récurrence à l'action**

Maintenant que l'on a préparé le terrain, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $(\mathbf{A}',\mathfrak{a}')$ d'où $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}';\mathbf{A}')\geqslant n-1$. Autrement dit [3] $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a};\mathbf{A}')\geqslant n-1$. Puisque $x$ est un élément $\mathbf{A}$-régulier qui appartient à $\mathfrak{a}$, on en déduit que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a};\mathbf{A})\geqslant n$. Ce que l'on voulait !

2. Ce qui peut encore s'écrire $\dfrac{\mathfrak{a}}{x\mathfrak{a}}\simeq\dfrac{\mathbf{A}'}{\mathfrak{a}'}\oplus\mathfrak{a}'$ car $\mathbf{A}/\mathfrak{a}\simeq\mathbf{A}'/\mathfrak{a}'$ en tant que $\mathbf{A}'$-modules.

3. Comme $\mathfrak{a}'$ est l'image de $\mathfrak{a}\subset\mathbf{A}$ dans $\mathbf{A}'=\mathbf{A}/x\mathbf{A}$, on a $\mathrm{Gr}_{\mathbf{A}'}(\mathfrak{a}';\mathbf{A}')\geqslant k\Leftrightarrow\mathrm{Gr}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a};\mathbf{A}')\geqslant k$.

## Où l'on se ramène à la première passe

Dans la première passe, on a supposé que $x = a_1$ est $\mathbf{A}$-régulier ce qui est une hypothèse très forte et à double titre. En effet, en plus du fait que $x = a_1$ soit pris dans $\mathbf{A}$ (et pas dans $\mathbf{A}[t]$), la réduction modulo $\mathfrak{a}^2$ de l'élément $x = a_1$ fait partie de la base initialement choisie pour le sous-module de $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$. Et ceci est loin d'être anodin puisque cela a permis de fabriquer une rétraction de $m_{\overline{x}} : \mathbf{A}/\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$.

A présent, on reprend l'hypothèse $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) = 0$ c'est-à-dire qu'il existe un élément $x \in \mathfrak{a}[t] = \mathfrak{a}\mathbf{A}[t]$ qui est $\mathbf{A}[t]$-régulier. Pour pouvoir appliquer la première passe, il suffit d'assurer l'existence d'une rétraction pour $m_{\overline{x}} : (\mathbf{A}/\mathfrak{a})[t] \hookrightarrow (\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)[t]$. Et cela ne va pas de soi ! Heureusement, on peut trouver un bon $x$, c'est-à-dire un $x$ qui fasse partie d'une famille fortement libre du $(\mathbf{A}/\mathfrak{a})[t]$-module $(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)[t]$ au sens suivant :

**Définition 1.4.** *Soit $E$ un $\mathbf{B}$-module qui contient un module libre facteur direct. Convenons d'appeler famille fortement libre, une famille $(y_1, \ldots, y_n)$ de $E$ qui soit libre et engendrant un $\mathbf{B}$-module facteur direct dans $E$ i.e. vérifiant :*

$$E \;=\; \mathbf{B}y_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{B}y_n \;\oplus\; S$$

*Remarque : le $\mathbf{B}$-module $E/\mathbf{B}y_1$ admet un sous-module libre de rang $n-1$ facteur direct.*

**Lemme 1.5.** *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal fidèle de $\mathbf{A}$ et des éléments $a_i \in \mathfrak{a}$ tels que $(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ est une famille $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-fortement libre de $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$. Alors il existe un élément régulier $x \in \mathfrak{a}[t]$ tel que $(\overline{x}, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n)$ soit une famille $(\mathbf{A}/\mathfrak{a})[t]$-fortement libre de $(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)[t]$.*

Cela résulte du lemme un peu plus général que voilà :

**Lemme 1.6.** *Soit $E$ un $\mathbf{B}$-module et $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ une famille fortement libre de $E$ :*

$$E = \mathbf{B}\underline{y} \;\oplus\; S, \qquad \text{avec } S \text{ sous-module de } E$$

*On pose $y_1' = y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_ny_n + z$ avec les $b_i \in \mathbf{B}$ et $z \in S$. Alors la famille $(y_1', y_2, \ldots, y_n)$ est fortement libre dans $E$ avec le même supplémentaire.*

***Preuve.*** On applique le lemme 1.11 : il existe une forme $n$-linéaire alternée $\mu : E^n \to \mathbf{B}$ telle que $\mu(y_1, \ldots, y_n) = 1$ et $\mu(z_1, \ldots, z_n) = 0$ si l'un des $z_i$ est dans $F$. On a alors $\mu(y_1', y_2, \ldots, y_n) = 1$. □

***Preuve du lemme 1.5.*** L'hypothèse se traduit par l'existence d'un idéal $\mathfrak{b}$ de type fini tel que $\mathfrak{a}^2 \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ et

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 = \mathbf{A}/\mathfrak{a}\,.\,\overline{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}\,.\,\overline{a}_n \;\oplus\; \mathfrak{b}/\mathfrak{a}^2$$

d'où $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle + \mathfrak{b} + \mathfrak{a}^2$. Le lemme de McCoy [CQ12, Theorem 3.1] nous dit que l'on peut prendre pour élément régulier dans $\mathfrak{a}[t]$, l'élément $x$ que voilà

$$x = a_1 + a_2t + \cdots + a_nt^{n-1} + t^nf(t)$$

où $f$ est un polynôme de contenu égal à $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}^2$. En réduisant modulo $\mathfrak{a}^2[t]$, on tombe sur

$$\overline{x} = \overline{a}_1 + \overline{a}_2t + \cdots + \overline{a}_nt + t^n\overline{f}(t)$$

où $\overline{f}(t)$ est dans $(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}^2)[t]$. Bien sûr, la famille $(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n)$ est fortement libre sur $(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)[t]$ avec pour supplémentaire $(\mathfrak{b}/\mathfrak{a}^2)[t]$. Tout est donc réuni pour appliquer le lemme 1.6 à $E = (\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2)[t]$, $\mathbf{B} = (\mathbf{A}/\mathfrak{a})[t]$, $y_i = \overline{a}_i$ et $y_1' = \overline{x}$. □

## Bilan concernant le théorème 1.1 de Jouanolou

En faisant une extension polynomiale des scalaires, on ne change pas la configuration générale des objets et la première passe permet de conclure.

## 1.6 Résoudre l'idéal $\mathfrak{a}$ et son résiduel $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$

Soit $M$ un module de présentation finie. Pour n'importe quel système de générateurs de $M$, les relations entre les générateurs forment un module de type fini (cf. [LQ11, page 180]). En particulier, si $\mathfrak{a}$ est un idéal tel que $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est de présentation finie, alors $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(\mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}/\mathfrak{a})$ est de type fini. Lorsque dans un énoncé, $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est supposé librement (ou même projectivement) résoluble, l'idéal $\mathfrak{a}$ est alors ipso facto de type fini. A partir d'une résolution projective de $\mathfrak{a}$, il est très facile d'en obtenir une pour $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$. La réciproque est un peu plus subtile. De manière générale, lorsque l'on dispose d'une suite exacte courte $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$, si deux des modules sont projectivement résolubles, il en est de même du troisième. Cette implication est accompagnée d'inégalités sur les longueurs des résolutions projectives. On peut appliquer cela à $0 \to \mathfrak{a} \to \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a} \to 0$ ce qui fournit la réciproque en question. Tout ceci fait l'objet de la section 4 de l'appendice A. En particulier, le théorème A-4.2 fournit une construction directe et explicite d'une résolution projective de $M_1$ en fonction de résolutions projectives de $M_2$ et $M_3$. On peut adapter cette construction au cas particulier suivant (prendre $M_1 = \mathrm{Ker}\, v$, $M_2 = Q$ et $M_3 = M$) :

**Lemme 1.7.** *On considère un module $M$ avec une résolution projective finie $n \geqslant 1$*

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{u_n} \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{u_1} P_0 \twoheadrightarrow M$$

*et une suite exacte $Q \xrightarrow{v} M \to 0$ avec $Q$ projectif de type fini. Alors* $\mathrm{Pd}(\mathrm{Ker}\, v) \leqslant n-1$. *Plus précisément, le module* $\mathrm{Ker}\, v$ *admet une résolution projective finie du type*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow Q_1 \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}\, v$$

## 1.7 Quelques résultats généraux

Voici des résultats classiques que nous avons utilisés pour la preuve du théorème 1.1.

**Lemme 1.8.** *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$.*

*(i) Pour $x \in \mathfrak{a}$, on dispose d'une suite exacte courte de $\mathbf{A}/x\mathbf{A}$-modules*

$$0 \longrightarrow x\mathbf{A}/x\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}/x\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}/x\mathbf{A} \longrightarrow 0$$

*(ii) Si $x \in \mathfrak{a}$ régulier dans $\mathbf{A}$, on a $x\mathbf{A}/x\mathfrak{a} \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ donc la suite exacte se réécrit*

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}/\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}/x\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}/x\mathbf{A} \longrightarrow 0$$

*où la flèche de gauche est donnée par $\alpha \bmod \mathfrak{a} \mapsto \alpha x \bmod x\mathfrak{a}$.*

*On suppose de plus que l'application $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-linéaire $m_{\overline{x}} : \mathbf{A}/\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ est une injection rétractée. Alors la suite exacte est scindée. Dans ce cas, on a alors*

$$\frac{\mathfrak{a}}{x\mathfrak{a}} \simeq \frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{a}} \oplus \frac{\mathfrak{a}}{x\mathbf{A}}$$

***Preuve.*** $(ii)$ La flèche de gauche est injective grâce à la $\mathbf{A}$-régularité de $x$ : en effet, si $\alpha x \in x\mathfrak{a}$, en simplifiant par $x$, on obtient $\alpha \in \mathfrak{a}$. Le reste de l'exactitude est évident.
Supposons qu'il existe une rétraction $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-linéaire $r$ de $m_{\overline{x}} : \mathbf{A}/\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ c'est-à-dire $r \circ m_{\overline{x}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}/\mathfrak{a}}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}/\mathfrak{a} & \longrightarrow & \mathfrak{a}/x\mathfrak{a} \\ & \overset{r}{\nwarrow} \quad \swarrow & \downarrow \pi \\ & & \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \end{array}$$

Ainsi $r \circ \pi$ est une rétraction $\mathbf{A}/x\mathbf{A}$-linéaire de $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}/x\mathfrak{a}$, donc la suite exacte est scindée. □

**Proposition 1.9.** *Etant donnée une suite exacte $E \to F \to G \to H$ de $\mathbf{A}$-modules et $a \in \mathbf{A}$ un élément $H$-régulier, alors la suite*

$$E/aE \to F/aF \to G/aG$$

*reste exacte.*

*Un cas particulier : soit $E$ un $\mathbf{A}$-module projectivement résoluble et $a \in \mathbf{A}$ un élément à la fois $\mathbf{A}$-régulier et $E$-régulier, alors $E/aE$ est $\mathbf{A}/a\mathbf{A}$-projectivement résoluble. Plus précisément on obtient une résolution de $E/aE$ en tant que $\mathbf{A}/a\mathbf{A}$-module en quotientant n'importe quelle résolution de $E$ par $a$.*

**Proposition 1.10.** *Si $E \oplus F$ est projectivement résoluble, alors il en est de même de $E$ et $F$.*

***Preuve.*** On procède par récurrence sur $n$. Le cas $n = 0$ est facile puisqu'alors $E \oplus F$ est projectif donc $E$ et $F$ le sont également. Supposons $n \geqslant 1$ et considérons une résolution projective de $E \oplus F$ de longueur $n \geqslant 1$ :

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \overset{u_0}{\twoheadrightarrow} E \oplus F$$

Notons $\pi_E$ et $\pi_F$ les projections de $E \oplus F$ sur $E$ et $F$. Soit $v : P_0 \oplus P_0 \to E \oplus F$ défini par $x \oplus y \mapsto \pi_E\big(u_0(x)\big) \oplus \pi_F\big(u_0(y)\big)$. Son noyau est $u_0^{-1}(F) \oplus u_0^{-1}(E)$ et on a donc la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow u_0^{-1}(F) \oplus u_0^{-1}(E) \longrightarrow P_0 \oplus P_0 \longrightarrow E \oplus F \longrightarrow 0$$

D'après le théorème A-4.2, le module $u_0^{-1}(F) \oplus u_0^{-1}(E)$ admet une résolution projective de longueur $n-1$. Par récurrence sur $n$, on en déduit que $u_0^{-1}(E)$ et $u_0^{-1}(F)$ admettent une résolution projective de longueur $n-1$. Donc $E$ et $F$ admettent une résolution projective de longueur $n$. Donnons les détails pour $E$ par exemple. À partir d'une résolution projective de $u_0^{-1}(F)$ de longueur $n-1$ :

$$0 \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \twoheadrightarrow u_0^{-1}(F)$$

on obtient, grâce au fait que $\mathrm{Ker}(\pi \circ u_0) = u_0^{-1}(F)$, une résolution projective de $E$ de longueur $n$ via :

$$0 \longrightarrow Q_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_1 \longrightarrow Q_0 \longrightarrow P_0 \overset{\pi \circ u_0}{\twoheadrightarrow} E$$

□

**Proposition 1.11.** *Soient $y_1, \ldots, y_n$ des éléments d'un $\mathbf{A}$-module $E$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

*(i) Le sous-module $\mathbf{A}y_1 + \cdots + \mathbf{A}y_n$ de $E$ est libre de base $(y_1, \ldots, y_n)$ et est facteur direct dans $E$.*

*(ii) Il existe une forme $n$-linéaire alternée $\mu : E^n \to \mathbf{A}$ telle que $\mu(y_1, \ldots, y_n) = 1$.*

***Preuve.*** ($\Rightarrow$) On suppose que $E = L \oplus S$ avec $L = \bigoplus_i \mathbf{A}y_i$. Considérons la projection $\pi : E \twoheadrightarrow L$ et notons $\theta_j : L \to \mathbf{A}$ la $j$-ème forme coordonnée relativement à la base $(y_1, \ldots, y_n)$. On définit $\mu : E^n \to \mathbf{A}$ par

$$\mu(x_1, \ldots, x_n) = \det\Big(\theta_j\big(\pi(x_i)\big)\Big)_{i,j}$$

Par définition, on a bien $\mu(y_1, \ldots, y_n) = 1$. Au passage, on remarque que $\mu(z_1, \ldots, z_n) = 0$ dès que l'un des $z_i$ est dans $S$.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $\mu$ vérifiant $(ii)$. On définit alors l'application linéaire $\pi : E \to E$ par

$$\pi(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu(y_1, \ldots, x, \ldots, y_n) y_j$$

où $x$ figure en position $j$. On a $\pi(y_i) = y_i$ donc $\pi^2 = \pi$ (il suffit d'utiliser la formule centrée ci-dessus). Ainsi $\mathrm{Im}\,\pi = \sum_j \mathbf{A}y_j$ est facteur direct.

Pour finir, montrons que $(y_1, \ldots, y_n)$ est une famille libre. Tout d'abord, si $x = \sum \lambda_i y_i$ alors on remarque que $\mu(y_1, \ldots, x, \ldots, y_n) = \lambda_j$ où $x$ est en position $j$. Ainsi si on suppose $\sum \lambda_i y_i = 0$, on obtient $\lambda_j = 0$ pour tout $j$. □

## 1.8 Idéaux localement complètement sécants

**Définition 1.12.** *Un idéal $\mathfrak{a}$ de type fini est dit localement complètement sécant s'il existe des éléments comaximaux $(s_1, \dots, s_p)$ tels que $\mathfrak{a}$ soit engendré par une suite complètement sécante dans chaque localisé $\mathbf{A}_{s_i}$.*

Cette définition est équivalente à celle que l'on peut trouver dans le Stacks-Project [Sta14], que je rapporte, en conservant notations et terminologies :

> *We say $I$ is a Koszul-regular ideal if for every $\mathfrak{p} \in V(I)$ there exists a $g \in R$, $g \notin \mathfrak{p}$ and a Koszul-regular sequence $f_1, \dots, f_r \in R_g$ such that $I_g$ is generated by $f_1, \dots, f_r$.*

En revanche, ces définitions ne sont pas équivalentes à celle de Bourbaki (cf. Algèbre Commutative, Chapitre X, §5, n° 1, définition 1), contrairement à ce que l'on pourrait croire en première lecture. Voici ce que dit Bourbaki :

> *Soient* A *un anneau,* J *un idéal de* A*. On dit que l'idéal* J *est complètement sécant si pour tout premier $\mathfrak{p}$ de $V(\mathrm{J})$, l'idéal $\mathrm{J}_\mathfrak{p}$ de $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$ est engendré par une suite complètement sécante pour $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$.*

L'énorme différence entre Bourbaki et Stacks-Project se situe dans la condition d'ouverture : « there exists a $g \in R \setminus \mathfrak{p}$ such that ... », condition qui permet de montrer très facilement l'équivalence avec notre définition. On s'éloigne donc de Bourbaki sur la définition même et sur la terminologie.

**Lemme 1.13.** *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini et $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ dans $\mathfrak{a}$ tels que $(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$ soit un système générateur du $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$. Alors, il existe $e \in \mathfrak{a}$, idempotent modulo $\langle \underline{a} \rangle$ tel que*

$$\mathfrak{a} \;=\; \langle a_1, \dots, a_n, e \rangle$$

***Preuve.*** L'hypothèse s'écrit $\mathfrak{a} = \langle \underline{a} \rangle + \mathfrak{a}^2$. L'idéal $\mathfrak{a}/\langle \underline{a} \rangle$ de $\mathbf{A}/\langle \underline{a} \rangle$ est idempotent. Le « determinant trick » fournit un élément $e \in \mathfrak{a}$ idempotent modulo $\langle \underline{a} \rangle$ engendrant l'idéal $\mathfrak{a}/\langle \underline{a} \rangle$. D'où le résultat. □

### Caractérisation homologique des idéaux localement complètement sécants

**Proposition 1.14.** *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$. Sont équivalents :*
(1) *$\mathfrak{a}$ est localement complètement sécant*
(2) *$\mathfrak{a}$ admet une résolution projective finie et le $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ est projectif de type fini*

***Preuve.*** Le sens (1) ⇒ (2) est facile. Comme les notions sont locales, on peut se permettre de supposer que l'idéal $\mathfrak{a}$ est engendré par une suite complètement sécante $\underline{a}$. Dans ce cas, le complexe de Koszul de $\underline{a}$ fournit une résolution projective (libre ici) de $\mathfrak{a}$ et le module $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ est libre avec pour base l'image de la suite $\underline{a}$ (en effet, une suite complètement sécante est Lech-indépendante cf. proposition V-4.3).

Le sens (2) ⇒ (1) relève du théorème de Jouanolou. Supposons dans un premier temps que $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ soit un $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module libre de rang $n$. Cette hypothèse combinée avec le fait que $\mathfrak{a}$ est projectivement résoluble permet d'obtenir $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) \geqslant n$ d'après le théorème Jouanolou. Pour obtenir (1), il va s'agir de trouver, localement, un système générateur de longueur $n$ pour l'idéal $\mathfrak{a}$. Soit $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ une suite d'éléments de $\mathfrak{a}$ tels que $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ soit engendré en tant que $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module par $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$. D'après le lemme 1.13, il existe $e \in \mathfrak{a}$ idempotent modulo $\langle \underline{a} \rangle$ vérifiant $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n, e \rangle$. L'idéal $\mathfrak{a}$ se retrouve alors engendré par une suite complètement sécante dans les localisés $\mathbf{A}_e$ et $\mathbf{A}_{1-e}$. En effet, sur $\mathbf{A}_e$, on a $1 \in \mathfrak{a}$ ! Et sur $\mathbf{A}_{1-e}$, on a $e \in \langle \underline{a} \rangle$ (car $e$ est idempotent modulo $\langle \underline{a} \rangle$) et donc $\mathfrak{a}$ est engendré par $\underline{a}$, qui est complètement sécante sur ce localisé car $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,; \mathbf{A}_{1-e}) \geqslant n$ (le grade passe à la localisation) c'est-à-dire $\mathrm{Gr}(\underline{a}\,; \mathbf{A}_{1-e}) \geqslant n$.

On vient de montrer que deux localisations comaximales (en $e$ et $1-e$) suffisent pour assurer (1). Traitons le cas général où $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ est projectif de type fini. Il existe alors des éléments comaximaux $s_1, \dots, s_p$ de $\mathbf{A}$ tels que le $\mathbf{A}_{s_i}/\mathfrak{a}_{s_i}$-module $\mathfrak{a}_{s_i}/\mathfrak{a}_{s_i}^2$ est libre. On applique alors l'étape précédente et on récupère un système d'éléments comaximaux (de cardinal $2p$ en fait) tel que dans chaque localisé, l'idéal soit engendré par une suite complètement sécante. □

On peut définir la notion d'idéal $n$-localement complètement sécant : un tel idéal est localement engendré par une suite complètement sécante *de longueur* $n$. On a alors :

**Proposition 1.15.** *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$. Sont équivalents :*
*(i) $\mathfrak{a}$ est $n$-localement complètement sécant*
*(ii) $\mathfrak{a}$ admet une résolution projective finie et le $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ est projectif de type fini de rang $n$*
*(iii) $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ admet une résolution projective finie de longueur $\leqslant n$ et le $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ est projectif de type fini de rang $n$*

***Preuve.*** La preuve de la proposition précédente montre directement $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Pour $(i) \Rightarrow (iii)$, on reprend la preuve de $(1) \Rightarrow (2)$. Pour $(iii) \Rightarrow (i)$, il faut savoir qu'une résolution projective de $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ peut être aménagée en une résolution projective de $\mathfrak{a}$ (cf. lemme 1.7). □

## 2 Inégalités faisant intervenir Gr et Pd

Les résultats ci-dessous sont tirés de [CQ12]. Lorsque c'est possible, on les énonce avec des résolutions projectives plutôt que des résolutions libres en profitant de la remarque ci-après. Si $M$ admet une résolution du type $0 \to P_m \to P_{m-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M$ où les $P_i$ sont projectifs de type fini, alors il est possible de modifier un peu cette résolution pour obtenir $0 \to P \to L_{m-1} \to \cdots \to L_1 \to L_0 \to M$ où les $L_i$ sont libres de rang fini et $P$ projectif de type fini.

**Proposition 2.1.** *Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module et $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$. Si $\mathrm{Pd}(M) \leqslant p$ et $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \geqslant k+p$ alors $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;M) \geqslant k$. On peut abréger cela avec l'inégalité*

$$\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;M) \;\geqslant\; \mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) - \mathrm{Pd}(M)$$

***Preuve.*** Supposons dans un premier temps disposer d'une résolution *libre* finie de $M$. En utilisant la même technique que dans la preuve de la proposition I-6.3, on obtient le résultat. Si $M$ possède une résolution *projective* finie, on peut la modifier de façon à obtenir que des modules libres sauf éventuellement le dernier noté $P$. Comme $P$ est projectif de type fini, il existe un système de localisations comaximales le rendant libre localement. On conclut en utilisant « le premier temps » et le fait que la profondeur est compatible avec la localisation (plus précisément, l'exactitude d'un complexe se traduit par des égalités du type Ker = Im et est donc une propriété locale-globale). □

Voici une sorte de réciproque : on suppose disposer d'une résolution *libre* ayant sa dernière différentielle dans l'idéal $\mathfrak{a}$. C'est exactement le théorème 7.2 de [CQ12].

**Proposition 2.2.** *Soit $M$ un $\mathbf{A}$-module et $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$. On suppose que l'on dispose d'une résolution* libre *de $M$ du type*

$$0 \;\to\; L_p \;\to\; \cdots \;\to\; L_1 \;\to\; L_0 \;\to\; M$$

*avec $L_i = \mathbf{A}^{n_i}$ et $n_i > 0$. De plus, on suppose que la matrice $L_p \to L_{p-1}$ a ses coefficients dans l'idéal $\mathfrak{a}$. Si $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;M) \geqslant k$ alors $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \geqslant k+p$.*

#### Les deux propositions précédentes combinées et l'égalité d'Auslander-Buchsbaum

**Proposition 2.3.** *Soit $\mathfrak{a}$ de type fini tel que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \geqslant n$. On considère un module $M$ ayant une résolution libre de longueur $p$ dont les coefficients de la dernière différentielle sont dans l'idéal $\mathfrak{a}$. S'il existe une résolution projective de $M$ de longueur $p-1$ alors $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \geqslant n+1$.*

***Preuve.*** En appliquant la proposition 2.1, on trouve $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;M) \geqslant n-(p-1)$. Avec cette information, on applique maintenant la proposition 2.2, et on trouve $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \geqslant (n-p+1)+p = n+1$. □

Par exemple, soit $\mathbf{A} = \mathbf{k}[\underline{X}]$ un anneau de polynômes sur un anneau $\mathbf{k}$ et $M$ un $\mathbf{A}$-module. Si on dispose d'une résolution libre de $M$ de longueur $p$ avec la dernière différentielle à coefficients dans $\langle \underline{X} \rangle$, alors soit $\mathbf{k}$ est l'anneau trivial, soit $\mathrm{Pd}(M) = p$. Dans ce cas, on a alors $\mathrm{Gr}(\underline{X}\,;M) \geqslant \mathrm{Gr}(\underline{X}) - p$ (proposition 2.1) et $\mathrm{Gr}(\underline{X}) \geqslant \mathrm{Gr}(\underline{X}\,;M) + p$ (proposition 2.2), d'où $\mathrm{Gr}(\underline{X}) = \mathrm{Gr}(\underline{X}\,;M) + \mathrm{Pd}(M)$, égalité plus connue sous le nom d'égalité d'Auslander-Buchsbaum.

Typiquement, si $\mathbf{k}$ est un corps et $M$ un $\mathbf{k}[\underline{X}]$-module gradué de présentation finie (par exemple, $M = \mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{a}$ idéal homogène), alors le théorème des syzygies de Hilbert assure l'existence d'une résolution libre graduée minimale. On a donc dans ce cadre l'égalité d'Auslander-Buchsbaum :

$$\mathrm{Gr}(\underline{X}\,;\mathbf{k}[\underline{X}]) \;=\; \mathrm{Gr}(\underline{X}\,;M) \;+\; \mathrm{Pd}(M)$$

**Exemple de résolution non $\mathfrak{a}$-minimale, mais minimale en longueur**

Soit $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ une suite complètement sécante. Considérons

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{d_3} \mathbf{A}^4 \xrightarrow{d_2} \mathbf{A}^4 \xrightarrow{d_1} \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}/\langle a_1, a_2, a_3\rangle$$

avec

$$d_3 = \begin{bmatrix} -a_3 \\ a_2 \\ -a_1 \\ . \end{bmatrix} \qquad d_2 = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_3 & . & 1 \\ a_1 & . & -a_3 & 1 \\ . & a_1 & a_2 & . \\ . & . & . & -1 \end{bmatrix} \qquad d_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

Alors, en utilisant le critère de Buchsbaum-Eisenbud, cf. la proposition 3.1, on obtient que ce complexe est exact.

**Un théorème de Rees**

**Proposition 2.4.** *Si* $\mathrm{Pd}(M) \leqslant p$, $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;\mathbf{A}) \geqslant p+1$ *et* $\mathfrak{a}M = 0$ *alors* $M = 0$.

***Preuve.*** La proposition 2.1 donne $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}\,;M) \geqslant 1$. L'égalité $\mathfrak{a}M = 0$ implique alors $M = 0$. □

# 3 Le critère d'exactitude de Buchsbaum-Eisenbud

Voici le célèbre critère « What makes a complex exact ? » de Buchsbaum-Eisenbud [Eis95, Theorem 20.9]. Nous reprenons la formulation donnée dans l'article de Thierry Coquand et Claude Quitté, cf. [CQ12, Theorem 6.8, Corollary 7.5].

**Théorème 3.1.** *Considérons un complexe de modules libres*

$$0 \longrightarrow L_p \xrightarrow{u_p} L_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{u_1} L_0$$

*avec* $L_i = \mathbf{A}^{r_{i+1}+r_i}$ *et* $r_{p+1} = 0$. *On note* $\mathfrak{D}_k := \mathcal{D}_{r_k}(u_k)$ *les idéaux caractéristiques du complexe. Le complexe est exact si et seulement si* $\mathrm{Gr}(\mathfrak{D}_k) \geqslant k$ *pour tout* $k \in [\![1, p]\!]$.

**Hilbert-Burch**

Pour une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n,n-1}(\mathbf{A})$, on définit $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ via :

$$\begin{vmatrix} X_1 & a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ X_2 & a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_n & a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix} = \Delta_1 X_1 + \cdots + \Delta_n X_n$$

Les $\Delta_i$ sont donc les mineurs d'ordre $n-1$, convenablement signés, de la matrice $A$. On a évidemment $\mathcal{D}_{n-1}(A) = \langle \Delta_1, \ldots, \Delta_n\rangle$. En notant $B$ la matrice qui apparaît ci-dessus, on a $\widetilde{B}B = \det(B)\,\mathrm{I}_n$ et la première ligne de $B$ est égale à $[\Delta_1 \ \cdots \ \Delta_n]$. En analysant la première ligne du produit $\widetilde{B}B$, on obtient $[\Delta_1 \ \cdots \ \Delta_n]\,A = [0 \ \cdots \ 0]$. Ainsi, on dispose du complexe de modules libres :

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}^{n-1} \xrightarrow{A} \mathbf{A}^n \xrightarrow{[\Delta_1 \ \cdots \ \Delta_n]} \mathbf{A}$$

qui fournit une résolution libre de $\mathbf{A}/\mathcal{D}_{n-1}(A)$ de longueur 2 pourvu que la profondeur de $\Delta$ soit supérieure à 2 (c'est même une condition suffisante, cf. [LQ11, Theorem 6.8]). En effet, il suffit de remarquer que $\mathfrak{D}_2 = \mathcal{D}_{n-1}(A) = \langle\Delta\rangle$ et $\mathfrak{D}_1 = \langle\Delta\rangle$ et d'appliquer le critère ci-dessus.

# 4 Idéaux caractéristiques dans un complexe exact libre

On rappelle brièvement la définition des trois notions qui vont être utilisées dans cette section. Une application linéaire $u : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^n$ est dite
- stable de rang $r$ lorsque $\mathcal{D}_{r+1}(u) = 0$ et $\mathcal{D}_r(u)$ est un idéal fidèle (d'annulateur nul).
- localement simple lorsqu'il existe $v : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ telle que $u \circ v \circ u = u$.
- de rang $r$ lorsque $\mathcal{D}_{r+1}(u) = 0$ et $1 \in \mathcal{D}_r(u)$.

Une application de rang $r$ est bien entendu stable de rang $r$. Elle est également localement simple, mais c'est moins évident.

Une autre relation entre ces notions :

**Lemme 4.1.** *Soit $u$ une application linéaire de rang stable $r$. On a l'implication*

$$u \text{ localement simple} \quad \Longrightarrow \quad u \text{ de rang } r$$

*L'implication réciproque est toujours vraie.*

***Preuve.*** Les idéaux déterminantiels d'une application localement simple sont idempotents donc engendrés par un idempotent (car de type fini). L'idéal $\mathcal{D}_r(u)$ est fidèle car $u$ est de rang stable $r$. Donc l'idempotent qui l'engendre est nécessairement égal à 1. Autrement dit $1 \in \mathcal{D}_r(u)$. Par ailleurs, on avait déjà $\mathcal{D}_{r+1}(u) = 0$. Donc $u$ est bien de rang $r$. Pour la réciproque, cf. la section « Une formule magique » de [LQ11, Théorème II-5.14]. □

## 4.1 Le lemme du rang stable

**Lemme 4.2.** *Soit $\mathbf{A}^m \xrightarrow{u} \mathbf{A}^n \xrightarrow{v} \mathbf{A}^p$ une suite exacte. Si $v$ est localement simple, $u$ l'est.*

***Preuve.*** D'après [LQ11, Fait II-5.18], si $v$ est localement simple, alors $\operatorname{Ker} v$ est facteur direct dans $\mathbf{A}^n$. Mézalor $\operatorname{Im} u$ est facteur direct dans $\mathbf{A}^n$ à cause de l'exactitude. Ainsi $u$ est localement simple. □

**Proposition 4.3** (Lemme du rang stable)**.** *Soit $\mathbf{A}^m \xrightarrow{u} \mathbf{A}^n \xrightarrow{v} \mathbf{A}^p$ une suite exacte et des entiers $r$ et $s$ tels que $r + s = n$. Alors $u$ est de rang stable $r$ si et seulement si $v$ est de rang stable $s$. Dans ce cas, on a $\sqrt{\mathcal{D}_r(u)} \supset \sqrt{\mathcal{D}_s(v)}$.*

***Preuve.*** $\Rightarrow$ Supposons $u$ de rang stable $r$. Pour prouver que $\mathcal{D}_s(v)$ est fidèle, il suffit de le faire sur chaque localisé en $\mu$, où $\mu$ est un mineur d'ordre $r$ de $u$. En effet, $\mathcal{D}_r(u)$ est fidèle par hypothèse et on peut utiliser la proposition V-3.2 avec $k = 1$. Sur un tel localisé, l'application $u$ est de rang $r$ donc est matriciellement représentée par

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme $v \circ u = 0$, la matrice de $v$ est de la forme $\begin{bmatrix} 0 & V' \end{bmatrix}$. Comme la suite est exacte, la matrice $V'$ représente une application injective $v' : \mathbf{A}_\mu^s \to \mathbf{A}_\mu^p$ qui est donc stable de rang $n - r = s$ par le lemme d'injectivité [LQ11, Théorème II-5.22].

$\Leftarrow$ Supposons $v$ de rang stable $s$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, il suffit de prouver que $\mathcal{D}_r(u)$ est fidèle sur chaque localisé en un mineur $\nu$ d'ordre $s$ de $v$. Sur un tel localisé, l'application $v$ est de rang $s$ donc $v$ est matriciellement représentée par

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme $v \circ u = 0$, la matrice de $u$ est de la forme $\begin{bmatrix} 0 \\ U' \end{bmatrix}$. Comme la suite est exacte, la matrice $U'$ représente une application linéaire surjective $u' : \mathbf{A}_\nu^m \to \mathbf{A}_\nu^r$. D'après le critère de surjectivité [LQ11, Théorème II-5.22], on obtient $1 \in \mathcal{D}_r(u)$.

Supposons $u$ ou $v$ stable et soit $\mu \in \mathcal{D}_s(v)$. On veut montrer qu'une puissance de $\mu$ appartient à $\mathcal{D}_r(u)$, ce qui revient à montrer que $1 \in \mathcal{D}_r(u)$ dans le localisé $\mathbf{A}_\mu$. Dans ce localisé, on a $1 \in \mathcal{D}_s(v)$. Comme $v$ est stable, on a $\mathcal{D}_{s+1}(v) = 0$. Par conséquent, l'application $v$ est de rang $s$ dans ce localisé donc est localement simple (d'après le lemme 4.1). Il en est donc de même de $u$ d'après le lemme 4.2. Comme $u$ est stable de rang $r$, le lemme 4.1 dit alors que $u$ est de rang $r$, donc $1 \in \mathcal{D}_r(u)$ ce qu'il fallait démontrer. □

## 4.2 Un autre critère de Buchsbaum-Eisenbud

L'objectif de cette section est d'obtenir un énoncé similaire à une des implications du critère d'exactitude de Buchsbaum-Eisenbud (cf. théorème 3.1). Dans ce qui suit, on supposera l'anneau non trivial et on posera $\mathfrak{D}_i = \mathcal{D}_{r_i}(u_i)$.

*Considérons le complexe de modules libres :*

$$0 \longrightarrow L_p \xrightarrow{u_p} L_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{u_1} L_0$$

*On définit la suite $r_p = \mathrm{rg}(L_p)$ et $r_i = \mathrm{rg}(L_i) - r_{i+1}$ des rangs attendus. Si le complexe est exact alors $\mathrm{Gr}(\mathfrak{D}_i) \geqslant i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.*

Une formulation équivalente est donnée par :

*Considérons le complexe de modules libres que l'on suppose exact :*

$$L_p \xrightarrow{u_p} L_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{u_1} L_0$$

*Supposons $u_p$ stable de rang $r_p = \mathrm{rg}(L_p)$ (ce qui est équivalent à $\mathrm{Gr}(\mathfrak{D}_p) \geqslant 1$). Alors toutes les applications $u_i$ sont stables de rang $r_i = \mathrm{rg}(L_i) - r_{i+1}$ et on a $\mathrm{Gr}(\mathfrak{D}_i) \geqslant i$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$.*

Maintenant, donnons un énoncé de la même veine que le précédent. Cette fois-ci, on va partir de la droite. Et dans ce cas, on a besoin d'une hypothèse un peu plus forte que la stabilité de l'application de droite. Il s'agit du théorème 2.1 de l'article de Buchsbaum & Eisenbud [BE74]. On trouve l'énoncé chez Northcott [Nor76, Theorem 18, chap 6], et la preuve utilise un raisonnement par l'absurde avec un idéal premier (à noter que l'on n'a pas a priori besoin de supposer toutes les applications stables comme le fait Northcott, en vertu du lemme du rang stable).

**Théorème 4.4.** *Considérons le complexe de modules libres* que l'on suppose exact *:*

$$L_p \xrightarrow{u_p} L_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{u_1} L_0$$

*Posons $r_1 = \mathrm{rg}(L_0)$. Supposons $\mathrm{Gr}\left(\mathcal{D}_{r_1}(u_1)\right) \geqslant p$. Alors $u_1$ stable de rang $r_1 = \mathrm{rg}(L_0)$ et il en est de même de toutes les applications $u_i$, qui sont stables de rang $r_i = \mathrm{rg}(L_{i-1}) - r_{i-1}$. De plus, on a l'égalité*

$$\sqrt{\mathfrak{D}_1} \;=\; \cdots \;=\; \sqrt{\mathfrak{D}_p}$$

***Preuve.*** Comme $u_1$ est stable, le lemme du rang stable dit que toutes les applications linéaires $u_i$ sont stables de rang $r_i = \mathrm{rg}(L_{i-1}) - r_{i-1}$ et que l'on a $\sqrt{\mathfrak{D}_p} \supset \cdots \supset \sqrt{\mathfrak{D}_1}$. Il suffit donc de prouver que $\sqrt{\mathfrak{D}_k} \subset \sqrt{\mathfrak{D}_1}$. Si $k = 1$, c'est terminé. Supposons désormais $k \geqslant 2$. Soit $\mu \in \mathfrak{D}_k$. Montrons que $1 \in \mathfrak{D}_1$ dans le localisé $\mathbf{A}_\mu$. Sur ce localisé, on a $1 \in \mathfrak{D}_k$. Comme $\mathcal{D}_{r_k+1}(u_k) = 0$ (car $u_k$ est stable de rang $r_k$), on obtient que $u_k$ est de rang $r_k$ donc localement simple. Ainsi $\mathrm{Coker}\, u_k$ est un module projectif. Cela fournit une résolution projective de $M = \mathrm{Coker}\, u_1$ de longueur $k-1$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, u_k \xrightarrow{\overline{u_{k-1}}} L_{k-2} \xrightarrow{u_{k-2}} \quad \cdots \quad \xrightarrow{u_1} L_0 \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow M$$

Par ailleurs, l'idéal $\mathfrak{a} := \mathfrak{D}_1$ vérifie $\mathfrak{a}M = 0$. En effet, *puisque* $r_1 = \mathrm{rg}(L_0)$, l'idéal $\mathfrak{D}_1$ est exactement l'idéal de Fitting d'indice 0 de $M$ et on sait (cf. [LQ11, Lemme IV-9.6]) que ce dernier est inclus dans l'annulateur de $M$. On se retrouve dans les conditions du théorème de Rees (cf. proposition 2.4) : $M$ admet une résolution projective de longueur $k-1$, $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) \geqslant k$ et $\mathfrak{a}M = 0$. Donc $M = 0$. Autrement dit $u_1$ est surjective donc d'après le critère de surjectivité, on a $1 \in \mathfrak{D}_1$. □

**Remarque 4.5.** Définir les idéaux caractéristiques de manière classique, en partant de la gauche, c'est poser $r_{p+1} = 0$ et $r_i = \mathrm{rg}(L_i) - r_{i+1}$. Définir les idéaux caractéristiques en partant de la droite revient à poser $r'_0 = 0$ et $r_{i+1} = \mathrm{rg}(L_i) - r_i$. A présent, si l'on impose $r_0 = 0$ alors $r_i = r'_i$ pour tout $i \leqslant p$.

**Proposition 4.6.** *On considère le complexe exact :*

$$0 \longrightarrow L_p \xrightarrow{u_p} L_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{u_1} L_0$$

*ainsi que la suite des rangs attendus définie via* $r_p = \mathrm{rg}(L_p)$ *et* $r_i = \mathrm{rg}(L_i) - r_{i+1}$.
*On suppose de plus que* $r_0 = 0$. *Alors on a l'équivalence :*

$$\mathrm{Gr}\left(\mathfrak{D}_1\right) \geqslant p \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\mathfrak{D}_p} \;=\; \sqrt{\mathfrak{D}_1}$$

***Preuve.*** Le sens ($\Leftarrow$) est dû au fait que la profondeur est invariante par radical et au fait que $\mathrm{Gr}(\mathfrak{D}_p) \geqslant p$ puisque le complexe est exact. Pour le sens ($\Rightarrow$) : l'égalité $r_0 = 0$ est équivalente à $r_1 = \mathrm{rg}(L_0)$. L'hypothèse $\mathrm{Gr}(\mathfrak{D}_1) \geqslant p$ est donc celle du théorème 4.4, qui fournit alors directement le résultat. □

# 5 Idéal parfait

## 5.1 Définition

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini. En appliquant le théorème de Rees (cf. proposition 2.4) à $M = \mathbf{A}/\mathfrak{a}$, on obtient l'implication

$$\begin{cases} \mathrm{Pd}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) \leqslant p \\ \mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) \geqslant p+1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad 1 \in \mathfrak{a}$$

On a donc toujours l'inégalité $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) \leqslant \mathrm{Pd}(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$ pourvu que $1 \notin \mathfrak{a}$. Lorsqu'il y a égalité, l'idéal est dit *parfait* (cf. [BH98, definition 1.4.15]).

**Définition 5.1.** *Un idéal de type fini est dit* parfait *si*[4] $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) \geqslant k$ *et* $\mathrm{Pd}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) \leqslant k$ *pour un certain* $k$, *ce que l'on peut abréger en* $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Pd}(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$ *(mais on prendra garde que cette formulation ne prend pas en charge le cas* $1 \in \mathfrak{a}$ *car dans cette situation,* $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) = +\infty$ *alors que* $\mathrm{Pd}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) = -\infty$*).*

Un cas très simple d'idéal parfait est donné par un idéal dont le résiduel est résolu par le complexe de Koszul. Un idéal engendré par une suite régulière (plus généralement par une suite complétement sécante) est donc parfait. Un exemple moins trivial est donné par les idéaux résolus par Hilbert-Burch, *i.e.* par les idéaux de profondeur $\geqslant 2$ engendrés par les mineurs d'ordre $n-1$ d'une matrice $n \times (n-1)$.

## 5.2 Une caractérisation

**Proposition 5.2.** *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal de type fini. On suppose que* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ *admet une résolution libre de longueur* $p$ *donnée par :*

$$0 \longrightarrow L_p \xrightarrow{u_p} L_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{u_1} L_0 \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{A}/\mathfrak{a}$$

*On note* $\mathfrak{D}_p$ *le dernier idéal caractéristique de ce complexe c'est-à-dire* $\mathfrak{D}_p = \mathcal{D}_{r_p}(u_p)$ *avec* $r_p = \mathrm{rg}(L_p)$.
*On a alors l'équivalence*

$$\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) \geqslant p \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{\mathfrak{D}_p} \;=\; \sqrt{\mathfrak{a}}$$

*Si l'une des deux conditions est vérifiée, on a alors* $\mathrm{Pd}(\mathbf{S}/\mathfrak{a}) = p$ *(à moins que* $1 \in \mathfrak{a}$*) et donc l'idéal est parfait.*

***Preuve.*** Seule l'implication $\Rightarrow$ nécessite une explication. Puisque $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) \geqslant p \geqslant 1$, l'idéal $\mathfrak{a}$ est fidèle et donc la caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle, *i.e.* $r_1 = \mathrm{rg}(L_0)$. On va appliquer la proposition 4.6 en montrant que $\sqrt{\mathfrak{D}_1} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. On a $\mathrm{Coker}\, u_1 \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ donc $\mathrm{Ann}(\mathrm{Coker}\, u_1) = \mathfrak{a}$. Comme $r_1 = \mathrm{rg}(L_0)$, le lemme ci-dessous appliqué à $u_1$ dit : « $\mathcal{D}_{r_1}(u_1)$ et $\mathrm{Ann}(\mathrm{Coker}\, u_1)$ ont même racine » ce qui s'écrit $\sqrt{\mathfrak{D}_1} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

> **Lemme.** *Soit* $u : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^n$. *Alors* $\mathcal{D}_n(u) \subset \mathrm{Ann}(\mathrm{Coker}\, u)$ *et* $\mathrm{Ann}(\mathrm{Coker}\, u)^n \subset \mathcal{D}_n(u)$. *Par conséquent, les idéaux* $\mathcal{D}_n(u)$ *et* $\mathrm{Ann}(\mathrm{Coker}\, u)$ *ont même racine.*

4. Si l'idéal contient 1, il est donc parfait pour notre définition.

Pour la première inclusion, on peut supposer $n \leqslant m$, sinon $\mathcal{D}_n(u) = 0$. Soit $\delta$ un mineur de $U$, par exemple $\delta = \det W$ où $W \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ est la matrice carrée s'appuyant sur les $n$ premières colonnes de $U$. Visuellement, $U$ est la matrice de gauche dans le produit ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} W & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{W} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \delta \operatorname{Id}_n$$

Ainsi $\delta \mathbf{A}^n \subset \operatorname{Im} u$, c'est-à-dire $\delta \operatorname{Coker} u = 0$, d'où $\delta \in \operatorname{Ann}(\operatorname{Coker} u)$.

Pour l'autre inclusion, soit $a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\operatorname{Ann}(\operatorname{Coker} u)$. Il existe des vecteurs $v_i \in \mathbf{A}^m$ tels que $a_i e_i = u(v_i)$. Avec des notations évidentes, cela se traduit matriciellement par l'égalité $UV = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$. En prenant le déterminant et en appliquant la formule de Binet-Cauchy (cf. [LQ11, exercice II-25, p. 70]), on obtient $a_1 \cdots a_n \in \mathcal{D}_n(u)$. □

Dans la preuve de la proposition précédente, on a bien mieux que $\sqrt{\mathfrak{D}_1} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ puisqu'en fait $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{a}$. Ceci est dû au fait que $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est un $\mathbf{A}$-module de présentation finie. Pour un tel module $M$, si l'on dispose de deux présentations finies, disons :

$$\mathbf{A}^m \xrightarrow{u} \mathbf{A}^n \twoheadrightarrow M \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A}^p \xrightarrow{v} \mathbf{A}^q \twoheadrightarrow M$$

alors on a $\mathcal{D}_n(u) = \mathcal{D}_q(v)$. C'est d'ailleurs ce qui permet de définir l'idéal de Fitting d'indice 0 de $M$ (cf. [LQ11, Lemme IV-9.2]) noté $\mathcal{F}_0(M)$. L'énoncé précédent peut alors se généraliser comme suit :

**Proposition 5.3.** *Soit $M$ un module admettant une résolution libre de longueur $p$ donnée par :*

$$0 \longrightarrow L_p \xrightarrow{u_p} L_{p-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{u_1} L_0 \twoheadrightarrow M$$

*On note $\mathfrak{D}_p$ le dernier idéal caractéristique de ce complexe c'est-à-dire $\mathfrak{D}_p = \mathcal{D}_{r_p}(u_p)$ avec $r_p = \operatorname{rg}(L_p)$. On a alors l'équivalence*

$$\operatorname{Gr}\big(\mathcal{F}_0(M)\big) \geqslant p \iff \sqrt{\mathfrak{D}_p} = \sqrt{\mathcal{F}_0(M)}$$

Puisque le 0-Fitting annule $M$, le théorème de Rees permet d'obtenir l'inégalité $\operatorname{Gr}\big(\mathcal{F}_0(M)\big) \leqslant \operatorname{Pd}(M)$ à moins que $1 \in \mathcal{F}_0(M)$ c'est-à-dire $M = 0$. Ainsi, si l'une des deux conditions équivalentes de la proposition précédente est vérifiée, on a $\operatorname{Pd}(M) = p$ (à moins que $M = 0$) et le module est parfait. La terminologie d'idéal parfait se généralise à un module : un module est parfait s'il existe un $p$ tel que $\operatorname{Gr}\big(\mathcal{F}_0(M)\big) \geqslant p$ et $\operatorname{Pd}(M) \leqslant p$ (cf. [BH98, definition 1.4.15]).

## 5.3 Lien avec la propriété Cohen-Macaulay

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal *homogène* d'un anneau de polynômes $\mathbf{S} = \mathbf{k}[\underline{X}]$ sur un corps $\mathbf{k}$ de sorte que $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre *graduée* de présentation finie sur un corps. On dit que $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$ est Cohen-Macaulay lorsque la profondeur de l'unique idéal maximal homogène est maximale, *i.e.* $\operatorname{Gr}(\mathbf{S}_+ ; \mathbf{S}/\mathfrak{a}) = \operatorname{Kdim}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})$. Notons que l'on trouve également dans la littérature (cf. [MS05]) la formulation équivalente $\operatorname{Pd}(\mathbf{S}/\mathfrak{a}) = \operatorname{Kdim} \mathbf{S} - \operatorname{Kdim}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})$ pour la propriété Cohen-Macaulay en terrain gradué.

L'idéal $\mathfrak{a}$ est parfait si et seulement si $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$ est Cohen-Macaulay. En effet, on a les égalités (cf. les pages 102 et 134)

$$\operatorname{Kdim} \mathbf{S} = \operatorname{Kdim}(\mathbf{S}/\mathfrak{a}) + \operatorname{Gr}(\mathfrak{a} ; \mathbf{S}) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Gr}(\mathbf{S}_+ ; \mathbf{S}) = \operatorname{Gr}(\mathbf{S}_+ ; \mathbf{S}/\mathfrak{a}) + \operatorname{Pd}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})$$

Ainsi $\operatorname{Gr}(\mathfrak{a}) = \operatorname{Pd}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})$ si et seulement si $\operatorname{Kdim}(\mathbf{S}/\mathfrak{a}) = \operatorname{Gr}(\mathbf{S}_+ ; \mathbf{S}/\mathfrak{a})$.

## 5.4 Des exemples

Dans les exemples ci-dessous, on considère un idéal d'un anneau de polynômes monté sur $\mathbf{k}$. Dans un premier temps, on peut supposer que $\mathbf{k}$ est un corps. Mais on se rend compte que l'on peut tout justifier sans cette hypothèse. Les deux premiers exemples sont des exemples d'idéaux ayant des résolutions « à la Hilbert-Burch » et il est donc clair, en utilisant le critère de Buchsbaum-Eisenbud, que $\mathbf{k}$ corps n'a rien à voir. Pour le dernier exemple, c'est peut-être un peu moins évident.

**L'idéal des 3 points de $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$**

On considère l'idéal $\mathfrak{a} = \langle XY,\, XZ,\, YZ\rangle$ de $\mathbf{S} = \mathbf{k}[X,Y,Z]$ qui code les trois points $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ et $(0:0:1)$ de $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$. On a $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) \geqslant 2$, ce que l'on peut vérifier directement avec le complexe de Koszul. L'idéal est tellement simple qu'on arrive facilement à trouver une suite régulière de longueur 2, par exemple $(XY,\, XZ+YZ)$ est régulière (voir aussi la suite régulière exhibée à partir d'un h.s.o.p. à la page 105). Le système générateur de $\mathfrak{a}$ apparaît comme l'idéal des mineurs pleins de la matrice $3\times 2$ suivante :

$$\begin{bmatrix} -Z & 0 \\ Y & -Y \\ 0 & X \end{bmatrix}$$

On est donc en situation Hilbert-Burch d'où la résolution libre graduée de longueur 2 de $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$ suivante

$$0 \longrightarrow \mathbf{S}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -Z & 0 \\ Y & -Y \\ 0 & X \end{bmatrix}} \mathbf{S}^3 \xrightarrow{[\,XY\ XZ\ YZ\,]} \mathbf{S} \twoheadrightarrow \mathbf{S}/\mathfrak{a}$$

Du point de vue des graduations, cela donne

$$0 \longrightarrow \mathbf{S}(-3)^2 \longrightarrow \mathbf{S}(-2)^3 \longrightarrow \mathbf{S} \twoheadrightarrow \mathbf{S}/\mathfrak{a}$$

La série d'Hilbert-Poincaré de $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$ est donc $\dfrac{1-3t^2+2t^3}{(1-t)^3} = \dfrac{1+2t}{1-t} = 1+3t+3t^2+\cdots$

Le numérateur $1+2t$ indique le degré des générateurs de $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$ en tant que $\mathbf{k}[h]$-module libre de type fini (le côté libre est assuré par le côté Cohen-Macaulay) où $h$ est homogène de degré $>0$. Il n'est pas difficile de voir que l'on peut prendre $h = x+y+z$ et que $(1,x,y)$ est une $\mathbf{k}[h]$-base de $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$ ; cela confirme bien qu'une base est constituée d'un élément de degré 0 et de 2 éléments de degré 1.

**La cubique gauche de $\mathbb{P}^3(\mathbf{k})$**

Considérons la cubique gauche de $\mathbb{P}^3(\mathbf{k})$, c'est-à-dire l'image du morphisme

$$\psi : \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbf{k}), \qquad (u:v) \longmapsto (u^3 : u^2v : uv^2 : v^3)$$

Elle est gouvernée par l'idéal $I$ noyau du morphisme algébrique :

$$\varphi :\ \mathbf{S} = \mathbf{k}[X_0,X_1,X_2,X_3] \longrightarrow \mathbf{k}[U,V], \qquad X_0 \mapsto U^3, \quad X_1 \mapsto U^2V, \quad X_2 \mapsto UV^2, \quad X_3 \mapsto V^3$$

Il s'avère que ce noyau est engendré par les 3 quadriques $Q_1 = X_1X_3 - X_2^2$, $Q_2 = X_1X_2 - X_0X_3$, $Q_3 = X_0X_2 - X_1^2$ qui sont obtenues comme les mineurs pleins de la matrice $3\times 2$ ci-dessous. La suite $(Q_1,Q_3)$ est régulière — les monômes dominants pour l'ordre GRevLex sont $-X_2^3$ et $-X_1^3$ — ainsi $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a}) \geqslant 2$. On est donc en situation Hilbert-Burch, d'où la résolution libre graduée de longueur 2 :

$$0 \longrightarrow \mathbf{S}^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} X_0 & X_1 \\ X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix}} \mathbf{S}^3 \xrightarrow{[\,Q_1\ Q_2\ Q_3\,]} \mathbf{S} \twoheadrightarrow \mathbf{S}/\mathfrak{a}$$

c'est-à-dire du point de vue des graduations $0 \longrightarrow \mathbf{S}(-3)^2 \longrightarrow \mathbf{S}(-2)^3 \longrightarrow \mathbf{S} \twoheadrightarrow \mathbf{S}/\mathfrak{a}$ d'où la série d'Hilbert-Poincaré $\dfrac{1-3t^2+2t^3}{(1-t)^4} = \dfrac{1+2t}{(1-t)^2} = 1+4t+7t^2+10t^3+\cdots = \sum_{d\geqslant 0}(3d+1)t^d$.

**La courbe quartique rationnelle de $\mathbb{P}^3(\mathbf{k})$**

Considérons la courbe rationnelle de degré 4 de $\mathbb{P}^3(\mathbf{k})$ c'est-à-dire l'image du morphisme

$$\psi : \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbf{k}), \qquad (u:v) \longmapsto (u^4 : u^3v : uv^3 : v^4)$$

Du côté de l'algèbre, on considère l'idéal $\mathfrak{a}$ noyau du morphisme

$$\varphi:\ \mathbf{S}=\mathbf{k}[X_0,X_1,X_2,X_3]\longrightarrow \mathbf{k}[U,V],\qquad X_0\mapsto U^4,\quad X_1\mapsto U^3V,\quad X_2\mapsto UV^3,\quad X_3\mapsto V^4$$

On obtient $\mathfrak{a}=\langle X_0^2X_2-X_1^3,\ X_0X_2^2-X_1^2X_3,\ X_1X_3^2-X_2^3,\ X_0X_3-X_1X_2\rangle$.

Dans un premier temps, montrons l'égalité $\mathrm{Pd}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})=3$ sans toucher à la résolution de manière explicite. L'égalité d'Auslander-Buchsbaum dit $4=\mathrm{Gr}(\mathbf{S}_+\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})+\mathrm{Pd}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})$. En notant $\mathbf{B}=\mathbf{S}/\mathfrak{a}$, on a $\mathrm{Gr}(\mathbf{S}_+\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})=\mathrm{Gr}(\mathbf{B}_+\,;\mathbf{B})=\mathrm{Gr}((x_0,x_3)\,;\mathbf{B})$ la dernière égalité étant due à l'égalité suivante $\mathbf{B}_+=\langle x_0,x_1,x_2,x_3\rangle\overset{\circ}{=}\sqrt{\langle x_0,x_3\rangle}$ (dans $\mathbf{B}$, on a $x_1^3=x_0^2x_2$ et $x_2^3=x_1x_3^2$). Maintenant, on vérifie que $x_0$ est régulier (dans $\mathbf{B}$) mais que $x_3$ n'est pas régulier modulo $x_0$ (en effet, on a $x_1^2x_3=x_0x_2^2\in\langle x_0\rangle$, mais il n'est pas difficile de montrer que $x_1^2\notin\langle x_0\rangle$). Par conséquent, on a $\mathrm{Gr}(x_0,x_3)=1$ (en terrain gradué, les notions de suite complétement sécante et de suite régulière coïncident).

Du côté de $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a})$ : il est facile de dénicher une suite régulière de longueur 2 dans $\mathfrak{a}$ toujours en examinant les monômes dominants pour l'ordre GRevLex, par exemple $(X_0^2X_2-X_1^3,\ X_1X_3^3-X_2^3)$. On a donc $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a})\geqslant 2$. Et c'est le mieux que l'on puisse faire. Une façon de le voir est d'utiliser l'inégalité donnée à la proposition VI-3.2 combinée avec le h.s.o.p. exhibé à la page 104.

On a donc ici $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a})<\mathrm{Pd}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})$ de sorte que l'idéal n'est pas parfait.

Pour finir en beauté, montrons la résolution minimale graduée de $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$ :

$$0\longrightarrow \mathbf{S}(-5)\xrightarrow{d_3}\mathbf{S}(-4)^4\xrightarrow{d_2}\mathbf{S}(-3)^3\oplus\mathbf{S}(-2)\xrightarrow{d_1}\mathbf{S}\twoheadrightarrow\mathbf{S}/\mathfrak{a}$$

$$d_1\ =\ \begin{bmatrix}X_1^3-X_0^2X_2 & X_0X_2^2-X_1^2X_3 & X_2^3-X_1X_3^2 & X_1X_2-X_0X_3\end{bmatrix}$$

$$d_2\ =\ \begin{bmatrix}X_2 & X_3 & 0 & 0\\ X_0 & X_1 & X_2 & -X_3\\ 0 & 0 & -X_0 & X_1\\ X_1^2 & X_0X_3 & -X_1X_3 & X_2^2\end{bmatrix}\qquad\text{et}\qquad d_3\ =\ \begin{bmatrix}X_3\\ -X_2\\ X_1\\ X_0\end{bmatrix}$$

Et la série d'Hilbert-Poincaré est $\dfrac{1+2t+2t^2-t^3}{(1-t)^2}$. En utilisant le critère donné à la proposition 5.2, on voit que l'on ne peut pas avoir $\mathrm{Gr}(\mathfrak{a})\geqslant 3$, auquel cas on aurait $\sqrt{\mathfrak{D}_3}=\sqrt{\mathfrak{a}}$, c'est-à-dire $\sqrt{\underline{X}}=\sqrt{\mathfrak{a}}$ ce qui n'est pas.

# 6 Nombre de Betti multi-gradués d'un idéal monomial

## 6.1 La formule de Hochster

Soit $\mathbf{S}=\mathbf{k}[X_1,\ldots,X_n]$ un anneau de polynômes sur un corps $\mathbf{k}$ et $\mathfrak{a}$ un idéal monomial de $\mathbf{S}$. On considère la résolution minimale $\mathbb{N}^n$-graduée de $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$ qui est de la forme (d'après le théorème des Syzygies graduées de Hilbert) :

$$0\longrightarrow L_n\longrightarrow\ \cdots\ \longrightarrow L_1\longrightarrow L_0\longrightarrow\mathbf{S}/\mathfrak{a}$$

avec

$$L_i\ =\ \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\mathbf{S}(-\alpha)^{\beta_{i,\alpha}}$$

La formule de Hochster permet d'obtenir les nombres de Betti gradués $\beta_{i,\alpha}$ en fonction de la topologie d'un certain complexe simplicial dépendant de $\mathfrak{a}$ et $\alpha$ :

$$\beta_{i,\alpha}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})\ =\ \dim_{\mathbf{k}}\widetilde{\mathrm{H}}^{|\operatorname{supp}(\alpha)|-i-1}\big(\mathcal{K}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha\,;\mathbf{k}\big)$$

où $\mathcal{K}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha=\{J\subset\operatorname{supp}(\alpha)\mid X^{\alpha-\operatorname{supp}(\alpha)}X^J\notin\mathfrak{a}\}$. Ce complexe simplicial est appelé *lower Koszul simplicial complex* chez Miller & Sturmfels qui notent $\mathcal{K}_\alpha(\mathfrak{a})$ ce complexe (cf. [MS05, definition 5.9]). L'adjectif *lower* pour signifier qu'il s'agit des nombres des Betti du résiduel et non de l'idéal, ce qui explique notre notation. Il existe également une formule donnant les nombres de Betti de l'idéal (et

non du résiduel) en faisant apparaître un autre complexe simplicial *the upper Koszul simplicial complex*, noté $\mathcal{K}^\alpha(\mathfrak{a})$ dans [MS05, definition 1.33] et qu'il serait peut-être plus pertinent de noter $\mathcal{K}(\mathfrak{a})_\alpha$. La différence entre les nombres de Betti de l'idéal et du résiduel est mince puisque $\beta_{i,\alpha}(\mathfrak{a}) = \beta_{i+1,\alpha}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})$. Pour être tout à fait complets, citons la formule de Hochster avec le upper Koszul simplicial complex :

$$\beta_{i,\alpha}(\mathfrak{a}) \;=\; \dim_{\mathbf{k}} \widetilde{\mathrm{H}}_{i-1}\big(\mathcal{K}(\mathfrak{a})_\alpha\,;\mathbf{k}\big)$$

Cette formule est la duale de celle donnée ci-dessus dans le sens où les complexes simpliciaux de Koszul lower et upper sont Alexander-duals l'un de l'autre.

La formule de Hochster va être obtenue via le double visage du $\mathbf{S}$-module gradué $\mathrm{Tor}_i^{\mathbf{S}}(\mathbf{S}/\mathfrak{a},\,\mathbf{k})$ où $\mathbf{k} \simeq \mathbf{S}/\langle \underline{X}\rangle$. D'un côté, on tensorise par $\mathbf{k}$ la résolution minimale graduée $L_\bullet$ de $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$, on en prend l'homologie puis la composante homogène de degré $\alpha$. D'un autre côté, on tensorise par $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$ la résolution minimale graduée de $\mathbf{k}$, résolution donnée par le complexe de Koszul $\mathrm{K}_\bullet(\underline{X}\,;\mathbf{S})$. On obtient alors le complexe $\mathrm{K}_\bullet(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})$ dont on prend la composante homogène de degré $\alpha$ puis on identifie ce complexe de $\mathbf{k}$-espaces vectoriels avec le complexe de cochaînes augmenté (ou réduit) $\widetilde{\mathcal{C}}^\bullet\big(\mathcal{K}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha\,;\mathbf{k}\big)$. Cette identification n'utilise pas le fait que $\mathbf{k}$ est un corps.

***Preuve de la formule de Hochster.*** D'un côté, on considère le complexe $L_\bullet \otimes_{\mathbf{S}} \mathbf{k}$, donné par la réduction de $L_\bullet$ modulo $\underline{X}$ :

$$0 \longrightarrow L_n/\underline{X}L_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1/\underline{X}L_1 \longrightarrow L_0/\underline{X}L_0 \longrightarrow 0$$

Comme $L_\bullet$ est minimale, les différentielles ci-dessus sont nulles, donc l'homologie de ce complexe est réduite à ces termes. Autrement dit $\mathrm{H}_i(L_\bullet \otimes_{\mathbf{S}} \mathbf{k}) = L_i/\underline{X}L_i$. Il s'agit du $\mathbf{S}$-module gradué $\bigoplus_\alpha \mathbf{k}(-\alpha)^{\beta_{i,\alpha}}$. La composante homogène de degré $\alpha$ de ce dernier module est donnée par $\mathbf{k}^{\beta_{i,\alpha}}$ qui est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension $\beta_{i,\alpha}$.

De l'autre côté, on considère le complexe gradué $\mathbf{S}/\mathfrak{a} \otimes \mathrm{K}_\bullet(\underline{X}\,;\mathbf{S}) = \mathrm{K}_\bullet(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})$. Quelle graduation imposer sur le complexe $\mathrm{K}_\bullet(\underline{X}\,;\mathbf{S})$ pour qu'il devienne une résolution graduée de $\mathbf{S}/\langle\underline{X}\rangle$ ? Réponse : $\deg(e_I) = X^I := \prod_{i\in I} X_i$. La composante homogène de degré $\alpha$ de $\mathrm{K}_i(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})$ est alors donnée par

$$\mathrm{K}_i(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha \;=\; \bigoplus_{\#I=i} \mathbf{k}\,\frac{X^\alpha}{X^I}\,e_I \qquad \text{avec } I\subset \mathrm{supp}(\alpha) \text{ telle que } \frac{X^\alpha}{X^I}\notin \mathfrak{a}$$

Une petite explication : le quotient est exact car $I \subset \mathrm{supp}(\alpha)$ et le tout, *i.e.* $(X^\alpha/X^I)\,e_I$, est bien de degré $\alpha$ car $\deg(e_I) = X^I$ ; la clause $X^\alpha/X^I \notin \mathfrak{a}$ est liée au fait qu'une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$ est constituée des monômes $X^\beta$ avec $X^\beta \notin \mathfrak{a}$.

Il se trouve que les parties $I$ intervenant dans la somme ne forment pas un complexe simplicial. Pour faire apparaître un complexe simplicial, on paramètre la base non pas par les parties $I \subset \mathrm{supp}(\alpha)$ mais par les parties $J = \mathrm{supp}(\alpha)\setminus I$. Ces parties $J$ forment le complexe simplicial

$$\mathcal{K}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha \;=\; \{J\subset \mathrm{supp}(\alpha) \mid X^{\alpha-\mathrm{supp}(\alpha)}X^J \notin \mathfrak{a}\}$$

Il s'agit maintenant d'expliciter un isomorphisme entre les complexes de $\mathbf{k}$-espaces vectoriels $\mathrm{K}_\bullet(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha$ et le complexe de cochaînes $\widetilde{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{K}\,;\mathbf{k})$ associé au complexe simplicial $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha$ (en anglais augmented oriented cochain complex). On va profiter de la correspondance biunivoque $I \leftrightsquigarrow J$ où $I$ est une partie indexant la $\mathbf{k}$-base de $\mathrm{K}_i(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha$ ci-dessus et $J$ une face de $\mathcal{K}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha$. Par ailleurs, pour l'indexation des termes, il faut noter que si $\#I = i$ alors $\#J = |\,\mathrm{supp}(\alpha)| - i$ donc la dimension de la face $J$ est $|\,\mathrm{supp}(\alpha)| - i - 1$. L'objectif est donc de fournir un isomorphisme entre $\mathrm{K}_i(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha$ et $\widetilde{\mathcal{C}}^{\,|\,\mathrm{supp}(\alpha)|-i-1}(\mathcal{K}\,;\mathbf{k})$ de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{K}_i(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha & \longrightarrow & \mathrm{K}_{i-1}(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha \\
\downarrow & & \downarrow \\
\widetilde{\mathcal{C}}^{\,|\,\mathrm{supp}(\alpha)|-i-1}(\mathcal{K}\,;\mathbf{k}) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{C}}^{\,|\,\mathrm{supp}(\alpha)|-i}(\mathcal{K}\,;\mathbf{k})
\end{array}$$

où la flèche horizontale du haut est la différentielle du complexe de Koszul descendant de $x = \sum X_i e_i$ *i.e.* $\bullet \llcorner x$ et la flèche horizontale du bas est donnée par « un morceau de $s \wedge \bullet$ » où $s = \sum_{v \in \mathrm{supp}(\alpha)} \varepsilon_v^\star$. Plus précisément, l'image de $\varepsilon_J^\star$ est $\sum_{v|J \vee v \in \mathcal{K}} \varepsilon_v^\star \wedge \varepsilon_J^\star$. En quelque sorte, il s'agit de comparer un complexe de Koszul descendant à un complexe montant qui est du type « complexe de Koszul sans scalaire », ou plutôt avec des scalaires égaux à 1. Interviennent alors les ingrédients ayant permis d'établir la self-dualité du complexe de Koszul (cf. chapitre I-2.2). On propose donc le morphisme

$$\mathrm{K}_i(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}^{|\,\mathrm{supp}(\alpha)|-i-1}(\mathcal{K}\,;\mathbf{k}) \qquad \frac{X^\alpha}{X^I}\, e_I \longmapsto (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\, \varepsilon^\star_{\mathrm{supp}(\alpha)} \llcorner \varepsilon_I^\star$$

dont l'inverse est donné par :

$$(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\, X^{\alpha-\mathrm{supp}(\alpha)} X^J\, e_J \lrcorner e_{\mathrm{supp}(\alpha)} \longmapsto \varepsilon_J^\star$$

On récupère donc un isomorphisme au niveau de l'homologie :

$$\mathrm{H}_i(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha \simeq \widetilde{\mathrm{H}}^{|\,\mathrm{supp}(\alpha)|-i-1}\big(\mathcal{K}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha\,;\mathbf{k}\big)$$

En rassemblant les deux aspects du Tor, on obtient donc l'égalité tant attendue :

$$\beta_{i,\alpha} = \dim_{\mathbf{k}} \widetilde{\mathrm{H}}^{|\,\mathrm{supp}(\alpha)|-i-1}\big(\mathcal{K}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha\,;\mathbf{k}\big)$$

□

**Remarque.** On peut faire intervenir le complexe de Koszul montant de $\underline{X}$ plutôt que le descendant. Bien sûr, il faut le graduer correctement pour qu'il devienne une résolution graduée de $\mathbf{S}/\langle\underline{X}\rangle$. Pour cela, il faut imposer $\deg(e_I^\star) = X^{\overline{I}}$. La composante homogène de degré $\alpha$ du terme $\mathrm{K}^{n-i}(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})$ (attention à l'indice $n-i$ versus le degré homologique $i$ de la résolution) est donnée par la $\mathbf{k}$-base suivante :

$$\mathrm{K}^{n-i}(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha = \bigoplus_{\#I=n-i} \mathbf{k}\, \frac{X^\alpha}{X^{\overline{I}}}\, e_I^\star \qquad \text{avec } \overline{I} \subset \mathrm{supp}(\alpha) \text{ telle que } \frac{X^\alpha}{X^{\overline{I}}} \notin \mathfrak{a}$$

On fait intervenir le complexe simplicial $\mathcal{K}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha$ avec le paramétrage suivant : à une partie $I$ de cardinal $n-i$, on lui associe la partie $J = \mathrm{supp}(\alpha) \setminus \overline{I}$ de cardinal $|\,\mathrm{supp}(\alpha)| - i$.

On propose alors la flèche

$$\mathrm{K}^{n-i}(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha \longleftarrow \widetilde{\mathcal{C}}^{|\,\mathrm{supp}(\alpha)|-i-1}(\mathcal{K}\,;\mathbf{k}) \qquad \frac{X^\alpha}{X^{\overline{I}}}\, e_J^\star \wedge e^\star_{\mathrm{supp}(\alpha)} \longmapsto \varepsilon_J^\star$$

où $I = J \vee \mathrm{supp}(\alpha)$ *i.e.* $\overline{I} = \mathrm{supp}(\alpha) \setminus J$. Cette flèche est bien un isomorphisme entre les complexes de $\mathbf{k}$-espaces vectoriels $\widetilde{\mathcal{C}}^{|\,\mathrm{supp}(\alpha)|-\bullet-1}(\mathcal{K}\,;\mathbf{k})$ et $\mathrm{K}^{n-\bullet}(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha$ de sorte que l'on a

$$\mathrm{H}^{n-i}(\underline{X}\,;\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha \simeq \widetilde{\mathrm{H}}^{|\,\mathrm{supp}(\alpha)|-i-1}(\mathcal{K}\,;\mathbf{k})$$

## 6.2 Le cas d'un idéal monomial radical

Supposons l'idéal $\mathfrak{a}$ radical et notons $\Delta$ son complexe simplicial de Stanley-Reisner. Pour $\alpha$ squarefree (autrement dit $X^\alpha$ squarefree), on a $\alpha = \mathrm{supp}(\alpha)$ et la condition sur $J$ se réduit à $J \subset \mathrm{supp}(\alpha)$ et $J \in \Delta$. Dans ce cas, le complexe simplicial $\mathcal{K}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha$ est alors la restriction de $\Delta$ à $\mathrm{supp}(\alpha)$, complexe souvent noté $\Delta_{|\,\mathrm{supp}(\alpha)}$.

Pour $\alpha$ non squarefree, le complexe simplicial $\mathcal{K}(\mathbf{S}/\mathfrak{a})_\alpha$ est un cône de sorte que son homologie est triviale. La formule de Hochster entraîne alors que, pour un idéal radical, les nombres de Betti multi-gradués sont des monômes nécessairement squarefree. Justifications pour le cône : pour toute composante $i$ telle

que $\alpha_i \geqslant 2$, le complexe simplicial $\mathcal{K}$ est un cône de sommet $i$, autrement dit $J \in \mathcal{K} \Rightarrow J \cup \{i\} \in \mathcal{K}$. En effet, c'est évident si $i \in J$ et si $i \notin J$, on peut écrire (en utilisant que $\alpha_i \geqslant 2$) :

$$X^{\alpha-\mathrm{supp}(\alpha)}X^J \;=\; X_iX^\beta, \qquad\qquad X^{\alpha-\mathrm{supp}(\alpha)}X^{J\cup\{i\}} \;=\; X_i^2X^\beta$$

Puisque $\mathfrak{a}$ est radical, si le premier monôme n'est pas dans $\mathfrak{a}$, le second non plus.

Pour $\mathfrak{a}$ radical de complexe simplicial de Stanley-Reisner $\Delta$ et $\alpha$ squarefree, la formule de Hochster s'écrit

$$\beta_{i,\alpha} \;=\; \dim_{\mathbf{k}} \widetilde{\mathrm{H}}^{|\alpha|-i-1}(\Delta_{|\alpha}\,;\mathbf{k})$$

où $\Delta_{|\alpha} = \{\tau \in \Delta \mid \tau \subset \alpha\}$. Ici, on s'est permis de confondre un vecteur $\alpha \in \mathbb{N}^n$ squarefree *i.e.* $\alpha \in \{0,1\}^n$ (ce qui équivaut à $X^\alpha$ squarefree) avec son support, qui est une partie de $\{1,\dots,n\}$. On abusera de cette identification dans la suite. Pour un $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il nous paraît plus parlant de voir $\alpha = \emptyset$ plutôt que $|\alpha| = 0$.

Enfin, donnons la formule de Hochster pour la graduation usuelle, à savoir $\deg(X_i) = 1$ :

$$\beta_{i,j} \;=\; \sum_{|\alpha|=j} \dim_{\mathbf{k}} \widetilde{\mathrm{H}}^{j-i-1}(\Delta_{|\alpha}\,;\mathbf{k})$$

## 6.3 L'exemple des $n+1$ points de $\mathbb{P}^n(\mathbf{k})$

Soit $\mathbf{S} = \mathbf{k}[X_0,\dots,X_n]$. On considère l'idéal monomial radical $\mathfrak{a} = \langle X_iX_j \mid 0 \leqslant i < j \leqslant n\rangle$ des $n+1$ points de $\mathbb{P}^n(\mathbf{k})$ du type $(0 : \dots : 1 : \dots : 0)$. Le complexe simplicial de Stanley-Reisner $\Delta$ associé à $\mathfrak{a}$ est constitué de $n+1$ points isolés. Grâce à la formule de Hochster, on montre que les nombres de Betti multi-gradués de $\mathbf{S}/\mathfrak{a}$ sont donnés par :

$$\text{pour } i \geqslant 1, \qquad \beta_{i,\alpha} \;=\; \begin{cases} i & \text{si } |\alpha| = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \beta_{0,\alpha} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quant à la graduation usuelle (il y a $\binom{n+1}{i+1}$ monômes *squarefree* de degré $i+1$ en $n+1$ variables) :

$$\text{pour } i \geqslant 1, \quad \beta_{i,i+1} \;=\; i\binom{n+1}{i+1} \qquad \text{et} \qquad \beta_{0,0} \;=\; 1$$

En particulier, la résolution est pure, linéaire et de longueur $n$.

Allons-y pour la preuve. La formule de Hochster fait intervenir $\Delta_{|\alpha}$ qui est donc un complexe simplicial réduit à $|\alpha|$ points isolés. Le complexe de cochaînes réduit associé à ce complexe simplicial est

$$0 \to \mathbf{k} \to 0 \qquad \text{si } |\alpha| = 0 \text{ } \textit{i.e.} \text{ si } \Delta_{|\alpha} \text{ est l'}\textit{irrelevant complex } \{\emptyset\}$$

$$0 \to \mathbf{k} \to \mathbf{k}^{|\alpha|} \to 0 \qquad \text{si } |\alpha| > 0$$

▷ Si $|\alpha| = 0$, il n'y a de la cohomologie qu'en degré $-1$ (qui est égale à $\mathbf{k}$). On a $|\alpha| - i - 1 = -1 \Leftrightarrow i = 0$. On en déduit que $\beta_{0,\emptyset} = 1$ et $\beta_{i,\emptyset} = 0$ pour $i \geqslant 1$.
▷ Si $|\alpha| > 0$, la cohomologie a lieu en degré 0 et vaut $\mathbf{k}^{|\alpha|-1}$. On a $|\alpha| - i - 1 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = i+1$. Ainsi $\beta_{i,\alpha}$ vaut $|\alpha| - 1 = i$ si $|\alpha| = i+1$ et est nul sinon.

**Avec $n = 2$ et $n = 3$**

Pour les 3 points de $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, en notant $\mathbf{S} = \mathbf{k}[X,Y,Z]$, on a :

$$0 \longrightarrow \mathbf{S}(-XYZ)^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} -Z & 0 \\ Y & -Y \\ 0 & X \end{bmatrix}} \begin{matrix} \mathbf{S}(-XY) \\ \oplus \\ \mathbf{S}(-XZ) \\ \oplus \\ \mathbf{S}(-YZ) \end{matrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} XY & XZ & YZ \end{bmatrix}} \mathbf{S} \twoheadrightarrow \mathbf{S}/\mathfrak{a}$$

Il faut prendre garde à la notation $\mathbf{S}(-XY)$ qui hésite entre multiplicatif et additif : il s'agit de $\mathbf{S}(-\alpha)$ avec $\alpha = (1,1,0) \rightsquigarrow XY$.

Pour les 4 points de $\mathbb{P}^3(\mathbf{k})$, donnons juste l'allure de la résolution pour la graduation usuelle

$$0 \longrightarrow \mathbf{S}(-4)^3 \longrightarrow \mathbf{S}(-3)^8 \longrightarrow \mathbf{S}(-2)^6 \longrightarrow \mathbf{S} \twoheadrightarrow \mathbf{S}/\mathfrak{a}$$

## 6.4 L'idéal squarefree de Veronese $\mathcal{J}_k$

Pour $k \in \mathbb{N}$, nous notons ici $\mathcal{J}_k$ l'idéal monomial de $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ engendré par les monômes squarefree de degré $k$ :

$$\mathcal{J}_k \;=\; \langle X^I \mid \#I = k \rangle \qquad \text{où } X^I = X_{i_1} \cdots X_{i_k} \text{ pour } I = \{i_1, \dots, i_k\}$$

Nous l'avons déja étudié, sous le nom de $\mathfrak{I}_{n,k}$, à la page 103 en fournissant un h.s.o.p. Ce qui vient généralise le résultat de la section précédente consacrée à $\mathfrak{I}_{n+1,2}$.

Note : pour $k = 0$, on a $\mathcal{J}_0 = \mathbf{k}[\underline{X}]$ et pour $k \geqslant n+1$, l'idéal $\mathcal{J}_k$ est nul (donc l'étude qui suit présente peu d'intérêt). Le complexe de Stanley-Reisner $\Delta_k$ de $\mathcal{J}_k$ est le $(k-2)$-squelette du $n-1$ simplexe, *i.e.*

$$\Delta_k \;=\; \big\{ I \subset \{1, \dots, n\} \mid \#I \leqslant k-1 \big\}$$

Rappelons la formule de Hochster pour les idéaux monomiaux radicaux

$$\beta_{i,\alpha} \;=\; \dim_{\mathbf{k}} \widetilde{\mathrm{H}}^{|\alpha|-i-1}\big(\Delta_{k|\alpha}\,;\mathbf{k}\big)$$

dans laquelle intervient le complexe simplicial $\Delta_{k|\alpha} = \big\{ I \subset \mathrm{supp}(\alpha) \mid \#I \leqslant k-1 \big\}$.

Considérons $\widetilde{\mathcal{C}}^\bullet = \widetilde{\mathcal{C}}^\bullet(\Delta_{k|\alpha}\,;\mathbf{k})$ où $\alpha$ est un vecteur squarefree, *i.e.* $\alpha \in \{0,1\}^n$.

Si $|\alpha| = 0$, alors il s'agit de

$$\begin{array}{lcccc} \widetilde{\mathcal{C}} & 0 & \longrightarrow \mathbf{k} & \longrightarrow & 0 \\ \deg & & -1 & & \end{array}$$

dont la cohomologie en degré $-1$ vaut $\mathbf{k}$ et est nulle pour les autres degrés. On a $|\alpha| - i - 1 = -1 \Leftrightarrow i = 0$. On en déduit que $\beta_{0,\emptyset} = 1$ et $\beta_{i,\emptyset} = 0$ pour $i \geqslant 1$.

Si $|\alpha| > 0$, alors le complexe $\widetilde{\mathcal{C}}$ est constitué des $k$ premiers termes du complexe de Koszul montant de la suite $(1, \dots, 1)$ de longueur $|\alpha|$ :

$$\begin{array}{lccccccc} \widetilde{\mathcal{C}} & 0 & \longrightarrow \mathbf{k} & \longrightarrow \mathbf{k}^{|\alpha|} & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{\delta_{k-1}} \mathbf{k}^{\binom{|\alpha|}{k-1}} & \longrightarrow 0 \\ \deg & & -1 & 0 & & & k-2 & \end{array}$$

Comme le complexe de Koszul d'une suite unimodulaire est acyclique, le complexe $\widetilde{\mathcal{C}}$ ci-dessus a de la cohomologie uniquement en degré $k-2$ et cette cohomologie est donnée par $\mathrm{K}_{k-1}/\operatorname{Im}\delta_{k-1} = \operatorname{Im}\delta_k$ où $\mathrm{K}_{k-1} = \mathbf{k}^{\binom{|\alpha|}{k-1}}$. Sa dimension en tant que $\mathbf{k}$-espace vectoriel est $\mathrm{rg}(\delta_k) = \mathrm{rg}(\partial_k)$ — car $\delta_k = {}^{\mathrm{t}}\partial_k$ — qui vaut $r_k = \binom{|\alpha|-1}{k-1}$ (d'après la section I-3.1).

On a $|\alpha| - i - 1 = k - 2 \Leftrightarrow |\alpha| = i + k - 1$. On en déduit que $\beta_{i,\alpha}$ vaut $\binom{|\alpha|-1}{k-1}$ si $|\alpha| = i + k - 1$ et est nul sinon. Ce que l'on peut encore écrire

$$\beta_{i,\alpha} \;=\; \begin{cases} \binom{i+k-2}{k-1} & \text{si } |\alpha| = i+k-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Au passage, comme $\alpha$ est dans $\{0,1\}^n$, on voit que $\beta_{i,\alpha}$ est nul pour $i > n - k + 1$.

On vient donc de prouver :

**Proposition 6.1.** *Les nombres de Betti multi-gradués de $\mathbf{S}/\mathcal{J}_k$ sont donnés par :*

$$\textit{pour } i \geqslant 1, \qquad \beta_{i,\alpha} \;=\; \begin{cases} \binom{i+k-2}{k-1} & \textit{si } |\alpha| = i+k-1 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \qquad \textit{et} \qquad \beta_{0,\alpha} \;=\; \begin{cases} 1 & \textit{si } \alpha = \emptyset \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

*et pour la graduation usuelle, les nombres de Betti sont :*

$$\textit{pour } i \geqslant 1, \quad \beta_{i,\,i+k-1} \;=\; \binom{n}{i+k-1}\binom{i+k-2}{k-1} \qquad \textit{et} \qquad \beta_{0,0} \;=\; 1$$

*En particulier, pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, on a $\mathrm{Pd}(\mathbf{S}/\mathcal{J}_k) = n - k + 1$.*

# Chapitre VIII

# La construction de Tate dans le cas d'une hypersurface

## 0 Présentation de la problématique

Dans son article *Homology of noetherian rings and local rings*, Tate fournit un processus permettant, dans un complexe de modules de « tuer un cycle ». C'est le fameux « process of adjoining a variable in order to kill a cycle ». Plus précisément, étant données deux suites régulières $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ et $\underline{F} = (F_1, \ldots, F_c)$ d'un anneau noethérien $S$ avec $F_i \in \langle \underline{X} \rangle$ pour tout $i$, le processus de Tate permet d'obtenir une résolution libre infinie du $B$-module $B/\langle \underline{x} \rangle$ où $B = S/\langle F_1, \ldots, F_c \rangle$ et $\underline{x}$ désigne l'image de la suite $\underline{X}$ dans le quotient (cf. [Tat57, théorème 4]). La résolution est difficilement perceptible puisque la procédure est récursive.

En voulant expliciter cette résolution dans le cas d'une hypersurface *i.e.* $c = 1$, on constate rapidement que l'hypothèse noethérienne n'a rien à voir dans l'histoire. Par ailleurs, on peut remplacer l'hypothèse « suite régulière » par « suite complètement sécante ». Enfin, et surtout, on comprend que la construction de Tate donne lieu, en fait, à un « complexe » de modules libres valable sur tout anneau commutatif $\mathbf{A}$ pourvu que deux suites de $\mathbf{A}$ de même longueur $\underline{x}$ et $\underline{u}$ aient été fixées (en fait, c'est un complexe uniquement sur le quotient de $\mathbf{A}$ par le produit scalaire des deux suites).

Dans ce chapitre, nous revisitons donc la construction de Tate dans le cas particulier $c = 1$ en commençant par définir ce « complexe » de $\mathbf{A}$-modules. Il s'agit d'un complexe de $\mathbf{A}$-modules libres infini et ultimement 2-périodique. Toute la force de cette construction repose sur le fait qu'aucune hypothèse n'est requise. En un certain sens, la construction de Tate est symbolique. Par ailleurs, elle permet de résoudre des problèmes de nature relativement différente :

— elle génère de manière systématique des factorisations matricielles de polynômes du type $F = \sum_{i=1}^{n} X_i U_i(\underline{X}) \in \mathbf{S} = \mathbf{k}[\underline{X}]$. Cela s'applique en particulier à des polynômes *homogènes* et permet d'obtenir une factorisation matricielle à coefficients dans $\mathbf{S}_+$. On peut par exemple répondre au petit problème élémentaire suivant :

> *Expliciter deux matrices carrées $A$ et $B$ à coefficients dans $\mathbf{S}_+$ telles que $AB = F\,\mathrm{I}_n$ avec $F = X^2 + Y^2 + Z^2 \in \mathbf{S} = \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ ?*

— elle fournit une résolution de l'idéal d'un point d'une hypersurface, qui est libre infinie « minimale » si le point est absolument singulier, et projective finie si le point est lisse. Tout ceci a lieu sur l'anneau de l'hypersurface et non pas sur le localisé en l'idéal du point [1] comme l'énoncent les théorèmes noethériens de mathématiques classiques. On s'éloigne donc à double titre de la théorie classique : d'une part, on obtient une résolution *sur l'anneau de la variété* et d'autre part, l'anneau de base des coefficients $\mathbf{k}$ n'a pas à être un corps (souvent algébriquement clos dans les ouvrages de Géométrie Algébrique).

1. Cette formulation n'est pas correcte, car on sait bien que le localisé d'un anneau en un idéal n'a de sens que lorsque l'idéal est premier : ici il faut bien sûr comprendre que l'on parle du localisé en le monoïde $1 + \mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ est l'idéal du point. Ce monoïde a même saturé que le monoïde $\mathbf{B} \setminus \mathfrak{m}$ lorsque $\mathfrak{m}$ est maximal, *i.e.* lorsque $\mathbf{k}$ est un corps.

**Résolution de l'idéal d'un point d'une courbe plane**

Prenons l'exemple d'un point d'une courbe plane dont la $\mathbf{k}$-algèbre des coordonnées affines est $\mathbf{B} = \mathbf{k}[X,Y]/\langle F\rangle$. Pour simplifier l'exposé, supposons que le point est l'origine et écrivons $F = UX + VY$. Enfin, notons $\mathfrak{m} = \langle x, y\rangle$ l'idéal du point. L'anneau de base $\mathbf{k}$ est quelconque mais on demande à ce que $F$ soit non-diviseur de zéro.

Si le point est lisse (les dérivées partielles en ce point sont comaximales), alors l'idéal $\mathfrak{m}$ est inversible donc en particulier c'est un $\mathbf{B}$-module projectif de rang 1 (qui est même isomorphe à un facteur direct dans $\mathbf{B}^2$). Cela conduit à la résolution projective de $\mathbf{B}/\mathfrak{m}$ suivante :

$$(\star) \qquad 0 \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow \mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{B}/\mathfrak{m}$$

Notons d'ores et déjà que cette résolution du résiduel $\mathbf{B}/\mathfrak{m} \simeq \mathbf{k}$ est de longueur 1, ce qui est à rapprocher de la dimension géométrique d'une courbe.

On peut examiner le cas extrême opposé, qui est celui d'un point absolument singulier (les dérivées partielles en ce point sont nulles). Il n'est pas difficile de montrer que la résolution de $\mathbf{B}/\mathfrak{m}$ en tant que $\mathbf{B}$-module est donnée par :

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{B}^2 \xrightarrow{\overline{A}} \mathbf{B}^2 \xrightarrow{\overline{B}} \mathbf{B}^2 \xrightarrow{\overline{A}} \mathbf{B}^2 \xrightarrow{[x\ y]} \mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{B}/\mathfrak{m}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} -Y & U \\ X & V \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} -V & U \\ X & Y \end{bmatrix} = -\widetilde{A}$$

C'est une résolution libre infinie 2-périodique. L'exactitude repose sur le fait que $F$, qui est le déterminant de $A$ au signe près, est un élément régulier. Le fait que le point soit supposé absolument singulier assure que la résolution ci-dessus est minimale dans le sens où les matrices sont à coefficients dans le radical de Jacobson de l'anneau $(1+\mathfrak{m})^{-1}\mathbf{B}$.

Ré-examinons à présent le cas où le point est lisse. Comme on sait que $\mathbf{B}/\mathfrak{m}$ admet une résolution projective de longueur 1 (grâce au fait que $\mathfrak{m}$ est inversible), le lemme de Schanuel généralisé permet de stopper la résolution libre infinie en une résolution projective finie de longueur 1. Plus précisément, en notant $M$ la matrice qui intervient au début de la résolution, le lemme de Schanuel implique que $\operatorname{Coker} M$ est un module projectif donc cette matrice $M$ est localement simple (cf. [LQ11, Théorème V-2.3]).

$$\mathbf{B}^2 \xrightarrow{M} \mathbf{B}^2 \xrightarrow{[x\ y]} \mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{B}/\mathfrak{m} \qquad \text{où} \quad M = \begin{bmatrix} -y & u \\ x & v \end{bmatrix}$$

On peut retrouver cette information sur $M$ de manière directe. En utilisant l'hypothèse de lissité du point, on montre que la matrice $M$ est de rang constant ! Tout d'abord, remarquons que $\mathcal{D}_1(M) = \langle x, y, u, v\rangle$ et que $\mathcal{D}_2(M) = 0$ (car $\det M = -(ux+vy)$). Par ailleurs, on sait que les évaluations des dérivées partielles en l'origine sont deux scalaires qui sont dans $\langle x, y, u, v\rangle$. Le point étant supposé lisse, on en déduit que $1 \in \mathcal{D}_1(M)$. Par conséquent, la matrice $M$ est de rang 1 donc $\operatorname{Coker} M$ est un module projectif de type fini. Cela se répercute sur $\mathfrak{m}$ puisque $\operatorname{Coker} M$ est isomorphe à $\operatorname{Im}[x\ \ y] = \mathfrak{m}$ : on retrouve que $\mathfrak{m}$ est un module projectif de rang 1 et que la résolution projective de $\mathbf{B}/\mathfrak{m}$ est bien donnée par la suite $(\star)$.

**L'homologie du complexe de Koszul de $\underline{x}$ sur $\mathbf{B}$**

Dans l'exemple ci-dessus de la courbe plane, la construction de Tate apparaît naturellement car $n$ vaut 2. La construction pour $n$ quelconque n'est pas immédiate mais on peut déterminer à la main le premier module des syzygies de $\underline{x}$. Il faut d'abord comprendre que le complexe de Koszul de $\underline{x}$ sur $\mathbf{B}$ n'est pas exact en degré 1 et que l'obstruction se situe uniquement en degré 1 : en effet, on a $\mathrm{H}_i(\underline{x}\,;\mathbf{B}) = 0$ pour tout $i \geqslant 2$. Autrement dit, le complexe de Koszul de $\underline{x}$ sur $\mathbf{B}$ est *presque* une résolution de $\mathbf{B}/\mathfrak{m}$. Toute la difficulté réside dans ce « presque » ! Cette phrase informelle est en fait mesurée par l'inégalité rigoureuse $\mathrm{Gr}(\mathfrak{m}\,;\mathbf{B}) \geqslant n-1$.

Les lignes qui suivent sont écrites dans un style volontairement naïf. L'objectif étant d'apporter des précisions sur l'adverbe « presque » ci-dessus. On n'hésitera pas à répéter plusieurs fois la même chose

de façon à multiplier les points de vue. Restons dans le contexte polynomial[2] où les notations sont très claires : $\mathbf{S}=\mathbf{k}[\underline{X}]$ et $\mathbf{B}=\mathbf{S}/\langle F\rangle=\mathbf{k}[\underline{x}]$ avec $F=\sum_{i=1}^n X_iU_i(\underline{X})$ supposé non diviseur de zéro.

⋆ Le complexe de Koszul de $\underline{x}$ sur $\mathbf{B}$ a une homologie triviale en degrés $\geqslant 2$. On peut obtenir ce résultat en déroulant la longue suite exacte en homologie Koszul induite par la suite exacte courte de $\mathbf{S}$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathbf{S} \xrightarrow{\times F} \mathbf{S} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{B} \longrightarrow 0$$

Voici la longue suite en question

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_i(\underline{X};\mathbf{S}) \longrightarrow \mathrm{H}_i(\underline{X};\mathbf{S}) \longrightarrow \mathrm{H}_i(\underline{X};\mathbf{B}) \longrightarrow \mathrm{H}_{i-1}(\underline{X};\mathbf{S}) \longrightarrow \mathrm{H}_{i-1}(\underline{X};\mathbf{S}) \longrightarrow \mathrm{H}_{i-1}(\underline{X};\mathbf{B}) \longrightarrow \cdots$$

Comme $\mathrm{H}_k(\underline{X};\mathbf{S})=0$ pour tout $k\geqslant 1$ (la suite $\underline{X}$ est complètement sécante !), on obtient $\mathrm{H}_i(\underline{x};\mathbf{B})=0$ pour tout $i\geqslant 2$.

⋆ Dans le complexe de Koszul $\mathrm{K}_\bullet(\underline{x};\mathbf{B})$, le vecteur $\underline{u}\in\mathbf{B}^n$ est un cycle sans être un bord. Si c'était le cas, en remontant le tout dans $\mathbf{S}$, on aurait $\underline{U}=\partial_2(w)+F.z$ pour un certain $w\in\bigwedge^2(\mathbf{S}^n)$ et $z\in\bigwedge^1(\mathbf{S}^n)$. Comme $F=\partial_1(\underline{U})$, cela conduirait à $F=F\partial_1(z)$. Puis en simplifiant par $F$ qui est non diviseur de zéro, on aurait $1\in\langle\underline{X}\rangle$ ...

⋆ Comme annoncé ci-dessus, il n'est pas difficile de déterminer à la main le premier module des syzygies de $\underline{x}$ sur $\mathbf{B}$. En effet, si $v\in\mathbf{B}^n$ est une relation, alors sur $\mathbf{S}$ cela s'écrit $\sum_i X_iV_i\in\langle F\rangle$. En utilisant que $F=\sum_i X_iU_i$, on arrive à $\sum_i X_i(V_i-HU_i)=0$ pour un certain polynôme $H\in\mathbf{S}$. La suite $\underline{X}$ étant 1-sécante, le vecteur $\underline{V}-H\underline{U}$ est dans l'image de $\partial_2$. Par conséquent sur $\mathbf{B}$ cela dit que $v$ est dans l'image de l'application linéaire $\bigwedge^2(\mathbf{B}^n)\oplus\mathbf{B}\to\mathbf{B}^n$ définie par $\partial_2\oplus\delta_1$ où $\partial$ est la différentielle de $\mathrm{K}_\bullet(\underline{x};\mathbf{B})$ et $\delta$ celle de $\mathrm{K}^\bullet(\underline{u};\mathbf{B})$. Il est donc clair, qu'en rajoutant de la sorte le facteur $\mathbf{B}$ à $\mathrm{K}_2(\underline{x};\mathbf{B})$, on tue le cycle $\underline{u}$. Mais il est également clair, qu'en procédant ainsi, on perturbe l'homologie initiale en degrés $\geqslant 2$ (qui était triviale !). L'étape suivante consiste alors à rétablir l'exactitude en degré supérieur. Et c'est là que Tate entre en scène pour de bon !

## Notations

▷ $\mathbf{A}$, un anneau commutatif unitaire
▷ $\underline{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ et $\underline{u}=(u_1,\ldots,u_n)$ deux suites de même longueur $n$ formées d'éléments de $\mathbf{A}$
▷ $F(\underline{x},\underline{u})=\sum_{i=1}^n x_iu_i$, le produit scalaire des suites $\underline{x}$ et $\underline{u}$
▷ $\mathbf{B}$, l'anneau quotient $\mathbf{A}/\langle F(\underline{x},\underline{u})\rangle$
▷ $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x};\underline{u})$, le pseudo-complexe de Tate sur $\mathbf{A}$ de $\underline{x}$ relativement à $\underline{u}$, qui est un complexe sur $\mathbf{B}$
▷ sw, l'opération de swap $\underline{x}\leftrightarrow\underline{u}$
▷ $\partial$, la différentielle du complexe de Koszul descendant
▷ $\delta$, la différentielle du complexe de Koszul montant
▷ $\varphi$, l'application $d_n$ du complexe de Tate
▷ $\alpha$, un élément de l'idéal $\langle\underline{x},\underline{u}\rangle$
▷ $N=2^{n-1}$, le rang du $\mathbf{A}$-module libre $\mathrm{T}_k$ pour $k\geqslant n-1$
▷ $r=N/2=2^{n-2}$, le rang de $\varphi=d_n$ sur $\mathbf{B}_\alpha$ pour tout $\alpha\in\langle\underline{x},\underline{u}\rangle$
▷ $\mathbf{S}$, l'anneau de polynômes $\mathbf{k}[X_1,\ldots,X_n]$ où $\mathbf{k}$ est un anneau

On rappelle les règles de calcul suivantes pour $a,b\in\bigwedge^1(\mathbf{A}^n)$

$$(\clubsuit)\qquad \partial_a\circ\partial_b=-\partial_b\circ\partial_a,\qquad \delta_a\circ\delta_b=-\delta_b\circ\delta_a,\qquad \partial_a\circ\delta_b+\delta_b\circ\partial_a=F(a,b)\,\mathrm{Id}.$$

# 1 Le pseudo-complexe de Tate T$_\bullet(\underline{x},\underline{u})$

Sur un anneau commutatif $\mathbf{A}$, on considère deux suites $\underline{x}$ et $\underline{u}$ de même longueur $n$. Dans cette première section, on va définir, à partir de ces deux suites, un pseudo-complexe (descendant) que l'on

2. Le contexte général du théorème 1.10 fonctionnerait tout aussi bien.

appelera le pseudo-complexe de Tate $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}\,;\underline{u})$ de $\underline{x}$ relativement à $\underline{u}$. Comme nous allons le voir, il est construit à partir du complexe de Koszul descendant $\big(\mathrm{K}_\bullet(\underline{x}\,;\mathbf{A}),\partial_x\big)$ de $\underline{x}$ et du complexe de Koszul montant $\big(\mathrm{K}^\bullet(\underline{u}\,;\mathbf{A}),\delta_u\big)$ de $\underline{u}$.

## 1.1 Une première description minimaliste

**Les termes de $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}\,;\underline{u})$**

Le terme de degré $k$ est donné par

$$\mathrm{T}_k = \bigoplus_{\substack{i\leqslant k\\ i\equiv k \bmod 2}} K_i \qquad \text{où} \quad K_i = \bigwedge^i(\mathbf{A}^n)$$

Par exemple, pour $n=6$, voilà comment s'organisent les termes de $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x},\underline{u})$ :

| degrés | $\cdots$ | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $K_6$ | $K_5$ | $K_4$ | $K_3$ | $K_2$ | $K_1$ | $K_0$ |
| | | $K_6$ | $K_5$ | $K_4$ | $K_3$ | $K_2$ | $K_1$ | $K_0$ | | |
| | $\cdots$ | $K_4$ | $K_3$ | $K_2$ | $K_1$ | $K_0$ | | | | |
| | $\cdots$ | $K_2$ | $K_1$ | $K_0$ | | | | | | |
| | $\cdots$ | $K_0$ | | | | | | | | |

**Remarque 1.1.** On remarque que $\mathrm{T}_k$ est « Koszul-complet » pour $k\geqslant n-1$, c'est-à-dire que $\mathrm{T}_k$ contient « tous les termes de Koszul qu'il peut contenir ». On en déduit donc que pour $k\geqslant n-1$, les modules $\mathrm{T}_k$ et $\mathrm{T}_{k+2}$ contiennent les mêmes $\mathrm{K}_i$. Par ailleurs, pour $k\geqslant n-1$, les $\mathbf{A}$-modules libres $\mathrm{T}_k$ et $\mathrm{T}_{k+1}$ ont même rang à savoir $N=2^{n-1}$.

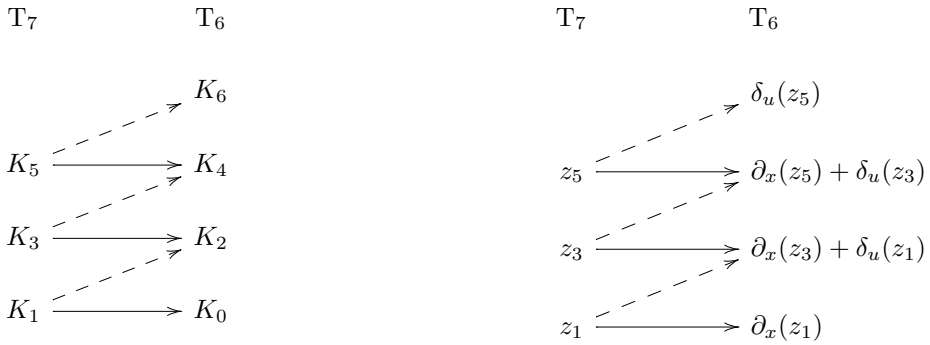
**La pseudo-différentielle de $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}\,;\underline{u})$**

On équipe $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}\,;\underline{u})$ d'une application graduée $d$ de degré $-1$ qui est la « somme graduée de $\partial_x$ et de $\delta_u$ ». Autrement dit, sur la représentation schématique des termes du pseudo-complexe, on installe $\partial_x$ sur les horizontales (trait plein) et $\delta_u$ sur les obliques montantes (trait pointillé).

Par exemple, $d$ agit sur $\mathrm{T}_7$ de la façon suivante :

$$d(z_5\oplus z_3\oplus z_1) \;=\; \delta_u(z_5)\;\oplus\;\big(\partial_x(z_5)+\delta_u(z_3)\big)\;\oplus\;\big(\partial_x(z_3)+\delta_u(z_1)\big)\;\oplus\;\partial_x(z_1)$$

ce qui se traduit par le dessin suivant :




L'application $d$ définie sur $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}\,;\underline{u})$ n'est pas une différentielle (d'où l'utilisation du terme « pseudo-différentielle »). On verra plus loin que ce sera le cas dès que $F(\underline{x},\underline{u})=0$.

## 1.2 Une seconde description opérationnelle

Un des défauts de la description minimaliste est qu'elle est peu opérationnelle d'un point de vue calculatoire. De plus,on ne sait pas, a priori, que le terme $z_5 \oplus z_3 \oplus z_1$ est de degré 7 (il pourrait très bien être de degré 5 ou 9 ou ...). Une façon d'y remédier est d'introduire un module qui gradue les strates horizontales. Plus précisément, on réalise l'algèbre graduée T comme $D \otimes_{\mathbf{A}} K$ où $K$ est l'algèbre extérieure $\bigwedge(\mathbf{A}^n)$ et $D$ est un $\mathbf{A}$-module gradué concentré en degrés pairs positifs :

$$D = D_0 \oplus D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \qquad \text{avec } D_{2i+1} = 0$$

De plus, $D_{2i}$ est un $\mathbf{A}$-module libre de rang 1 de base $\varepsilon_{2i}$. On a donc

$$\mathrm{T}_k \;=\; D_0 \otimes K_k \;\oplus\; D_2 \otimes K_{k-2} \;\oplus\; D_4 \otimes K_{k-4} \;\oplus\; \cdots \quad = \bigoplus_{2i+j=k} D_{2i} \otimes K_j$$

La pseudo-différentielle $d$ est alors donnée par la formule

$$d(\varepsilon_{2i} \otimes z) \;=\; \varepsilon_{2i} \otimes \partial_x(z) \;\oplus\; \varepsilon_{2i-2} \otimes \delta_u(z) \qquad \text{pour } z \in K_j$$

ce que l'on peut écrire [3]

$$\boxed{d \;=\; \varepsilon_\bullet \otimes \partial_x \;\;\oplus\;\; \varepsilon_{\bullet-2} \otimes \delta_u}$$

Petit dessin de rigueur

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\delta_u}{\nearrow} & D_{2i-2} \otimes K_{j+1} \\ D_{2i} \otimes K_j & \xrightarrow[\partial_x]{} & D_{2i} \otimes K_{j-1} \end{array}$$

A noter que la flèche en pointillés n'existe pas lorsque $2i = 0$ car $2i - 2 < 0$.

Pour bien comprendre les notations, reprenons l'exemple précédent $d(\varepsilon_2 \otimes z_5 \;\oplus\; \varepsilon_4 \otimes z_3 \;\oplus\; \varepsilon_6 \otimes z_1) =$

$$\varepsilon_0 \otimes \delta_u(z_5) \;\oplus\; \varepsilon_2 \otimes \big(\partial_x(z_5) + \delta_u(z_3)\big) \;\oplus\; \varepsilon_4 \otimes \big(\partial_x(z_3) + \delta_u(z_1)\big) \;\oplus\; \varepsilon_6 \otimes \partial_x(z_1)$$

## 1.3 L'application $s$ de degré $+1$

On définit sur $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}\,;\underline{u})$ une application $s$ de degré $+1$ via le dessin suivant

$$\begin{array}{ccc} D_{2i} \otimes K_{j+1} & \overset{\delta_u}{\nleftarrow\!-\!-} & D_{2i} \otimes K_j \\ & \searrow^{\partial_x} & \\ D_{2i+2} \otimes K_{j-1} & & \end{array}$$

Autrement dit :

$$s(\varepsilon_{2i} \otimes z) \;=\; \varepsilon_{2i} \otimes \delta_u(z) \;\oplus\; \varepsilon_{2i+2} \otimes \partial_x(z) \qquad \text{pour } z \in K_j$$

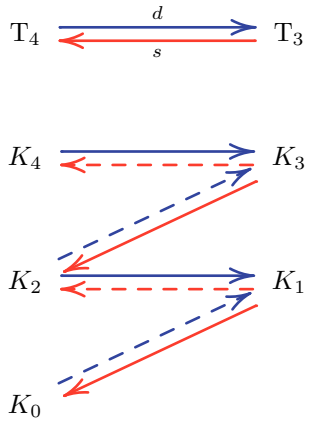
Ou encore, de manière condensée :

$$\boxed{s \;=\; \varepsilon_\bullet \otimes \delta_u \;\;\oplus\;\; \varepsilon_{\bullet+2} \otimes \partial_x}$$

**Proposition 1.2.** *En identifiant* $\mathrm{T}_k$ *et* $\mathrm{T}_k^\star$ *via le choix d'une base sur* $\mathbf{A}^n$*, l'application* $s$ *est la transposée de l'application* $d$ *à la permutation* $\underline{x} \leftrightarrow \underline{u}$ *près.*

3. Pour alléger les notations, on note $\varepsilon_{\bullet-2}$ pour désigner l'application $\mathbf{A}$-linéaire du $\mathbf{A}$-module $D$ qui réalise $\varepsilon_j \mapsto \varepsilon_{j-2}$.

***Preuve.*** On a ${}^{\mathrm{t}}d = \varepsilon_\bullet \otimes {}^{\mathrm{t}}\partial_x \ \oplus\ \varepsilon_{\bullet+2} \otimes {}^{\mathrm{t}}\delta_u$. On sait que ${}^{\mathrm{t}}\partial = \delta$, donc après la permutation $\underline{x} \leftrightarrow \underline{u}$, on tombe sur l'application $s$. En images, cela donne bleu $\overset{\longrightarrow}{\rightsquigarrow}$ rouge et plein $\overset{\longleftarrow}{\rightsquigarrow}$ pointillés.




□

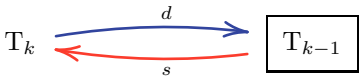
## 1.4 Les composées de $d$ et $s$

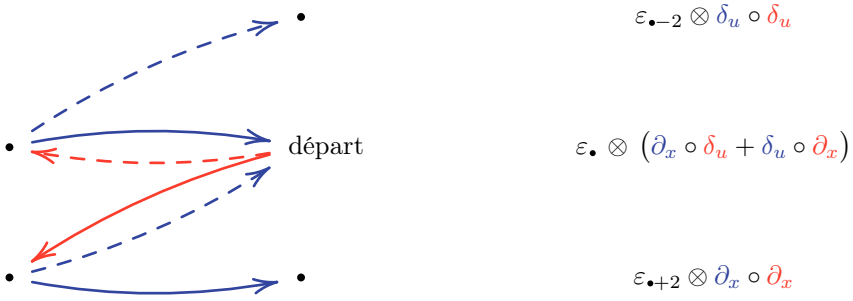
Tout d'abord, pour les fans de produits intérieur et extérieur, voici les expressions de $d$ et $s$ :

$$d \ = \ \varepsilon_\bullet \otimes (\bullet \llcorner x) \ \oplus\ \varepsilon_{\bullet-2} \otimes (u \wedge \bullet) \qquad \text{et} \qquad s \ = \ \varepsilon_\bullet \otimes (u \wedge \bullet) \ \oplus\ \varepsilon_{\bullet+2} \otimes (\bullet \llcorner x)$$

**Proposition 1.3.** *On a l'égalité* $d \circ s \ = \ F(\underline{x},\underline{u})\,\mathrm{Id}_{\mathrm{T}}$.

***Preuve sans mots.*** L'application $s$ en rouge, suivie de l'application $d$ en bleu. En trait plein $\partial_x$ et en pointillés $\delta_u$.




En utilisant $\delta_u \circ \delta_u = 0$, $\partial_x \circ \partial_x = 0$ et la troisième égalité de (♣) à savoir $\partial_x \circ \delta_u + \delta_u \circ \partial_x \ = \ F(\underline{x},\underline{u})\,\mathrm{Id}$, on tombe sur $d \circ s = F(\underline{x},\underline{u})\,\mathrm{Id}$.

Remarquons que la flèche en pointillés du haut peut ne pas exister (c'est le cas si $\varepsilon_{\bullet-2} = 0$), mais cela n'influe pas sur le résultat final. □

**Proposition 1.4.** *On a l'égalité*

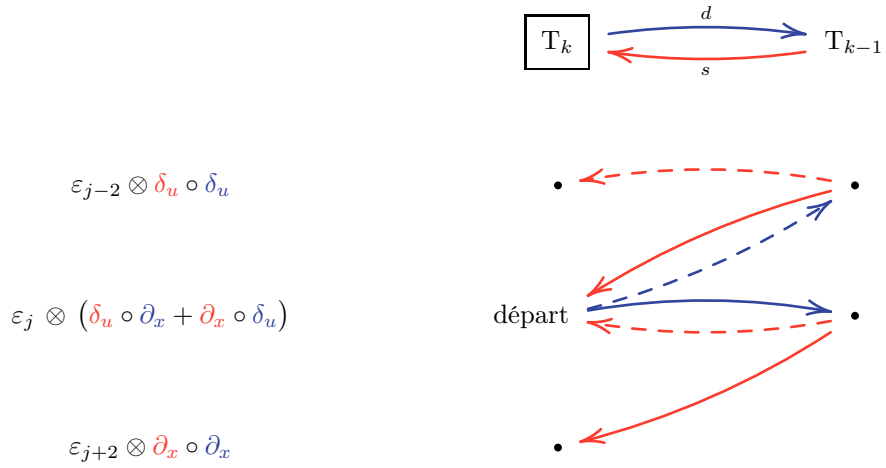
$$s \circ d \ = \ F(\underline{x},\underline{u})\,\mathrm{Id} \ - \ \varepsilon_0 \otimes \partial_x \circ \delta_u$$

*En particulier, pour tout* $k \geqslant n$, *on a*

$$s \circ d_k \ = \ F(\underline{x},\underline{u})\,\mathrm{Id}_{\mathrm{T}_k}$$

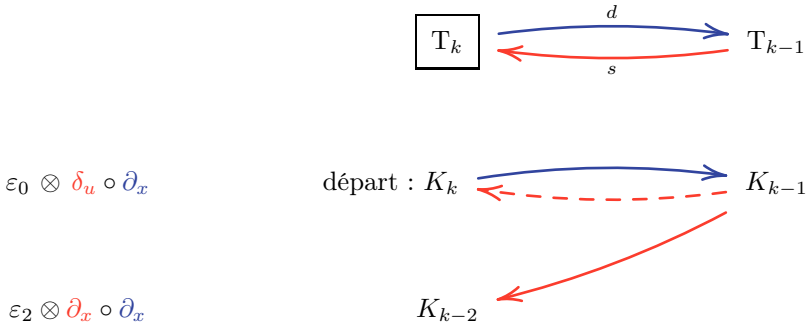
***Preuve.*** On va séparer le calcul de $s\circ d(\varepsilon_j\otimes z)$ en deux selon que $j>0$ ou $j=0$.

1. Si $j>0$, on a $s\circ d(\varepsilon_j\otimes z)=F(\underline{x},\underline{u})\,\varepsilon_j\otimes z$. En effet, on est dans la situation suivante :




Comme $j>0$, la flèche bleue en pointillés $\delta_u$ qui monte vers la strate $j-2$ existe bien. Ensuite, on utilise les égalités classiques $\delta_u\circ\delta_u=0$, $\partial_x\circ\partial_x=0$ et $\partial_x\circ\delta_u+\delta_u\circ\partial_x=F(\underline{x},\underline{u})\,\mathrm{Id}$. On obtient bien $s\circ d(\varepsilon_j\otimes z)=F(\underline{x},\underline{u})\,\varepsilon_j\otimes z$ pour $j>0$.

2. Si $j=0$, on va montrer que $s\circ d(\varepsilon_0\otimes z)=\varepsilon_0\otimes(\delta_u\circ\partial_x)(z)$ On aura alors $s\circ d(\varepsilon_0\otimes z)=\varepsilon_0\otimes(\delta_u\circ\partial_x+\partial_x\circ\delta_u)(z)\;-\;\varepsilon_0\otimes(\partial_x\circ\delta_u)(z)=F(\underline{x},\underline{u})\,\varepsilon_0\otimes z\;-\;\varepsilon_0\otimes(\partial_x\circ\delta_u)(z)$.




Enfin, prouvons le dernier point de la proposition. Si $k\geqslant n$, on a $\varepsilon_0\otimes\delta_u\circ\partial_x=\varepsilon_0\otimes(\delta_u\circ\partial_x+\partial_x\circ\delta_u)$ car $\varepsilon_0\otimes(\partial_x\circ\delta_u)=0$ (en effet, $\delta_u:\mathrm{T}_{k+1}\to\mathrm{T}_k$ est nul pour $k\geqslant n$). On obtient donc $\varepsilon_0\otimes\delta_u\circ\partial_x=F(\underline{x},\underline{u})\,\mathrm{Id}$. En utilisant la première partie de l'énoncé, on en déduit que $s\circ d_k=F(\underline{x},\underline{u})\,\mathrm{Id}_{\mathrm{T}_k}$ pour $k\geqslant n$. □

## 1.5 Un opérateur de décalage bien utile

**Définition 1.5.** *On définit un opérateur de décalage* $\sigma:\mathrm{T}\to\mathrm{T}$ *de degré* $+2$ *via la formule*

$$\boxed{\sigma\;=\;\varepsilon_{\bullet+2}\otimes\mathrm{Id}_K}$$

*Autrement dit, pour* $\varepsilon_i\otimes z\in\mathrm{T}_k$, *on a* $\sigma(\varepsilon_i\otimes z)=\varepsilon_{i+2}\otimes z\;\in\mathrm{T}_{k+2}$.

**Proposition 1.6.** *On a l'égalité*

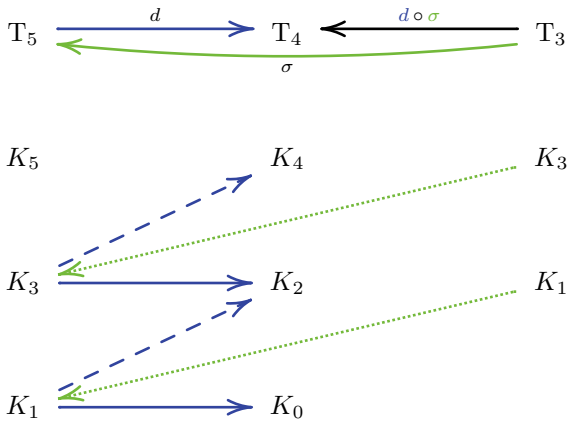
$$\boxed{d\circ\sigma\;=\;s}$$

***Preuve.*** Par le calcul. Rappelons que $d=\varepsilon_\bullet\otimes\partial_x\,\oplus\,\varepsilon_{\bullet-2}\otimes\delta_u$. Ainsi $d\circ\sigma=\varepsilon_{\bullet+2}\otimes\partial_x\,\oplus\,\varepsilon_\bullet\otimes\delta_u$ ce qui est exactement l'expression de $s$.

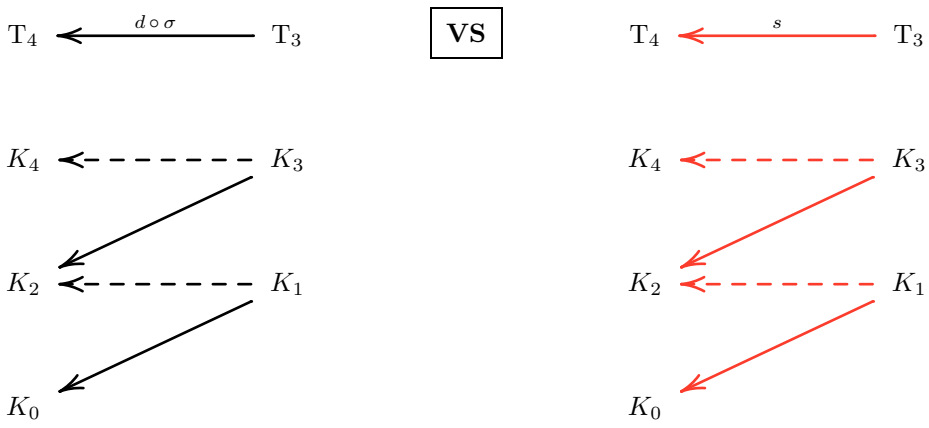
Ce calcul presque symbolique est un peu dangereux (cf. la démonstration de la prochaine proposition). Il est plus prudent de fixer $i\geqslant 0$ et d'effectuer vraiment le calcul suivant

$$(d\circ\sigma)(\varepsilon_i\otimes z)\;=\;d(\varepsilon_{i+2}\otimes z)\;=\;\varepsilon_{i+2}\otimes\partial_x(z)\,\oplus\,\varepsilon_i\otimes\delta_u(z)\;=\;s(\varepsilon_i\otimes z).$$

Par le dessin.




D'où la comparaison




□

**Proposition 1.7.** *On a l'égalité*

$$\sigma \circ d + \varepsilon_0 \otimes \delta_u \;=\; s$$

*En particulier, pour tout $k \geqslant n$, on a*

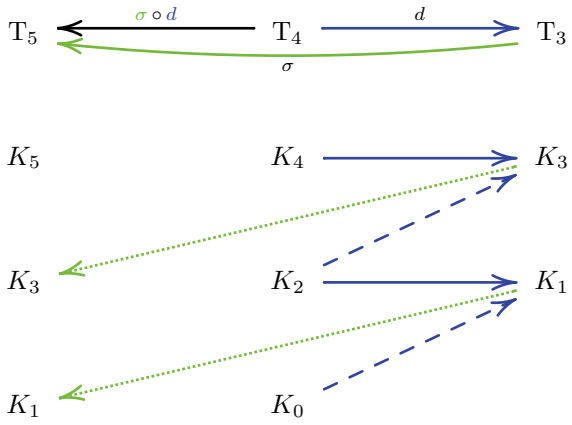
$$\sigma \circ d_k = s$$

***Preuve.*** Par le calcul. Il ne faut pas trop abuser des expressions condensées de $d$, $s$ et $\sigma$. Car voilà où cela peut mener : $\sigma \circ d = \sigma(\varepsilon_\bullet \otimes \partial_x \oplus \varepsilon_{\bullet-2} \otimes \delta_u) = \varepsilon_{\bullet+2} \otimes \partial_x \oplus \varepsilon_\bullet \otimes \delta_u = s$.

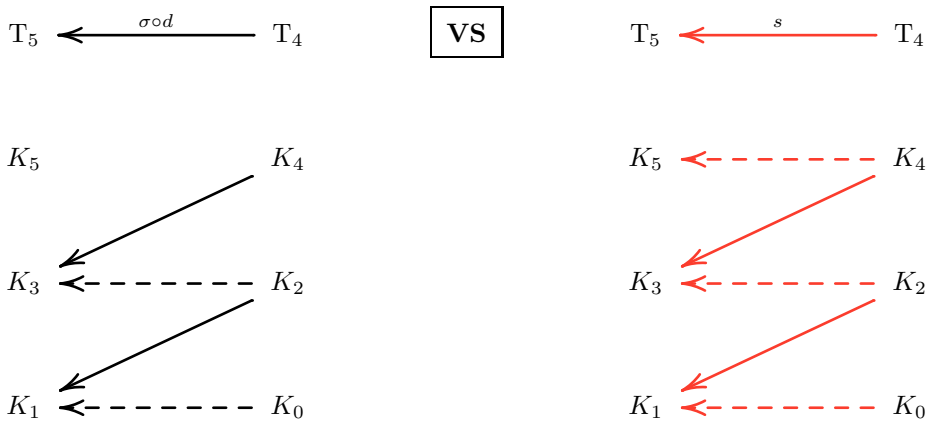
Où est l'erreur ?

Heureusement, le dessin peut aider à détecter l'erreur. Et on voit alors qu'il faut être soigneux : soit $i \geqslant 0$, on a bien $\sigma \circ d(\varepsilon_i \otimes z) = \sigma(\varepsilon_i \otimes \partial_x(z) \oplus \varepsilon_{i-2} \otimes \delta_u(z))$. Si $i = 0$ alors $\varepsilon_{i-2} = 0$ et on a $\sigma \circ d(\varepsilon_0 \otimes z) = \sigma(\varepsilon_0 \otimes \partial_x(z)) = \varepsilon_2 \otimes \partial_x(z) = s(\varepsilon_0 \otimes z) - \varepsilon_0 \otimes \delta_u(z)$. Si $i > 0$, le calcul mécanique fonctionne et on trouve $\sigma \circ d(\varepsilon_i \otimes z) = s(\varepsilon_i \otimes z)$.

Par le dessin.




d'où la comparaison




Pour $k \geqslant n$, l'application $\varepsilon_0 \otimes \delta_u : \mathrm{T}_k \to \mathrm{T}_{k+1}$ est nulle car l'application $\delta_u : K_k \to K_{k+1}$ est nulle. Donc $\sigma \circ d_k = s$ pour tout $k \geqslant n$. □

**Proposition 1.8.** *L'application $\sigma : \mathrm{T}_k \to \mathrm{T}_{k+2}$ est un isomorphisme pour tout $k \geqslant n-1$. De plus, le pseudo-complexe de Tate est ultimement 2-périodique. Plus précisément, on a*

$$d_{k+2} \;=\; \sigma \circ d_k \circ \sigma^{-1} \qquad \text{pour tout } k \geqslant n$$

***Preuve.*** Le fait que $\sigma : \mathrm{T}_k \to \mathrm{T}_{k+2}$ soit un isomorphisme pour $k \geqslant n-1$ est simplement dû au fait que $\mathrm{T}_k$ est Koszul-complet pour $k \geqslant n-1$. De plus, on a $d \circ \sigma = s$ en vertu de la proposition 1.6. Et la proposition 1.7 nous dit que $\sigma \circ d_k = s$ pour tout $k \geqslant n$. Ainsi $d_{k+2} \circ \sigma = \sigma \circ d_k$ pour tout $k \geqslant n$. □

## 1.6 Complexe et condition d'exactitude

On note $\mathbf{B}$ l'anneau quotient $\mathbf{A}/\langle F(\underline{x}, \underline{u})\rangle$.

**Proposition 1.9.** *Le pseudo-complexe de Tate $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}\,;\underline{u})$ est un complexe sur $\mathbf{B}$. Plus précisément, pour tout $z \in K_j$, on a $(d \circ d)(\varepsilon_i \otimes z) = F(\underline{x}, \underline{u})\,\varepsilon_{i-2} \otimes z$ sur l'anneau $\mathbf{A}$, ce que l'on peut abréger en $d \circ d = F(\underline{x}, \underline{u})\,\varepsilon_{\bullet-2} \otimes \mathrm{Id}_K$.*

***Preuve.*** Prouvons la formule annoncée. Pour $i = 0$, la formule est bien vérifiée car $d \circ d(\varepsilon_0 \otimes z) = 0 = F(\underline{x}, \underline{u})\,\varepsilon_{-2} \otimes z$. Pour $i > 0$, on écrit $\varepsilon_i \otimes z = \sigma(\varepsilon_{i-2} \otimes z)$. On applique ensuite $d \circ d$ en utilisant que $d \circ d \circ \sigma = d \circ s = F(\underline{x}, \underline{u})\,\mathrm{Id}_{\mathrm{T}}$ (cf. les propositions 1.6 et 1.3) et on obtient ce qu'il faut. □

**Théorème 1.10** (Résolution de $\mathbf{B}/\langle\underline{x}\rangle$)**.** *Si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
*(i) la suite $\underline{x}$ est complètement sécante sur $\mathbf{A}$ ;*
*(ii) $F(\underline{x}, \underline{u})$ est non-diviseur de zéro dans $\mathbf{A}$ ;*
*alors le complexe de Tate de $\underline{x}$ relativement à $\underline{u}$ vu sur $\mathbf{B}$ fournit une résolution libre infinie du $\mathbf{B}$-module $\mathbf{B}/\langle\underline{x}\rangle$.*

***Preuve.*** On a la décomposition $\mathrm{T}_k = D_0 \otimes K_k \oplus \sigma(\mathrm{T}_{k-2})$. On va utiliser à plusieurs reprises que $d_{|D_0\otimes K_k} = \partial_x$. Soit $t = \varepsilon_0 \otimes y \oplus \sigma(z) \in \mathrm{T}_k$ avec $y \in K_k$ et $z \in \mathrm{T}_{k-2}$.

• On va montrer que $\operatorname{Ker} d \subset \operatorname{Im} d$ sur l'anneau $\mathbf{A}$. Dans un premier temps, on exprime $(d \circ d)(t)$ sur $\mathbf{A}$. On a $d \circ d_{|D_0\otimes K_k} = \partial_x \circ \partial_x = 0$ et $d \circ d \circ \sigma = F\,\mathrm{Id}$. Ainsi $(d \circ d)(t) = Fz$.
A présent, soit $t$ tel que $d(t) = 0$. Comme $F$ est non-diviseur de zéro dans $\mathbf{A}$, on obtient $z = 0$ d'où $t = \varepsilon_0 \otimes y$. Ainsi $d(t) = \varepsilon_0 \otimes \partial_x(y)$. Comme $d(t) = 0$, on a $\partial_x(y) = 0$. La suite $\underline{x}$ est complètement sécante sur $\mathbf{A}$, donc il existe $y' \in K_{k+1}$ tel que $y = \partial_x(y')$. D'où $t = \varepsilon_0 \otimes \partial_x(y')$, ce qui s'écrit encore $t = d(\varepsilon_0 \otimes y')$ donc $t \in \operatorname{Im} d$ sur $\mathbf{A}$.

• Montrons à présent l'exactitude sur l'anneau $\mathbf{B}$.
Soit $t \in \mathrm{T}_k$ tel que $d(t) = 0$ sur l'anneau $\mathbf{B}$, c'est-à-dire tel que $d(t) = Ft'$ sur $\mathbf{A}$. Comme $d \circ s = F\mathrm{Id}$, on obtient $d\big(t - s(t')\big) = 0$. La première partie de la preuve donne $t - s(t') \in \operatorname{Im} d$. Le fait que $s = d \circ \sigma$ fournit $t \in \operatorname{Im} d$. □

## 2 Une traduction matricielle

Comme $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}\,;\underline{u})$ est une suite de $\mathbf{A}$-modules libres de rang fini, on est en droit de se demander à quoi ressemblent les matrices (après avoir fixer des bases, bien entendu). L'objet de cette section est d'apporter des précisions sur ces matrices.

Comme $D_{2i} \simeq \mathbf{A}$ pour $i \geqslant 0$, on a

$$\mathrm{T}_k \;\simeq\; K_k \oplus K_{k-2} \oplus \cdots \oplus K_{k \bmod 2} \qquad \text{où} \quad K_i = \textstyle\bigwedge^i(\mathbf{A}^n)$$

On retrouve donc la description minimaliste donnée au tout début. Ainsi

$$\mathrm{T}_k \;\simeq\; \mathbf{A}^{\nu_k} \qquad \text{avec} \quad \nu_k \;=\; \sum_{\substack{i \leqslant k \\ i \equiv k \bmod 2}} \binom{n}{i}$$

En particulier, pour tout $k \geqslant n-1$, on a $\nu_k = N$ où $N = 2^{n-1}$.

On fixe une base sur chaque $K_i = \bigwedge^i(\mathbf{A}^n)$. Cela fait naître une base sur

$$\mathrm{T}_k \;\simeq\; K_k \oplus K_{k-2} \oplus \cdots \oplus K_{k \bmod 2}$$

en juxtaposant les bases des $K_i$ comme on le pense. Désormais, à chaque fois qu'il sera question de *« la » matrice de* $d_k$, cela sera sous-entendu, relativement à cette base. On se permettra même de confondre l'application linéaire $d_k$ et sa matrice dans cette base, notée également $d_k$.

La proposition suivante donne un moyen de construire par récurrence la matrice de $d_k$. Il sera commode de noter $\partial_k$ l'application $\partial_x$ en degré $k$.

**Proposition 2.1.** *La matrice de $d_k$ est égale à la swap-transposée de la matrice de $d_{k-1}$ à laquelle on rajoute verticalement à gauche la matrice de $\partial_k$ (boucher par des zéros en dessous de $\partial_k$). Visuellement*

$$d_k = \left[\begin{array}{c:c} \partial_k & \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathrm{sw}({}^{\mathrm{t}}d_{k-1}) \end{array}\right]$$

*En particulier, la matrice de $d_{n+1}$ est la swap-transposée de $d_n$. De plus, pour $k \geqslant n$, la matrice de $d_{k+2}$ est la même que celle de $d_k$.*

***Preuve.*** On a la décomposition

$$\mathrm{T}_k \;=\; D_0 \otimes K_k \;\oplus\; \sigma(\mathrm{T}_{k-2})$$

Sur le premier terme, l'application $d$ agit comme $\partial_x : K_k \longrightarrow K_{k-1}$. Sur $\sigma(\mathrm{T}_{k-2})$, l'application $d$ agit comme $s : \mathrm{T}_{k-2} \longrightarrow \mathrm{T}_{k-1}$ car $d \circ \sigma = s$. Par ailleurs, la proposition 1.2 montre que la matrice de $s : \mathrm{T}_{k-2} \longrightarrow \mathrm{T}_{k-1}$ est la transposée de la matrice de $d_{k-1} : \mathrm{T}_{k-1} \longrightarrow \mathrm{T}_{k-2}$ à la permutation $\underline{x} \leftrightarrow \underline{u}$ près. □

## 2.1 Bilan pour les yeux

Voici le pseudo-complexe de Tate $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}\,;\underline{u})$ sous son visage matriciel :

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{A}^N \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbf{A}^N \xrightarrow{d_n} \mathbf{A}^N \xrightarrow{d_{n-1}} \mathbf{A}^{\nu_{n-2}} \longrightarrow \quad \cdots\cdots \quad \longrightarrow \mathbf{A}^{\nu_2} \xrightarrow{d_2} \mathbf{A}^n \xrightarrow{d_1} \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}/\langle\underline{x}\rangle$$

avec les rangs suivants :

$$\nu_k \;=\; \sum_{\substack{i\leqslant k\\ i\,\equiv\, k \bmod 2}} \binom{n}{i} \qquad\qquad \text{donc pour tout } k\geqslant n-1, \text{ on a } \nu_k = 2^{n-1} =: N$$

avec les matrices suivantes :

$$d_1 = \begin{matrix} \\ K_0 \end{matrix}\!\!\begin{matrix} K_1 \\ \left[\begin{array}{c} \partial_1 \end{array}\right] \end{matrix}\!\!, \qquad d_2 = \begin{matrix} \\ K_1 \end{matrix}\!\!\begin{matrix} K_2 & K_0 \\ \left[\begin{array}{cc} \partial_2 & \delta_1 \end{array}\right] \end{matrix}\!\!, \qquad d_3 = \begin{matrix} \\ K_2 \\ K_0 \end{matrix}\!\!\begin{matrix} K_3 & K_1 \\ \left[\begin{array}{cc} \partial_3 & \delta_2 \\ 0 & \partial_1 \end{array}\right] \end{matrix}\!\!, \qquad d_4 = \begin{matrix} \\ K_3 \\ K_1 \end{matrix}\!\!\begin{matrix} K_4 & K_2 & K_0 \\ \left[\begin{array}{ccc} \partial_1 & \delta_3 & 0 \\ 0 & \partial_2 & \delta_1 \end{array}\right] \end{matrix}$$

## 2.2 La tête des matrices

Visualisons ces matrices pour $n=3$ et $n=4$, en prenant comme base de $K_k = \bigwedge^k(\mathbf{A}^n)$ la base canonique $(e_I)_{\#I=k}$ indexée par les parties (*i.e.* les suites strictement croissantes) de cardinal $k$, parties que l'on range à l'aide de l'ordre lexicographique.

• Pour $n=3$

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{A}^4 \xrightarrow{d_4} \mathbf{A}^4 \xrightarrow{d_3} \mathbf{A}^4 \xrightarrow{d_2} \mathbf{A}^3 \xrightarrow{d_1} \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}/\langle x_1,x_2,x_3\rangle$$

avec

$$d_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}, \qquad d_2 = \left[\begin{array}{ccc:c} -x_2 & -x_3 & 0 & u_1 \\ x_1 & 0 & -x_3 & u_2 \\ 0 & x_1 & x_2 & u_3 \end{array}\right], \qquad d_3 = \left[\begin{array}{c:ccc} x_3 & -u_2 & u_1 & 0 \\ -x_2 & -u_3 & 0 & u_1 \\ x_1 & 0 & -u_3 & u_2 \\ \hdashline . & x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right]$$

et $d_4 = \mathrm{sw}({}^{\mathrm{t}}d_3) = \begin{bmatrix} u_3 & -u_2 & u_1 & 0 \\ -x_2 & -x_3 & 0 & u_1 \\ x_1 & 0 & -x_3 & u_2 \\ 0 & x_1 & x_2 & u_3 \end{bmatrix}$. Enfin, $d_{2i+3} = d_3$ et $d_{2i+4} = d_4$ pour tout $i\geqslant 0$.

• Pour $n=4$

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{A}^8 \xrightarrow{d_5} \mathbf{A}^8 \xrightarrow{d_4} \mathbf{A}^8 \xrightarrow{d_3} \mathbf{A}^7 \xrightarrow{d_2} \mathbf{A}^4 \xrightarrow{d_1} \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}/\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle$$

avec

$$d_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \qquad d_2 = \left[\begin{array}{cccccc:c} -x_2 & -x_3 & -x_4 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ x_1 & 0 & 0 & -x_3 & -x_4 & 0 & u_2 \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 & -x_4 & u_3 \\ 0 & 0 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & u_4 \end{array}\right],$$

$$d_3 = \left[\begin{array}{cccc:cccc} x_3 & x_4 & 0 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & x_4 & 0 & -u_3 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & -x_2 & -x_3 & 0 & -u_4 & 0 & 0 & u_1 \\ x_1 & 0 & 0 & x_4 & 0 & -u_3 & u_2 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & -x_3 & 0 & -u_4 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & -u_4 & u_3 \\ \hdashline . & . & . & . & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\right],$$

$$d_4 = \left[\begin{array}{c:ccccccc} -x_4 & u_3 & -u_2 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & u_4 & 0 & -u_2 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & u_4 & -u_3 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & u_4 & -u_3 & u_2 & 0 \\ \hdashline . & -x_2 & -x_3 & -x_4 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ . & x_1 & 0 & 0 & -x_3 & -x_4 & 0 & u_2 \\ . & 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 & -x_4 & u_3 \\ . & 0 & 0 & x_1 & 0 & x_2 & x_3 & u_4 \end{array}\right],$$

et $d_5 = \mathrm{sw}({}^{\mathrm{t}}d_4)$. Enfin, $d_{2i+4} = d_4$ et $d_{2i+5} = d_5$ pour tout $i \geqslant 0$.

# 3 Factorisation matricielle symbolique du produit scalaire

## 3.1 Dans un contexte général

**Proposition 3.1.** *Soit $\underline{x}$ et $\underline{u}$ deux suites d'éléments d'un anneau $\mathbf{A}$ de longueur $n$. On pose $f = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$. Alors il existe deux matrices carrées $A, B \in \mathbb{M}_N(\mathbf{A})$ où $N = 2^{n-1}$ telles que*

$$AB = f\mathrm{I}_N = BA$$

*Pour $A$, on peut prendre la matrice $d_n$ de $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}\,;\underline{u})$ et pour $B$ la matrice $d_{n+1} = \mathrm{sw}({}^{\mathrm{t}}d_n)$.*

***Preuve.*** On sait que $d \circ s = f\,\mathrm{Id}$ et que $s \circ d_k = f\,\mathrm{Id}$ pour $k \geqslant n$. On obtient le résultat en prenant pour $A$ la matrice de $d_n$ et pour $B$ la matrice de $s_n$ qui n'est ni plus ni moins que $\mathrm{sw}({}^{\mathrm{t}}d_n)$. □

**Remarque 3.2.** Considérons une matrice carrée $M \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ et son déterminant $f$ qui est un élément de $\mathbf{A}$ ! En développant $f$ par rapport à la première colonne, on produit une écriture $f = F(\underline{x}, \underline{u})$ où $\underline{x}$ est la suite des éléments de la première colonne, et $\underline{u}$ la suite des $n$-mineurs signés $(n-1) \times (n-1)$ auxquels on pense. Les matrices $A$ et $B$ fournies par la proposition précédente sont de taille $N = 2^{n-1}$ donc aucune chance de les comparer à $M$ !

La proposition suivante redémontre matriciellement l'exactitude du complexe $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}\,;\underline{u})$ sur $\mathbf{B}$ à partir du degré $n$.

**Proposition 3.3.** *Considérons deux matrices $A, B \in \mathbb{M}_p(\mathbf{A})$ telles que $AB = BA = f\mathrm{I}_p$ pour un élément régulier $f \in \mathbf{A}$. On pose $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle f\rangle$. Alors $E = \mathrm{Coker}\, A$ est un $\mathbf{B}$-module qui admet une $\mathbf{B}$-résolution libre infinie 2-périodique donnée par*

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{B}^p \xrightarrow{\overline{A}} \mathbf{B}^p \xrightarrow{\overline{B}} \mathbf{B}^p \xrightarrow{\overline{A}} \mathbf{B}^p \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow E$$

***Preuve.*** Tout d'abord, on a $f\mathbf{A}^p \subset \mathrm{Im}\, A$ d'après $AB = f\mathrm{I}_p$, donc $E = \mathbf{A}^p/\mathrm{Im}\, A$ est bien un $\mathbf{B}$-module. Il est clair que $\overline{A}\,\overline{B} = \overline{B}\,\overline{A} = 0$ sur $\mathbf{B}$ donc c'est un complexe. Pour l'exactitude : on doit montrer que $\ker \overline{A} \subset \mathrm{Im}\, \overline{B}$ et $\ker \overline{B} \subset \mathrm{Im}\, \overline{A}$. Allons-y pour la première inclusion (l'autre se traite de la même manière) : soit $\overline{w} \in \ker \overline{A}$, *i.e.* $Aw \in f\mathbf{A}^p$. On écrit que $f\mathrm{I}_p = AB$ et on simplifie par $A$ (qui est injective car $\det \mathbf{A}$ divise $f^p$ qui est un élément régulier) pour obtenir $w \in \mathrm{Im}\, B$. □

Cette proposition est censée faire allusion à ce que raconte Eisenbud dans [Eis05, chap. 1]. De manière plus précise, on a :

**Proposition 3.4.** *Soit $E$ un $\mathbf{A}$-module qui admet une résolution libre de longueur 1 et $f \in \mathbf{A}$ un élément régulier tel que $fE = 0$. Alors il existe deux matrices carrées $A, B \in \mathbb{M}_p(\mathbf{A})$ telles que $AB = f\mathrm{I}_p = BA$. De plus, $E$ est un $\mathbf{B}$-module qui admet une résolution libre infinie 2-périodique donnée par*

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{B}^p \xrightarrow{\overline{A}} \mathbf{B}^p \xrightarrow{\overline{B}} \mathbf{B}^p \xrightarrow{\overline{A}} \mathbf{B}^p \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow E$$

***Preuve.*** L'hypthèse s'écrit $0 \to \mathbf{A}^q \longrightarrow \mathbf{A}^p \to E \to 0$. On localise cette suite exacte en $f$. Comme $fE = 0$, le module $E_f$ est nul, et on obtient donc que $\mathbf{A}_f^q \to \mathbf{A}_f^p$ est un isomorphisme. Comme $f$ est régulier, l'anneau localisé n'est pas nul d'où $q = p$. Il existe donc une matrice carrée $A$ de taille $p$ telle que $E \simeq \mathrm{Coker}\, A$. L'hypothèse $fE = 0$ s'écrit donc $f\mathbf{A}^p \subset \mathrm{Im}\, A$. Par conséquent il existe une matrice carrée $B \in \mathbb{M}_p(\mathbf{A})$ telle que $AB = f\mathrm{I}_p$. Comme $f$ est régulier, on obtient $BA = f\mathrm{I}_p$ (raisonner encore une fois sur le localisé en $f$). La fin est connue : c'est la proposition précédente. □

**Remarque 3.5.** Soit $A \in \mathbb{M}_p(\mathbf{A})$ une matrice injective. On pose $f = \det \mathbf{A}$ (qui est donc un élément régulier). Le $\mathbf{A}$-module $E = \operatorname{Coker} A$ est un $\mathbf{B}$-module (car $f\mathrm{I}_p \subset \operatorname{Im} A$ via la matrice cotransposée) qui admet une résolution libre infinie 2-périodique : prendre $B = \widetilde{A}$.

## 3.2 Dans un contexte polynomial

Considérons un anneau de polynômes $\mathbf{S} = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbf{k}[\underline{X}]$ monté sur un anneau $\mathbf{k}$ et $F \in \mathbf{k}[\underline{X}]$ un polynôme dans l'idéal $\langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ que l'on peut écrire $F = \sum_{i=1}^{n} X_i U_i(\underline{X})$.

Il est facile de voir que la composante homogène de degré 1 de $F$ est nulle si et seulement si les $U_i$ sont dans $\mathbf{S}_+$. Par ailleurs, si $F$ est homogène, on peut trouver des $U_i$ *homogènes* grâce à la décomposition de $\mathbf{k}$-modules

$$\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n] \;=\; \mathbf{k} \;\oplus\; X_1\,\mathbf{k}[X_1] \;\oplus\; X_2\,\mathbf{k}[X_1, X_2] \oplus \;\cdots\; \oplus X_n\,\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$$

Une relecture de la proposition 3.1 dans ce contexte polynomial fournit le résultat suivant.

**Proposition 3.6.** *Dans le contexte précédent, les matrices $d_n$ et $d_{n+1}$ du pseudo-complexe de Tate $\mathrm{T}_\bullet(\underline{X}\,;\underline{U})$ fournissent une factorisation matricielle de $F$ dans $\mathbb{M}_N(\mathbf{S})$ où $N = 2^{n-1}$.*

*Si la composante homogène de degré 1 de $F$ est nulle, ces matrices sont à coefficients dans $\mathbf{S}_+$. Par ailleurs, si $F$ est homogène, ces matrices peuvent être choisies avec des coefficients homogènes.*

### Le polynôme d'Avramov & Grayson

Dans l'article [AG02], Avramov et Grayson prennent l'exemple suivant

$$F = X^3 + 3Y^3 - 2YZ^2 + 5Z^3 \;\in\; \mathbb{Q}[X, Y, Z]$$

Voilà la factorisation fournie

$$U = \begin{bmatrix}
. & XY & X^2 & Y^2 & . & . & . & YZ - 5/2Z^2 & . \\
. & X^2 & -3Y & XY & YZ - 5/2Z^2 & . & YZ - 5/2Z^2 & . & . \\
X^2 & . & -2YZ + 5Z^2 & . & Y^2 - 5/2YZ & YZ - 5/2Z^2 & -5/2YZ & . & . \\
. & . & . & 1/3Z & . & . & . & 1/2Y & X \\
. & . & -Z & . & 1/2Y & . & 1/2Y & -1/2X & . \\
. & -Z & . & . & -1/2X & . & -1/2X & . & 3Y \\
. & . & . & -1/3X & . & 1/2Y & -1/3Z & . & . \\
-Z & Y & X & . & . & -1/2X & . & . & . \\
Y & . & . & . & . & . & 1/3X & . & -2Y + 5Z
\end{bmatrix}$$

et

$$V = \begin{bmatrix}
. & . & -X & . & . & -2Y^2 + 5YZ & . & -2YZ + 5Z^2 & -3Y^2 \\
. & -X & . & . & . & -2YZ + 5Z^2 & -3XY & -3Y^2 & -3YZ \\
-X & Y & . & . & -2YZ + 5Z^2 & . & . & . & . \\
-3Y & . & . & 6YZ - 15Z^2 & . & . & 3X^2 & 3XY & 3XZ \\
. & 2Z & -3Y & -15XZ & -15YZ & 2X^2 & 6YZ - 15Z^2 & . & 3X^2 \\
-2X & . & 2Z & . & -4YZ + 10Z^2 & . & -6Y^2 & 2X^2 & . \\
. & . & 3Y & -6XY + 15XZ & -6Y^2 + 15YZ & . & -6YZ + 15Z^2 & . & -3X^2 \\
2Z & . & . & -6Y^2 & 2X^2 & 2XY & . & . & . \\
. & . & . & -X^2 & -XY & -Y^2 & -XZ & -YZ & -Z^2
\end{bmatrix}$$

Ces deux matrices sont carrées de taille $9 \times 9$. La matrice $U$ a des coefficients avec des vrais dénominateurs 2 et 3.

Sur ce même exemple, voici ce que fournit le complexe de Tate avec les deux suites $(X, Y, Z)$ et $(X^2,\, 3Y^2 - 2Z^2,\, 5Z^2)$ :

$$A = \begin{bmatrix}
Z & -3Y^2 + 2Z^2 & X^2 & . \\
-Y & -5Z^2 & . & X^2 \\
X & . & -5Z^2 & 3Y^2 - 2Z^2 \\
. & X & Y & Z
\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}
5Z^2 & -3Y^2 + 2Z^2 & X^2 & . \\
-Y & -Z & . & X^2 \\
X & . & -Z & 3Y^2 - 2Z^2 \\
. & X & Y & 5Z^2
\end{bmatrix}$$

Ce sont des matrices de taille $4 \times 4$ (en effet $2^{n-1} = 4$ avec $n = 3$) dont les coefficients ne présentent pas de dénominateur.

**Petits exemples**

• Soit $F = Y^2 - XZ \in \mathbf{k}[X,Y,Z]$. En prenant les suites $(X,Y,Z)$ et $(-Z,Y,0)$, on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} Z & -Y & -Z & . \\ -Y & . & . & -Z \\ X & . & . & Y \\ . & X & Y & Z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} . & -Y & -Z & . \\ -Y & -Z & . & -Z \\ X & . & -Z & Y \\ . & X & Y & . \end{bmatrix}$$

• Avec $F = X^2 + Y^2 + Z^2$ et les deux suites égales à $(X,Y,Z)$, on obtient $A^2 = F\,\mathrm{I}_2$ avec

$$A = \begin{bmatrix} Z & -Y & X & . \\ -Y & -Z & . & X \\ X & . & -Z & Y \\ . & X & Y & Z \end{bmatrix}$$

Note : on profite d'une part du fait que les suites sont égales donc $B = {}^{\mathrm{t}}A$ et d'autre part du fait que pour $n = 3$, la matrice $A$ est égale à sa swap-transposée.

# 4 Une relation dans le complexe de Tate

**Théorème 4.1.** *Considérons des suites $\underline{x},\underline{u},\underline{y},\underline{v}$ d'éléments de $\mathbf{A}$ de longueur $n$. On a l'égalité suivante :*

$$(\heartsuit) \qquad d_{x,u} \circ s_{y,v} \;+\; d_{y,v} \circ s_{x,u} \;=\; \big(F(\underline{x},\underline{v}) \;+\; F(\underline{y},\underline{u})\big)\,\mathrm{Id}_{\mathrm{T}}$$

*avec des notations évidentes : par exemple $d_{x,u}$ désigne l'application $d$ associée à $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x};\underline{u})$.*

***Preuve.*** On met à gauche $d_{x,u}\circ s_{y,v}$ et à droite $d_{y,v}\circ s_{x,u}$ (en s'aidant du calcul de $d\circ s$ fait précédemment)

$$\begin{array}{ccccc} \varepsilon_{\bullet-2}\otimes\delta_u\circ\delta_v & & \varepsilon_{\bullet-2}\otimes\delta_v\circ\delta_u & & \varepsilon_{\bullet-2}\otimes\big(\delta_u\circ\delta_v+\delta_v\circ\delta_u\big) \\ \varepsilon_\bullet\otimes\big(\partial_x\circ\delta_v+\delta_u\circ\partial_y\big) & + & \varepsilon_\bullet\otimes\big(\partial_y\circ\delta_u+\delta_v\circ\partial_x\big) & = & \begin{array}{c}\varepsilon_\bullet\otimes\big(\partial_x\circ\delta_v+\delta_v\circ\partial_x\big)\\ +\\ \varepsilon_\bullet\otimes\big(\delta_u\circ\partial_y+\partial_y\circ\delta_u\big)\end{array} \\ \varepsilon_{\bullet+2}\otimes\partial_x\circ\partial_y & & \varepsilon_{\bullet+2}\otimes\partial_y\circ\partial_x & & \varepsilon_{\bullet+2}\otimes\big(\partial_x\circ\partial_y+\partial_y\circ\partial_x\big) \end{array}$$

On utilise maintenant les 3 égalités de ($\clubsuit$) données juste avant la première section. Les deux premières égalités fournissent $\delta_u\circ\delta_v+\delta_v\circ\delta_u=0$ et $\partial_x\circ\partial_y+\partial_y\circ\partial_x=0$. Et la troisième égalité appliquée à deux reprises fournit

$$\varepsilon_\bullet\otimes\big(\partial_x\circ\delta_v+\delta_v\circ\partial_x\big)\;+\;\varepsilon_\bullet\otimes\big(\delta_u\circ\partial_y+\partial_y\circ\delta_u\big)\;=\;\varepsilon_\bullet\otimes\big(F(\underline{x},\underline{u})+F(\underline{y},\underline{v})\big)\,\mathrm{Id}_K$$

ce qui s'écrit encore

$$d_{x,u} \circ s_{y,v} \;+\; d_{y,v} \circ s_{x,u} \;=\; \big(F(\underline{x},\underline{v}) \;+\; F(\underline{y},\underline{u})\big)\,\mathrm{Id}_{\mathrm{T}}$$

□

**Proposition 4.2.** *Sur l'anneau $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle F(\underline{x},\underline{u})\rangle$, on a l'égalité suivante entre applications $\mathrm{T}_k \to \mathrm{T}_{k-1}$*

$$d_{x,u}\circ s_{y,v}\circ d_{x,u} \;=\; \big(F(\underline{x},\underline{v}) \;+\; F(\underline{y},\underline{u})\big)\,d_{x,u} \qquad \textit{pour tout } k \geqslant n$$

***Preuve.*** En composant ($\heartsuit$) par $d_{x,u}$ à droite, on obtient en degrés $k \geqslant n$

$$d_{x,u}\circ s_{y,v}\circ d_{x,u} \;+\; F(\underline{x},\underline{u})\,d_{y,v} \;=\; \big(F(\underline{x},\underline{v}) \;+\; F(\underline{y},\underline{u})\big)\,d_{x,u}$$

en utilisant que $s_{x,u}\circ d_{x,u} = F(\underline{x},\underline{u})\,\mathrm{Id}_{\mathrm{T}_k}$ pour $k \geqslant n$. Comme $F(\underline{x},\underline{u}) = 0$ sur l'anneau $\mathbf{B}$, l'égalité est prouvée ! □

# 5 Etude de l'application $\varphi = d_n$

Pour plus de clarté, dans toute la suite, on note $\varphi$ l'application $d_n$ de $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x},\underline{u})$.

**Théorème 5.1.** *Pour tout $\alpha \in \langle \underline{x},\underline{u}\rangle$, l'application $\varphi : \mathrm{T}_n \to \mathrm{T}_{n-1}$ est localement simple sur le localisé $\mathbf{B}_\alpha$. Plus précisément, pour tout $\alpha \in \langle \underline{x},\underline{u}\rangle$, il existe $\psi : \mathrm{T}_{n-1} \to \mathrm{T}_n$ (définie sur $\mathbf{A}$) dépendant de $\alpha$ telle que*

$$\varphi \circ \psi \circ \varphi \;=\; \alpha.\varphi \quad \textit{sur } \mathbf{B}$$

*On peut prendre $\psi = s_{\underline{y},\underline{v}}$ où $\underline{y}$ et $\underline{v}$ sont deux suites de longueur $n$ telles que $\alpha = F(\underline{x},\underline{v}) + F(\underline{y},\underline{u})$.*

*En particulier, $\mathrm{Im}\,\varphi$ est facteur direct dans le $\mathbf{B}_\alpha$-module libre $\mathrm{T}_{n-1}$. Par conséquent, $(\mathrm{Coker}\,\varphi)_\alpha$ est un $\mathbf{B}_\alpha$-module projectif de type fini.*

***Preuve.*** Cela résulte de la proposition 4.2. Pour le côté facteur direct, c'est du classique ! On sait que $\mathrm{T}_{n-1} = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus S$ avec $S = \ker(\varphi\circ\psi_0)$ où $\psi_0 = \frac{1}{\alpha}\psi$ (utiliser que $\varphi\circ\psi_0$ est un projecteur de $\mathrm{T}_{n-1}$ sur le localisé $\mathbf{B}_\alpha$). □

# 6 Enquête sur les idéaux déterminantiels de $\varphi$ sur l'anneau A

Le théorème 5.1 dit que l'application $\varphi$ est localement simple sur $\mathbf{B}_\alpha$. Si on croit au théorème II-5.26 du livre [LQ11], il doit exister un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(r_0,\dots,r_N)$ tel que sur chaque localisé $\mathbf{B}_\alpha[1/r_k]$, l'application $\varphi$ est de rang $k$. Ici, il se trouve qu'on a mieux : l'application $\varphi$ est de rang constant $r = N/2 = 2^{n-2}$ sur $\mathbf{B}_\alpha$. On va donc enquêter sur les mineurs de la matrice de $\varphi$ dans des bases ad hoc.

## 6.1 Une belle matrice $M$ pour $\varphi$

**Théorème 6.1.** *Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Dans des bases ad-hoc dépendant de $i$, la matrice de $\varphi = d_n : \mathrm{T}_n \to \mathrm{T}_{n-1}$ sur l'anneau $\mathbf{A}$ prend la forme suivante*

$$M = \begin{bmatrix} x_i\,\mathrm{I}_r & V \\ W & u_i\,\mathrm{I}_r \end{bmatrix} \qquad \textit{avec} \quad \begin{cases} VW = WV = (x_iu_i - F(\underline{x},\underline{u}))\,\mathrm{I}_r \\ V = -\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{sw}(W) \end{cases}$$

Par exemple, pour $n = 5$, voici la matrice de $\varphi$ dont il est question dans l'énoncé (pour plus de lisibilité, on a mis un point à la place de 0)

$$\begin{bmatrix}
x_1 & . & . & . & . & . & . & . & -x_5 & u_4 & -u_3 & . & u_2 & . & . & . \\
. & x_1 & . & . & . & . & . & . & x_4 & u_5 & . & -u_3 & . & u_2 & . & . \\
. & . & x_1 & . & . & . & . & . & -x_3 & . & u_5 & -u_4 & . & . & u_2 & . \\
. & . & . & x_1 & . & . & . & . & x_2 & . & . & . & u_5 & -u_4 & u_3 & . \\
. & . & . & . & x_1 & . & . & . & . & -x_3 & -x_4 & -x_5 & . & . & . & u_2 \\
. & . & . & . & . & x_1 & . & . & . & x_2 & . & . & -x_4 & -x_5 & . & u_3 \\
. & . & . & . & . & . & x_1 & . & . & . & x_2 & . & x_3 & . & -x_5 & u_4 \\
. & . & . & . & . & . & . & x_1 & . & . & . & x_2 & . & x_3 & x_4 & u_5 \\
u_5 & -u_4 & u_3 & -u_2 & . & . & . & . & u_1 & . & . & . & . & . & . & . \\
-x_4 & -x_5 & . & . & u_3 & -u_2 & . & . & . & u_1 & . & . & . & . & . & . \\
x_3 & . & -x_5 & . & u_4 & . & -u_2 & . & . & . & u_1 & . & . & . & . & . \\
. & x_3 & x_4 & . & u_5 & . & . & -u_2 & . & . & . & u_1 & . & . & . & . \\
-x_2 & . & . & -x_5 & . & u_4 & -u_3 & . & . & . & . & . & u_1 & . & . & . \\
. & -x_2 & . & x_4 & . & u_5 & . & -u_3 & . & . & . & . & . & u_1 & . & . \\
. & . & -x_2 & -x_3 & . & . & u_5 & -u_4 & . & . & . & . & . & . & u_1 & . \\
. & . & . & . & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & . & . & . & . & . & . & . & u_1
\end{bmatrix}$$

### Preuve du théorème

Soit $i \in [\![1,n]\!]$ fixé une fois pour toutes. Nous allons travailler avec l'endomorphisme $\varphi\circ\tau_i$ de $\mathrm{T}_{n-1}$ où $\tau_i = s_{e_i,e_i} : \mathrm{T}_{n-1} \to \mathrm{T}_n$. Comme $\tau_i$ est un isomorphisme (son inverse est $d_{e_i,e_i}$), la matrice de $\varphi$ dans des bases ad-hoc est donnée par celle de $\varphi\circ\tau_i$. De manière précise, si $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi\circ\tau_i)$ alors $\mathrm{Mat}_{\tau_i(\mathcal{B}),\mathcal{B}}(\varphi) = M$.

On commence par donner une décomposition de $\mathrm{T}_{n-1}$ sur laquelle l'endomorphisme $\varphi \circ \tau_i$ a fière allure. Voici la décomposition en question de $\mathrm{T}_{n-1}$, en deux modules libres de rang $r$ :

$$\mathrm{T}_{n-1} \;=\; E_i^- \oplus E_i^+ \qquad \text{avec} \quad E_i^- = \bigoplus_{\substack{I\in\mathcal{P}\\ i\notin I}} \mathbf{A}e_I \quad \text{et} \quad E_i^+ = \bigoplus_{\substack{I\in\mathcal{P}\\ i\in I}} \mathbf{A}e_I$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des parties de $\{1,\dots,n\}$.

Rappelons que

$$\varphi\circ\tau_i \;=\; \varepsilon_{\bullet-2}\otimes\delta_u\circ\delta_{e_i} \;+\; \varepsilon_\bullet\otimes(\partial_x\circ\delta_{e_i}+\delta_u\circ\partial_{e_i}) \;+\; \varepsilon_{\bullet+2}\otimes\partial_x\circ\partial_{e_i}$$

que l'on décompose en

$$\varphi\circ\tau_i \;=\; \big(\varepsilon_\bullet\otimes\partial_x\circ\delta_{e_i}+\varepsilon_{\bullet+2}\otimes\partial_x\circ\partial_{e_i}\big) \;+\; \big(\varepsilon_{\bullet-2}\otimes\delta_u\circ\delta_{e_i}+\varepsilon_\bullet\otimes\delta_u\circ\partial_{e_i}\big)$$

Comme $\mathrm{T}_n$ et $\mathrm{T}_{n-1}$ sont Koszul-complets, la graduation par strates horizontales devient inutile. On peut donc supprimer les $\varepsilon$. Autrement dit, cela a du sens de poser $\varphi = d_x + d_u$ où $d_x$ est égal à $\partial_x$ sur chaque $K_i$ de $\mathrm{T}_{n-1}$ (idem pour $d_u$ qui est égal à $\delta_u$ sur chaque $K_i$). On peut donc écrire

$$\varphi\circ\tau_i \;=\; d_x\circ\tau_i \;+\; d_u\circ\tau_i$$
$$\text{avec} \qquad d_x\circ\tau_i = \partial_x\circ\delta_{e_i}+\partial_x\circ\partial_{e_i} \qquad \text{et} \qquad d_u\circ\tau_i = \delta_u\circ\delta_{e_i}+\delta_u\circ\partial_{e_i}$$

Désormais, on omet l'indice $i$ sur $E^-$ et $E^+$.

**Proposition 6.2.** *On a les décompositions suivantes*

$$\begin{array}{c} \\ E^- \\ E^+ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} E^- & E^+ \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_i\,\mathrm{Id} & -\partial_{e_i}\partial_x \\ -\delta_{e_i}\partial_x & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \; d_x\circ\tau_i \qquad\qquad \begin{array}{c} \\ E^- \\ E^+ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} E^- & E^+ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -\partial_{e_i}\delta_u \\ -\delta_{e_i}\delta_u & u_i\,\mathrm{Id} \end{bmatrix} \end{array} = \; d_u\circ\tau_i$$

*Par conséquent*

$$\begin{array}{c} \\ E^- \\ E^+ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} E^- & E^+ \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_i\,\mathrm{Id} & -\partial_{e_i}(\partial_x+\delta_u) \\ -\delta_{e_i}(\partial_x+\delta_u) & u_i\,\mathrm{Id} \end{bmatrix} \end{array} = \; \varphi\circ\tau_i$$

***Preuve.*** On fait la preuve pour $d_x\circ\tau_i$.
⋆ Décomposition au départ. On a

$$d_x\circ\tau_i = \partial_x\circ\delta_{e_i}+\partial_x\circ\partial_{e_i}$$

On voit facilement que la restriction à $E^-$ est $(d_x\circ\tau_i)^- = \partial_x\circ\delta_{e_i}$ et que la restriction à $E^+$ est $(d_x\circ\tau_i)^+ = \partial_x\circ\partial_{e_i}$ (en effet, pour $\alpha\in E^-$ on a $\partial_{e_i}(\alpha)=0$ et pour $\alpha\in E^+$ on a $\delta_{e_i}(\alpha)=0$).

⋆ Décomposition à l'arrivée.
▷ Pour $(d_x\circ\tau_i)^-$. Comme $\partial_x\circ\delta_{e_i} = x_i\,\mathrm{Id} - \delta_{e_i}\circ\partial_x$, on a

$$(d_x\circ\tau_i)^- \;=\; x_i\mathrm{Id} - \delta_{e_i}\circ\partial_x$$

qui est la décomposition cherchée. En effet, on remarque que pour $\alpha\in E^-$, l'élément $x_i\alpha$ est dans $E^-$ et $(\delta_{e_i}\circ\partial_x)(\alpha)$ est dans $E^+$.
▷ Pour $(d_x\circ\tau_i)^+$. On utilise que $\partial_x\circ\partial_{e_i} = -\partial_{e_i}\circ\partial_x$ car $x$ et $e_i$ sont de degrés 1. Par conséquent, si $\alpha\in E^+$ alors $(d_x\circ\tau_i)^+(\alpha) = -(\partial_{e_i}\circ\partial_x)(\alpha)$ qui est dans $E^-$. □

**Proposition 6.3.** *On adopte les notations suivantes : on appelle $\beta$ le morphisme de $\mathbf{A}$-modules correspondant au coin Nord-Est de $\varphi\circ\tau_i$, c'est-à-dire $\beta : E^+\to E^-$. Quant au coin Sud-Ouest, on le note $\gamma : E^-\to E^+$. On indexe par $x$ (resp. $u$) lorsqu'il s'agit des coins de $d_x\circ\tau_i$ (resp. $d_u\circ\tau_i$).*

*On a les égalités :*

$$\begin{array}{lll} \beta_x\circ\gamma_x = 0 & \beta_u\circ\gamma_u = 0 & \beta\circ\gamma = (x_i\,u_i - F(\underline{x},\underline{u}))\,\mathrm{Id}_{E^-} \\ \gamma_x\circ\beta_x = 0 & \gamma_u\circ\beta_u = 0 & \gamma\circ\beta = (x_i\,u_i - F(\underline{x},\underline{u}))\,\mathrm{Id}_{E^+} \end{array}$$

***Preuve.*** On a $\gamma_x\beta_x = \delta_{e_i}\partial_x\partial_{e_i}\partial_x = -\delta_{e_i}\partial_{e_i}\partial_x\partial_x = 0$. De la même façon, $\beta_u\gamma_u = \partial_{e_i}\delta_u\delta_{e_i}\delta_u = -\partial_{e_i}\delta_{e_i}\delta_u\delta_u = 0$. Puis, $\beta_x\gamma_x = \partial_{e_i}\partial_x\delta_{e_i}\partial_x = \partial_{e_i}(x_i\,\mathrm{Id} - \delta_{e_i}\partial_x)\partial_x = x_i\,\partial_{e_i}\partial_x = -x_i\,\partial_x\partial_{e_i}$. Comme $\gamma_x$ prend ses valeurs dans $E^-$, l'expression est nulle. De la même façon, on a $\gamma_u\beta_u = \delta_{e_i}\delta_u\partial_{e_i}\delta_u = \delta_{e_i}(u_i\,\mathrm{Id} - \partial_{e_i}\delta_u)\delta_u = u_i\,\delta_{e_i}\delta_u = -u_i\,\delta_u\delta_{e_i}$. Comme $\beta_u$ prend ses valeurs dans $E^+$, l'expression est nulle. On peut à présent exprimer $\beta\circ\gamma$ :

$$\begin{aligned}
\beta\circ\gamma &= \beta_x\gamma_x + \beta_u\gamma_u + \beta_x\gamma_u + \beta_u\gamma_x \\
&= \partial_{e_i}\partial_x\delta_{e_i}\delta_u \;+\; \partial_{e_i}\delta_u\delta_{e_i}\partial_x \\
&= \partial_{e_i}(x_i\,\mathrm{Id} - \delta_{e_i}\partial_x)\delta_u \;-\; \partial_{e_i}\delta_{e_i}\delta_u\partial_x \\
&= x_i\partial_{e_i}\delta_u - F(\underline{x},\underline{u})\partial_{e_i}\delta_{e_i} \\
&= x_i(u_i\,\mathrm{Id} - \delta_u\partial_{e_i}) - F(\underline{x},\underline{u})\,(\mathrm{Id} - \delta_{e_i}\partial_{e_i})
\end{aligned}$$

Sur $E^-$, le morphisme $\partial_{e_i}$ est nul et on obtient l'égalité annoncée $\beta\circ\gamma = (x_i\,u_i - F(\underline{x},\underline{u}))\,\mathrm{Id}$. L'autre se montre de la même manière. □

**Fin de la preuve du théorème**

## 6.2 Etude de $\mathcal{D}_r(M)$ et $\mathcal{D}_{r+1}(M)$

La matrice $M$ va permettre de cerner les idéaux déterminantiels de $\varphi$ d'ordre $r$ et d'ordre $r+1$.

**Théorème 6.4.** *Sur l'anneau* $\mathbf{A}$*, on a les inclusions suivantes :*
*(i)* $\langle\underline{x},\,\underline{u}\rangle^e \subset \mathcal{D}_r(\varphi)$ *pour un exposant* $e\in\mathbb{N}$ *bien maîtrisé ;*
*(ii)* $\mathcal{D}_{r+1}(\varphi) \subset \langle F(\underline{x},\underline{u})\rangle$

*En fait, on a mieux en ce qui concerne* $\mathcal{D}_r(\varphi)$ *(non prouvé pour l'instant)*

$$\mathcal{D}_r(\varphi) + \langle F(\underline{x},\underline{u})\rangle \;=\; \langle\underline{x},\,\underline{u}\rangle^r + \langle F(\underline{x},\underline{u})\rangle$$

Admettons ce théorème un instant. On obtient alors ce qui était annoncé en introduction de la section 6.

**Corollaire 6.5.** *Pour tout* $\alpha\in\langle\underline{x},\,\underline{u}\rangle$*, l'application* $\varphi$ *est de rang* $r$ *sur le localisé* $\mathbf{B}_\alpha$*.*
*Note : c'est plus précis que le résultat « $\varphi$ est localement simple sur $\mathbf{B}_\alpha$ ».*

***Preuve.*** Sur $\mathbf{B}$, on a $\mathcal{D}_{r+1}(\varphi) = 0$ (cf. le théorème précédent) et sur le localisé $\mathbf{B}_\alpha$, on a $1\in\mathcal{D}_r(\varphi)$. □

**Preuve de** $(i)$ **du théorème 6.4**

Grâce à la tête de la matrice $M$, on voit que l'idéal $\mathcal{D}_r(M)$ contient $x_i^r$ et $u_i^r$. Donc $x_j^r$ et $u_j^r$ appartiennent à $\mathcal{D}_r(\varphi)$ pour tout $j$.

On utilise alors le résultat : pour des éléments $z_1,\dots,z_m$ d'un anneau et un exposant $r$, on a

$$\langle z_1,\dots,z_m\rangle^e \;\subset\; \langle z_1^r,\dots,z_m^r\rangle \qquad\qquad \text{pour } e = mr-(m-1).$$

En appliquant ce petit lemme avec $m=2n$, on obtient ce que l'on voulait !

**Preuve de** $(ii)$ **du théorème 6.4**

Voilà la trame de la preuve : sur $\mathbf{B}_{x_1(x_1+u_1)}$, la matrice $M$ est équivalente au projecteur standard de rang $r$ et par conséquent $\mathcal{D}_{r+1}(M) = 0$ sur $\mathbf{B}_{x_1(x_1+u_1)}$ (cf proposition 6.6). Ensuite, en procédant par généricité, on obtient $\mathcal{D}_{r+1}(M) = 0$ sur $\mathbf{B}$ c'est-à-dire $\mathcal{D}_{r+1}(M)\subset\langle F(\underline{x},\underline{u})\rangle$ sur $\mathbf{A}$.

**Proposition 6.6.** *Considérons la matrice* $M\in\mathbb{M}_{2r}(\mathbf{A})$ *du théorème 6.1 :*

$$M = \begin{bmatrix} x_i\,\mathrm{I}_r & V \\ W & u_i\,\mathrm{I}_r \end{bmatrix}$$

*La matrice* $M$ *est semblable au projecteur standard de rang* $r$ *sur les localisés de* $\mathbf{B}$ *en* $x_i(x_i+u_i)$ *et* $u_i(x_i+u_i)$*. En particulier,* $\mathcal{D}_{r+1}(M) = 0$ *sur* $\mathbf{B}_{x_i(x_i+u_i)}$ *et* $\mathbf{B}_{u_i(x_i+u_i)}$*.*

***Preuve.*** On applique le lemme qui suit à la matrice $\dfrac{1}{x_i+u_i}M \in \mathbb{M}_{2r}(\mathbf{B}_{x_i+u_i})$ avec

$$a=\frac{x_i}{x_i+u_i}, \qquad d=\frac{u_i}{x_i+u_i}, \qquad B=\frac{1}{x_i+u_i}V, \qquad C=\frac{1}{x_i+u_i}W$$

On a bien $a+d=1$ dans $\mathbf{B}_{x_i+u_i}$ et $VW=WV=ad\,\mathrm{I}_r$ (car on a $VW=WV=(x_iu_i-F(\underline{x},\underline{u}))\,\mathrm{I}_r$ sur $\mathbf{A}$ et $F(\underline{x},\underline{u})=0$ sur $\mathbf{B}$). □

**Lemme 6.7.** *Sur un anneau commutatif* $\mathbf{A}$*, considérons une matrice par blocs du type*

$$M=\begin{bmatrix} a\,\mathrm{I}_r & B \\ C & d\,\mathrm{I}_r \end{bmatrix} \qquad \textit{avec} \quad \begin{cases} BC=CB=ad\,\mathrm{I}_r \\ a+d=1 \end{cases}$$

*Alors $M$ est semblable au projecteur standard de rang $r$ sur les localisés $\mathbf{A}_a$ et $\mathbf{A}_d$. Par conséquent, $M$ est localement simple de rang $r$.*

*Plus précisément, en posant*

$$L=\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & B \\ 0 & \mathrm{I}_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\mathrm{I}_r & 0 \\ -C & a\mathrm{I}_r \end{bmatrix} \qquad \textit{et} \qquad R=\begin{bmatrix} a\mathrm{I}_r & 0 \\ C & a\mathrm{I}_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & -B \\ 0 & \mathrm{I}_r \end{bmatrix},$$

*on a*

$$LR=a^2\,\mathrm{I}_N \qquad \textit{et} \qquad LMR=a^2\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Même chose en remplaçant $a$ par $d$.*

**Remarque 6.8.** Ce qui est remarquable, c'est que le lemme du mineur inversible permet normalement de se ramener uniquement à une matrice du type $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ où $D$ n'est pas nécessairement nulle. Ici, on profite du fait que $BC=CB=ad\,\mathrm{I}_r$ et $a+d=1$ pour pouvoir se ramener à un projecteur standard sur chaque localisé. Dernière chose : $\frac{1}{a}L$ et $\frac{1}{a}R$ sont inverses l'une de l'autre sur $\mathbf{A}_a$ ; par conséquent, sur le localisé $\mathbf{A}_a$, la matrice $M$ est semblable au projecteur standard de rang $r$.

**Conclusion concernant la preuve de** $(ii)$ **du théorème 6.4.** On procède par généricité en utilisant $2n$ indéterminées $X_1,\dots,X_n,U_1,\dots,U_n$ sur $\mathbb{Z}$, l'anneau $\mathbf{B}=\mathbb{Z}[\underline{X},\underline{U}]/\langle F\rangle$ où $F=\sum X_iU_i$ et son localisé en $X_1(X_1+U_1)$. Considérons un mineur $P(\underline{X},\underline{U})$ d'ordre $r+1$ de la matrice $M$ « générisée ». Sur le localisé $\mathbf{B}_{X_1(X_1+U_1)}$, on a $\mathcal{D}_{r+1}(M)=0$ et donc ce mineur est nul. Par conséquent, il existe un exposant $e$ tel que $F$ divise $\big(X_1(X_1+U_1)\big)^e P$. Comme $F$ est premier avec $X_1(X_1+U_1)$ sur $\mathbb{Z}[\underline{X},\underline{U}]$, on en déduit que $F$ divise $P$ dans $\mathbb{Z}[\underline{X},\underline{U}]$, grâce à la factorialité de ce dernier anneau.

# 7 Point lisse sur une hypersurface

**Contexte.** Soit $F\in\mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]=\mathbf{k}[\underline{X}]$ un polynôme et $p=(p_1,\dots,p_n)\in\mathbf{k}^n$ tel que $F(p)=0$. On écrit alors $F=\sum_{i=1}^n(X_i-p_i)U_i(\underline{X})$ et on adopte les notations suivantes

$$a_i=\frac{\partial F}{\partial X_i}(p)\in\mathbf{k}, \qquad \mathbf{B}=\mathbf{k}[\underline{X}]/\langle F\rangle=\mathbf{k}[\underline{x}], \qquad \mathfrak{m}=\langle x_1-p_1,\dots,x_n-p_n\rangle$$

Enfin, on suppose que *les $a_i$ sont comaximaux* : cela traduit le fait que l'hypersurface, dont $\mathbf{B}$ est la $\mathbf{k}$-algèbre des coordonnées, est lisse au point $p$.

**Proposition 7.1** (Résolution d'un point lisse d'une hypersurface)**.** *Dans le contexte précédent, le* $\mathbf{B}$*-module* $\mathbf{k}\simeq\mathbf{B}/\mathfrak{m}$ *admet une résolution projective de longueur $n-1$ donnée par la construction de Tate :*

$$0\longrightarrow \operatorname{Coker}\varphi \xrightarrow{\overline{d_{n-1}}} \mathrm{T}_{n-2}\xrightarrow{d_{n-2}}\mathrm{T}_{n-3}\longrightarrow\cdots\cdots\longrightarrow\mathrm{T}_1\xrightarrow{d_1}\mathrm{T}_0\twoheadrightarrow\mathbf{B}/\mathfrak{m}$$

*Le rang du* $\mathbf{B}$*-module libre* $\mathrm{T}_k$ *est égal à* $\nu_k=\sum\limits_{\substack{i\leqslant k\\ i\equiv k \bmod 2}}\binom{n}{i}$ *et le* $\mathbf{B}$*-module projectif* $\operatorname{Coker}\varphi$ *est de rang constant égal à* $r=N/2=2^{n-2}$.

**Remarque 7.2.** La résolution obtenue n'est pas $\mathfrak{m}$-minimale car les $u_i$ ne sont dans $\mathfrak{m}$. De manière générale, un polynôme qui s'annule en $p$ s'écrit $F = \sum_{i=1}^{n}(X_i - p_i)U_i(\underline{X})$. On obtient donc $a_i := (\partial F/\partial X_i)(p) = U_i(p)$. Par ailleurs, $U_i(\underline{X}) - U_i(p) \in \langle X_1 - p_1, \ldots, X_n - p_n\rangle$ donc $u_i - a_i \in \mathfrak{m}$. Le fait que les $a_i$ soient comaximaux implique que les $u_i$ ne sont pas tous dans $\mathfrak{m}$.

***Preuve.*** On peut supposer, pour simplifier, que le point $p$ est l'origine. Remarquons tout d'abord que $F$ est non-diviseur de zéro car primitif en raison de la comaximalité des $a_i$. Donc le complexe $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}\,;\underline{u})$ est exact sur $\mathbf{B}$, d'après le théorème 1.10.

Par ailleurs, le théorème 5.1 dit que $\operatorname{Coker}\varphi$ est un module projectif de type fini sur tous les localisés $\mathbf{B}_\alpha$ avec $\alpha \in \langle \underline{x}, \underline{u}\rangle$. Cela s'applique en particulier à $\alpha = a_i$. Comme les $a_i$ sont comaximaux, $\operatorname{Coker}\varphi$ est un $\mathbf{B}$-module projectif de type fini. On obtient donc la résolution projective de $\mathbf{B}/\mathfrak{m}$ de longueur $n-1$ suivante

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker}\varphi \longrightarrow \mathrm{T}_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \mathrm{T}_{n-3} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \mathrm{T}_1 \xrightarrow{d_1} \mathrm{T}_0 \twoheadrightarrow \mathbf{B}/\mathfrak{m}$$

La flèche à l'extrême gauche $\operatorname{Coker}\varphi \to \mathrm{T}_{n-2}$ n'est ni plus ni moins que l'application $d_{n-1} : \mathrm{T}_{n-1} \to \mathrm{T}_{n-2}$ passée au quotient : la source a été quotientée par $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker} d_{n-1}$.

Pour le rang de $\operatorname{Coker}\varphi$ : on sait que $\operatorname{Im}\varphi$ est de rang $r$. Comme $\operatorname{Coker}\varphi = \mathrm{T}_{n-1}/\operatorname{Im}\varphi$, on obtient $\operatorname{rg}(\operatorname{Coker}\varphi) = \operatorname{rg}(\mathrm{T}_{n-1}) - \operatorname{rg}(\operatorname{Im}\varphi) = N - r = r$. □

**Proposition 7.3.** *Dans le contexte précédent, on a les propriétés suivantes :*
*(i) L'idéal* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathbf{B}$ *vérifie* $\operatorname{Gr}(\mathfrak{m}\,;\mathbf{B}) \geqslant n-1$.
*(ii) L'idéal* $\mathfrak{m}$ *est projectivement résoluble ; plus précisément, son résiduel vérifie* $\operatorname{Pd}(\mathbf{B}/\mathfrak{m}) \leqslant n-1$.
*(iii) Le* $\mathbf{B}/\mathfrak{m}$*-module* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ *est projectif de type fini de rang* $n-1$.
*En particulier, l'idéal* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathbf{B}$ *est parfait.*

La propriété $(i)$ découle du théorème fondamental de la profondeur (le polynôme $F$ est un élément régulier et on a bien entendu $\operatorname{Gr}(\underline{X}\,;\mathbf{k}[\underline{X}]) \geqslant n$).

La propriété $(ii)$ vient d'être établie. Ces deux propriétés réunies traduisent que $\mathfrak{m}$ est un idéal parfait.

***Preuve du point*** $(iii)$**.** On prépare le terrain avec ce lemme :

$$\textit{Soit } F \in \mathbf{k}[X_1,\ldots,X_n] \textit{ avec } F(\underline{0}) = 0 \textit{ et } \left(\frac{\partial F}{\partial X_1}\right)(\underline{0}) = a_1 \textit{ inversible dans } \mathbf{k}. \textit{ Alors}$$

$$\operatorname{Gr}\big((x_2,\ldots,x_n)\ ;\ \mathbf{k}[\underline{X}]/\langle F\rangle\big) \geqslant n-1$$

Montrons que la suite $(X_2,\ldots,X_n,F)$ est régulière. La seule question à se poser est : $F$ est-il régulier dans $\mathbf{k}[\underline{X}]/\langle X_2,\ldots,X_n\rangle \simeq \mathbf{k}[X_1]$ ? La réponse est oui car, dans ce quotient, $F$ est un polynôme primitif en $X_1$ (son coefficient en $X_1$ est inversible dans $\mathbf{k}$). A fortiori, la suite est complètement sécante, c'est-à-dire $\operatorname{Gr}\big((X_2,\ldots,X_n,F)\ ;\ \mathbf{k}[\underline{X}]\big) \geqslant n$. Comme $F$ est régulier, on obtient $\operatorname{Gr}\big((x_2,\ldots,x_n)\ ;\ \mathbf{k}[\underline{X}]/\langle F\rangle\big) \geqslant n-1$.

Venons-en maintenant à la preuve de $(iii)$. Dans $\mathbf{B}$, on a $F(\underline{x}) = 0$ *i.e.* $\sum_{i=1}^{n}\big(a_i + (u_i - a_i)\big)x_i = 0$. On a $u_i - a_i \in \mathfrak{m}$. Donc sur le localisé en $a_1$, la suite $(\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n})$ engendre le $(\mathbf{B}/\mathfrak{m})_{a_1}$-module $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)_{a_1}$. Mieux, c'est une base ! En effet, le lemme ci-dessus dit que $\operatorname{Gr}\big((x_2,\ldots,x_n)\,;\mathbf{B}_{a_1}\big) \geqslant n-1$. A fortiori la suite $(x_2,\ldots,x_n)$ est 1-sécante dans $\mathbf{B}_{a_1}$ donc indépendante au sens de Lech. Bilan : sur chaque localisation $\mathbf{B}_{a_i}$ (localisations qui sont comaximales), le module $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est libre de rang $n-1$ donc globalement, c'est un module projectif de type fini de rang $n-1$. □

**Bilan.** Le $\mathbf{B}$-module $\mathfrak{m}$ admet une résolution projective finie et le $\mathbf{B}/\mathfrak{m}$-module $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est projectif de rang $n-1$. Le théorème V-1.1 de Ferrand-Vasconcelos-Jouanolou-Quitté dit que l'idéal $\mathfrak{m}$ est localement complètement sécant de rang $n-1$ (c'est-à-dire que $\mathfrak{m}$ est engendré par une suite qui dans des localisations comaximales se retrouve être de profondeur supérieure à $n-1$). On retrouve donc la propriété $(i)$ à savoir $\operatorname{Gr}(\mathfrak{m}\,;\mathbf{B}) \geqslant n-1$.

**Remarque 7.4.** Plaçons-nous dans la situation où l'un des $U_i$ est un scalaire de $\mathbf{k}$. Disons $U_1 = a_1 \in \mathbf{k}$. Du coup, $F$ s'écrit $a_1X_1 + G$ avec $G \in \langle X_2,\ldots,X_n\rangle$. Supposons de plus que $a_1$ est inversible dans $\mathbf{k}$. Peut-on montrer que $(x_2,\ldots,x_n)$ est une suite régulière de $\mathbf{B}$ ? (note : il est facile de montrer que $X_2$ est régulier modulo $F$ et on n'a pas besoin de l'inversibilité de $a_1$). En tout cas, il est facile de montrer que cette suite est complètement sécante. Il suffit d'utiliser le lemme prouvé dans le point $(iii)$ de la proposition précédente.

# 8 Quelques exemples

## 8.1 L'anneau $\mathbb{B}_n$ de Jouanolou

L'anneau $\mathbb{B}_n$ de Jouanolou est défini par :

$$\mathbb{B}_n \;=\; \Bbbk[Z, X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n] \,/\, \langle Z(Z-1) + \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \rangle$$

Cet anneau joue un rôle fondamental dans la preuve de la réciproque du théorème de Suslin. A ce propos, Swan consacre la section 5 de son article *On a theorem of Mohar Kumar and Nori* [Swa] à cet anneau, section qu'il intitule d'ailleurs « A useful ring ».

Appliquons la construction de Tate à $\mathbf{k} = \Bbbk[Y_1, \dots, Y_n]$ (d'où l'importance de ne pas supposer que $\mathbf{k}$ est un corps !) et aux suites $\underline{x} = (Z, X_1, \dots, X_n)$ et $\underline{u} = (Z-1, Y_1, \dots, Y_n)$ qui sont de longueur $n+1$ à coefficients dans $\mathbf{A} = \mathbf{k}[Z, X_1, \dots, X_n]$. Attention ici, il y a un petit décalage : le $n+1$ ici joue le rôle du $n$ de la construction de Tate. Les conditions du théorème 7.1 sont réunies avec l'origine comme point lisse : en effet, on a $\dfrac{\partial F}{\partial Z} = 2Z - 1$ donc cette dérivée partielle évaluée en l'origine vaut $-1$. Pour $n = 3$ (et donc $n+1 = 4$), on obtient une résolution projective de longueur 3 du $\mathbb{B}_3$-module $\mathbb{B}_3/\langle z, x_1, x_2, x_3\rangle$ :

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} d_4 \xrightarrow{\overline{d_3}} \mathbb{B}_3^7 \xrightarrow{d_2} \mathbb{B}_3^4 \xrightarrow{d_1} \mathbb{B}_3 \twoheadrightarrow \mathbb{B}_3/\langle z, x_1, x_2, x_3\rangle$$

avec les différentielles suivantes : $d_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$

$$d_2 = \begin{bmatrix} -x_1 & -x_2 & -x_3 & . & . & . & z-1 \\ z & . & . & -x_2 & -x_3 & . & y_1 \\ . & z & . & x_1 & . & -x_3 & y_2 \\ . & . & z & . & x_1 & x_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad d_3 = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & . & . & -y_1 & z-1 & . & . \\ -x_1 & . & x_3 & . & -y_2 & . & z-1 & . \\ . & -x_1 & -x_2 & . & -y_3 & . & . & z-1 \\ z & . & . & x_3 & . & -y_2 & y_1 & . \\ . & z & . & -x_2 & . & -y_3 & . & y_1 \\ . & . & z & x_1 & . & . & -y_3 & y_2 \\ . & . & . & . & z & x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$$

et $\operatorname{Coker} d_4$ est un module projectif de présentation finie engendré par 8 générateurs et de rang 4.

## 8.2 L'hypersurface de Fossum

Lafon et Marot (cf. [LM02, page 150]) donnent l'exemple d'une hypersurface affine de $\mathbb{A}^4(\mathbf{k})$ avec $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ dont l'anneau des coordonnées $\mathbf{B} = \mathbf{k}[X_1, X_2, X_3, X_4]/\langle F\rangle$ est normal mais n'est pas régulier. Il s'agit de $F = X_4^2 + X_1X_2X_4 + X_2^3 + X_3X_1^2$ qui n'est pas lisse en l'origine. En prenant $\underline{U} = (X_1X_3 + X_2X_4,\, X_2^2,\, 0,\, X_4)$, le complexe de Tate $\mathrm{T}_\bullet(\underline{x}, \underline{u})$ fournit une $\mathbf{B}$-résolution libre infinie du $\mathbf{B}$-module $\mathbf{B}/\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$ de la forme :

$$\cdots \xrightarrow{d_5} \mathbf{B}^8 \xrightarrow{d_4} \mathbf{B}^8 \xrightarrow{d_3} \mathbf{B}^7 \xrightarrow{d_2} \mathbf{B}^4 \xrightarrow{d_1} \mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{B}/\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$$

## 8.3 L'exemple de $\mathbb{SL}_2(\mathbf{k})$

Considérons $F = X_{11}X_{22} - X_{21}X_{12} - 1 \in \mathbf{k}[\underline{X}]$ et $p = (a, b, c, d)$ un zéro de $F$. On note $\mathbf{A} = \mathbf{k}[\underline{X}]/\langle F\rangle = \mathbf{k}[\underline{x}]$ et $X$ la matrice générique de déterminant 1 *i.e.* la matrice $\left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22}\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{SL}_2(\mathbf{A})$. On identifie $p \in \mathbf{k}^4$ au $\mathbf{k}$-point de $\mathbb{SL}_2$ c'est-à-dire à la matrice $P = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{SL}_2(\mathbf{k})$. Pour finir, introduisons la suite $\underline{y} = (x_{11} - a,\, x_{12} - b,\, x_{21} - c,\, x_{22} - d)$ et l'idéal $\mathfrak{m} = \langle \underline{y}\rangle$.

On cherche à résoudre l'idéal $\mathfrak{m}$ sur $\mathbf{A}$ ou plutôt son résiduel $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$. Comme $\mathbf{k}[\mathbb{SL}_2]/\mathbf{k}$ est lisse, la théorie dit que tout idéal de type fini de $\mathbf{A} = \mathbf{k}[\mathbb{SL}_2]$ admet une résolution projective finie pourvu que $\mathbf{k}$ soit régulier. On va en fait fournir une résolution explicite de $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$ sans aucune hypothèse sur l'anneau $\mathbf{k}$. D'une part, en utilisant le complexe de Tate, on obtient une résolution projective de longueur 3. D'autre part, comme la nature fait bien les choses, on arrive à fournir une résolution *libre* de longueur 3.

Afin d'utiliser la construction de Tate, on commence par décomposer $F$ de la façon suivante (cela correspond à la décomposition en $\mathbf{k}$-modules de la page 159) :

$$F = (X_{11} - a)d - (X_{12} - b)c - (X_{21} - c)X_{12} + (X_{22} - d)X_{11}$$

On peut faire une première remarque concernant le rôle de $\mathbf{k}$. Avec l'écriture de $F$ ci-dessus, on constate que si $c$ ou $d$ est inversible alors l'idéal $\mathfrak{m}$ est 3-engendré (idem si $a$ ou $b$ est inversible : profiter du rôle symétrique des acteurs pour obtenir une autre écriture de $F$ dans laquelle interviennent les coefficients $a$ et $b$). Et comme $\mathrm{Gr}(\underline{y}\,;\mathbf{A}) \geqslant 3$, l'idéal $\mathfrak{m} = \langle \underline{y} \rangle$ est engendré par une suite complétement sécante. Ainsi le complexe de Koszul de $\underline{y}$ sur $\mathbf{A}$ permet de résoudre $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$. Ce que l'on cherche à réaliser est donc trivial si $\mathbf{k}$ est un corps car alors au moins un coefficient de $P$ est inversible (en raison de l'égalité $ad-bc=1$). Mais dans la vie, il n'y a pas que les corps ! En travaillant sur $\mathbb{Z}$, on voit que la situation se complique légèrement car il existe des matrices $P \in \mathbb{SL}_2(\mathbb{Z})$ dont aucun coefficient n'est inversible, comme c'est le cas de la matrice $P = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

**Que nous dit le complexe de Tate ?**

Avant de faire quoi que ce soit, précisons que nous sommes en mesure d'appliquer la proposition 7.1 car $\mathbf{A} = \mathbf{k}[\mathbb{SL}_2]$ est lisse sur $\mathbf{k}$ (on peut aussi voir à la main que le point $P$ est lisse car l'évaluation des dérivées partielles en $P$ donne $a$, $b$, $c$ et $d$ qui sont comaximaux en raison de $ad-bc=1$). On introduit une suite $\underline{u} = (u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22})$ de $\mathbf{A}$ de sorte que $\sum x_{ij}u_{ij} = 0$. Par exemple, on peut prendre la suite $\underline{u} = (d, -c, -x_{12}, x_{11})$ relative à la décomposition de $F$ obtenue ci-dessus. Le complexe de Tate fournit la résolution projective de longueur 3 suivante :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathbf{A}^7 \xrightarrow{d_2} \mathbf{A}^4 \xrightarrow{d_1} \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}/\mathfrak{m}$$

où $d_1 = \begin{bmatrix} x_{11}-a & x_{12}-b & x_{21}-c & x_{22}-d \end{bmatrix}$,

$$d_2 = \begin{bmatrix} -x_{12}+b & -x_{21}+c & -x_{22}+d & . & . & . & u_{11} \\ x_{11}-a & . & . & -x_{21}+c & -x_{22}+d & . & u_{12} \\ . & x_{11}-a & . & x_{12}-b & . & -x_{22}+d & u_{21} \\ . & . & x_{11}-a & . & x_{12}-b & x_{21}-c & u_{22} \end{bmatrix}$$

et où $E$ est un $\mathbf{A}$-module projectif 8-engendré de rang 4 (bien précis car on sait que $E = \mathrm{Coker}\, d_3$).

**Une belle résolution libre pour l'idéal d'un k-point de $\mathbb{SL}_2$**

**Proposition 8.1.** *Le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$ admet la résolution libre de longueur 3 suivante :*

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{1 \,\mapsto\, X-P} \mathbb{M}_2(\mathbf{A}) \xrightarrow{M \,\mapsto\, \widetilde{M}+\widetilde{X}M\widetilde{P}} \mathbb{M}_2(\mathbf{A}) \xrightarrow{M \,\mapsto\, \mathrm{tr}((X-P)M)} \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}/\mathfrak{m}$$

*où pour une matrice $A$, on désigne par $\widetilde{A}$ sa matrice adjointe (la transposée de la matrice des cofacteurs). Dans la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{col}} = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ de $\mathbb{M}_2(\mathbf{A})$, cela se traduit par*

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{d_3} \mathbf{A}^4 \xrightarrow{d_2} \mathbf{A}^4 \xrightarrow{d_1} \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\mathfrak{m}$$

*avec* $d_1 = \begin{bmatrix} x_{11}-a & x_{12}-b & x_{21}-c & x_{22}-d \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$,

$$d_2 = \begin{bmatrix} x_{22}\,d & -x_{12}\,d & -x_{22}\,c & x_{12}\,c+1 \\ -x_{21}\,d & x_{11}\,d-1 & x_{21}\,c & -x_{11}\,c \\ -x_{22}\,b & x_{12}\,b & x_{22}\,a-1 & -x_{12}\,a \\ x_{21}\,b+1 & -x_{11}\,b & -x_{21}\,a & x_{11}\,a \end{bmatrix} \quad \textit{et} \quad d_3 = \begin{bmatrix} x_{11}-a \\ x_{21}-c \\ x_{12}-b \\ x_{22}-d \end{bmatrix}.$$

***Preuve.*** Pour vérifier qu'il s'agit bien d'une résolution, on va profiter du caractère libre. Plus précisément, on montre que c'est un complexe, puis on utilise le critère « What makes a complex exact ? » de Buchsbaum-Eisenbud (cf. théorème VII-3.1).

Pour montrer que $d_1 \circ d_2(M) = 0$, on utilise l'égalité $A\widetilde{A} = \mathrm{I}_2$ pour une matrice $A$ de déterminant 1, l'égalité $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, ainsi que $\widetilde{A+B} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$ et $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\widetilde{A})$ *égalités valables pour des matrices carrées de taille* 2. Le calcul de $d_3 \circ d_2(M)$ utilise également ces égalités (celles ne faisant pas intervenir la trace, pour être plus précis). On est donc en présence d'un complexe de modules libres. Analysons les

idéaux caractéristiques $\mathfrak{D}_k = \mathcal{D}_{r_k}(d_k)$ où $r_k$ désigne le rang attendu de $d_k$. Tout d'abord, on a $r_3 = 1$, $r_2 = 3$ et $r_1 = 1$. Il est clair que $\mathcal{D}_1(d_3) = \mathcal{D}_1(d_1) = \langle \underline{y} \rangle$. Par ailleurs, il s'avère qu'un mineur d'ordre 3 de $d_2$ est égal à $\pm y_{ij} y_{k\ell}$, donc $\mathcal{D}_3(d_2)$ contient $\langle \underline{y} \rangle^2$. Le critère de Buchsbaum-Eisenbud est vérifié si $\mathrm{Gr}(\mathfrak{D}_k) \geqslant k$, ce qui est bien le cas en vertu de l'inégalité $\mathrm{Gr}(\underline{y}) \geqslant 3$. □

**Une petite curiosité.** Notons $G_{X,P} : \mathbb{M}_2(\mathbf{A}) \to \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ la différentielle du milieu $M \mapsto \widetilde{M} + \widetilde{X} M \widetilde{P}$. Si on a l'oeil, on voit que sa matrice $d_2$ dans la base indiquée est symétrique une fois que l'on a remplacé $X$ par ${}^{\mathrm{t}}X$ et $P$ par ${}^{\mathrm{t}}P$. Cela se traduit de manière intrinsèque par l'égalité

$$\langle G_{X,P}(M) \mid N \rangle \;=\; \langle M \mid G_{{}^{\mathrm{t}}X,\,{}^{\mathrm{t}}P}(N) \rangle$$

où $\langle A \mid B \rangle := \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ pour lequel la base $\mathcal{B}_{\mathrm{col}}$ est orthonormée. Cette égalité se vérifie en utilisant que $\widetilde{\widetilde{A}} = A$ pour toute matrice carrée $A$ de taille 2.

**Pour symétriser...** A noter que l'on peut jouer sur le choix des bases des deux $\mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ qui interviennent dans la résolution intrinsèque si l'on veut que les matrices extrêmes (tout à gauche et tout à droite) soient transposées l'une de l'autre. Donnons quelques détails.

On considère l'application linéaire

$$G_{X,P} : \big(\mathbb{M}_2(\mathbf{A}), \mathcal{B}_{\mathrm{row}}\big) \;\longrightarrow\; \big(\mathbb{M}_2(\mathbf{A}), \mathcal{B}_{\mathrm{col}}\big)$$

équipée des bases $\mathcal{B}_{\mathrm{row}} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ et $\mathcal{B}_{\mathrm{col}} = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$. Dans ces bases, la résolution intrinsèque prend la forme suivante

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{d_3} \mathbf{A}^4 \xrightarrow{d_2} \mathbf{A}^4 \xrightarrow{d_1} \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}/\mathfrak{m}$$

avec $d_1 = \begin{bmatrix} x_{11} - a & x_{12} - b & x_{21} - c & x_{22} - d \end{bmatrix}$,

$$d_2 = \begin{bmatrix} x_{22}\,d & -x_{22}\,c & -x_{12}\,d & x_{12}\,c + 1 \\ -x_{21}\,d & x_{21}\,c & x_{11}\,d - 1 & -x_{11}\,c \\ -x_{22}\,b & x_{22}\,a - 1 & x_{12}\,b & -x_{12}\,a \\ x_{21}\,b + 1 & -x_{21}\,a & -x_{11}\,b & x_{11}\,a \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad d_3 = \begin{bmatrix} x_{11} - a \\ x_{12} - b \\ x_{21} - c \\ x_{22} - d \end{bmatrix} = {}^{\mathrm{t}}d_1.$$

**Et les relateurs triviaux ?** Il est licite de se demander comment se traduit le fait qu'un relateur trivial est dans l'image de $G_{X,P}$. Prenons un petit exemple avec le relateur trivial $-y_{12}E_{11} + y_{11}E_{21}$. Cette matrice est bien dans l'image de $G_{X,P}$ : c'est l'image de $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{smallmatrix}\right)$. En effet, on vérifie avec le choix de la base $\mathcal{B}_{\mathrm{col}}$ de la proposition 8.1 que l'on a l'égalité :

$$d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} -x_{12} + b \\ x_{11} - a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Chapitre IX

# Régularité en dimension 1, idéaux inversibles

## 1 Objectifs et petit exemple introductif

Le but final du chapitre est de présenter un algorithme permettant de calculer la fermeture intégrale d'un anneau principal (comme $\mathbb{Z}$ et $\mathbf{k}[X]$) dans une extension séparable finie de son corps des fractions (en supposant les corps résiduels parfaits). La stratégie adoptée repose sur l'inversibilité des idéaux 2-engendrés. Nous consacrons donc toute une section à ce sujet dans un cadre relativement général. Nous revenons ensuite sur le critère de Dedekind pour une algèbre monogène en le comparant, sur des exemples, à notre critère d'inversibilité des idéaux 2-engendrés. La section suivante concerne les algèbres non-monogènes. Nous décrivons le procédé qui sera le coeur de notre algorithme : étant donné un idéal, comment construire un sur-anneau qui permette de le 2-engendrer puis de l'inverser. Ce procédé fournit un nouvel algorithme du calcul de l'anneau des entiers d'un corps de nombres qui, en un certain sens, se situe entre les algorithmes Round 2 et Round 4. Nous accompagnons notre algorithme d'une implémentation en Magma.

Voilà, en guise d'introduction, un exemple très classique en théorie des nombres. Bien qu'il ne reflète pas tout ce qui va se passer, il permet de mettre en avant la philosophie générale : « inverser les idéaux ». Considérons le corps de nombres $\mathbf{K} = \mathbb{Q}[X]/\langle\Phi_n\rangle = \mathbb{Q}(\omega)$ où $\omega$ est une racine primitive $n$-ème de l'unité. Il est bien connu que l'anneau des entiers de $\mathbf{K}$ est $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \mathbb{Z}[\omega]$. Dit autrement, l'anneau $\mathbb{Z}[\omega]$ est intégralement clos. C'est même un anneau de Dedekind c'est-à-dire noethérien de dimension 1 et intégralement clos. On va retrouver ce résultat en utilisant la caractérisation des anneaux de Dedekind via les idéaux inversibles : *un anneau est de Dedekind si et seulement si tout idéal non nul est inversible.*

En notant $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[\omega]$, on va montrer que les idéaux $\sqrt{p\mathbf{A}}$ sont inversibles pour tout premier $p \in \mathbb{Z}$. Pour un premier $p$ donné, on sait que $\sqrt{p\mathbf{A}} = \langle p, G(\omega)\rangle$ où $G \in \mathbb{Z}[X]$ est un relèvement de la partie sans facteur carré de $\Phi_n$. Deux cas se présentent.

Si $p$ ne divise pas $n$, alors $\Phi_n$ est séparable modulo $p$ : c'est un diviseur du polynôme séparable $X^n - 1$ modulo $p$ (séparable, car premier avec sa dérivée) de sorte que la partie sans facteur carré modulo $p$ est $\overline{\Phi_n}$. On peut donc prendre $G = \Phi_n$. Ainsi $\sqrt{p\mathbf{A}} = \langle p, \Phi_n(\omega)\rangle = \langle p\rangle$ et est donc inversible.

Sinon $n = mp^k$ avec $m$ non divisible par $p$. Rappelons que, dans $\mathbb{Z}[X]$, on a

$$\Phi_n(X) \;=\; \Phi_{mp}(X^{p^{k-1}}) \;=\; \frac{\Phi_m(X^{p^k})}{\Phi_m(X^{p^{k-1}})}$$

fournissant modulo $p$ :

$$\Phi_n(X) \;\equiv\; \frac{\Phi_m(X)^{p^k}}{\Phi_m(X)^{p^{k-1}}} \;\equiv\; \Phi_m(X)^{\varphi(p^k)} \qquad \bmod p$$

Le polynôme $\Phi_m$ est séparable modulo $p$ donc un relevé de la partie sans facteur carré de $\Phi_n$ modulo $p$ est $G = \Phi_m$. Ainsi $\sqrt{p\mathbf{A}} = \langle p, \Phi_m(\omega)\rangle$. La fin de la démonstration est consacrée à la preuve de l'appartenance $p \in \langle\Phi_m(\omega)\rangle$ faisant de $\sqrt{p\mathbf{A}}$ un idéal principal donc inversible.

Considérons $\zeta$ une racine primitive $p$-ème de l'unité. On a

$$\Phi_p(X) \;=\; \sum_{i=0}^{p-1} X^i \;=\; \prod_{i=1}^{p-1}(X-\zeta^i) \qquad \text{d'où, en faisant } X:=1, \quad p=\prod_{i=1}^{p-1}(1-\zeta^i) \;\in\; \langle 1-\zeta\rangle_{\mathbb{Z}[\zeta]}$$

On applique maintenant cela à $\zeta = \omega^{mp^{k-1}}$ et on obtient $p \in \langle 1-\omega^{mp^{k-1}}\rangle \subset \langle \Phi_m(\omega)\rangle$, la dernière inclusion étant due au fait que $\Phi_m$ divise $X^{mp^{k-1}}-1$ dans $\mathbb{Z}[X]$.

# 2 Généralités

## 2.1 Module localement monogène, module projectif de type fini de rang 1

Un module $M$ est dit localement monogène lorsqu'il existe des monoïdes comaximaux $S_1,\dots,S_n$ de $\mathbf{A}$ tels que chaque $M_{S_j}$ est monogène comme $\mathbf{A}_{S_j}$-module. Un tel module est nécessairement de type fini. À partir d'un système fini de générateurs, on peut donner une caractérisation matricielle relativement pratique. Plus précisément, $M=\mathbf{A}x_1+\cdots+\mathbf{A}x_n$ est localement monogène si, et seulement si, il existe une matrice $A\in\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ telle que

$$\operatorname{tr} A = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_2\left(\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ a_{i1} & \dots & a_{in}\end{bmatrix}\right) \;=\; 0$$

c'est-à-dire telle que

$$\operatorname{tr} A = 1 \qquad \text{et} \qquad a_{ij}x_k \;=\; a_{ik}x_j$$

On convient de dire que la matrice $A$ est une matrice de localisation monogène pour $\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)$.

**Proposition 2.1.** *Si $M$ est fidèle et localement monogène, alors $M$ est isomorphe à l'image d'une matrice de projection de rang 1. Plus précisément, si $A$ est une matrice de localisation monogène pour un système générateur $(x_1,\dots,x_n)$ de $M$, alors $A$ est une matrice de projection de rang 1 et on a la suite exacte courte*

$$\mathbf{A}^n \xrightarrow{\;I_n-A\;} \mathbf{A}^n \xrightarrow{\;[x_1\cdots x_n]\;} M$$

*Réciproquement, si $M$ est isomorphe à l'image d'une matrice de projection de rang 1 alors $M$ est fidèle et localement monogène.*

La preuve du sens direct repose sur les 3 propriétés suivantes d'une matrice de localisation monogène. Pour les détails, confer [LQ11, proposition V-7.4].

• L'idéal $\mathcal{D}_2(A)$ annule $M$. Pour le voir, considérer le développement par rapport à la dernière ligne puis par rapport à la première colonne du déterminant de la matrice $3\times 3$ suivante $\begin{bmatrix} x_j & x_k & x_h \\ a_{ij} & a_{ik} & a_{ih} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} & a_{\ell h}\end{bmatrix}$.

• L'idéal $\mathcal{D}_1(A^2-A)$ annule $M$. Le point précédent permet d'écrire $A^2=\operatorname{tr}(A)A$ modulo $\operatorname{Ann} M$. On termine en utilisant que $\operatorname{tr} A=1$.

• Pour tout $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, on a $\beta_1 M+\cdots+\beta_n M=\mathbf{A}.\big(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\big)$ en notant $\beta=A\alpha$.

**Remarque 2.2.** Dans le cas où le module $M$ est un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$, on utilisera plutôt la terminologie « idéal localement principal » et « matrice de localisation principale ».

## 2.2 Module localement monogène sur un anneau zéro-dimensionnel

**Proposition 2.3.** *Tout module $M=\mathbf{A}x_1+\cdots+\mathbf{A}x_n$ localement monogène sur un anneau $\mathbf{A}$ zéro-dimensionnel est monogène, engendré par $t_1x_1+\cdots+t_nx_n$ où $(t_1,\dots,t_n)$ est un système fondamental d'idempotents orthogonaux de $\mathbf{A}$.*

***Preuve.*** Par hypothèse, il existe $u_1, \dots, u_n$ tels que $\sum u_i = 1$ et $u_i \in (\mathbf{A}x_i : M)$. Supposons un instant avoir construit un s.f.i.o. $(t_1, \dots, t_n)$ vérifiant $t_i \in (\mathbf{A}x_i : M)$. En posant $x = \sum t_i x_i$, on a alors $x_k \in \langle x \rangle$ pour tout $k$. En effet, $t_i x_k \in \langle x_i \rangle$ par définition de $t_i$. En multipliant par $t_i$, on obtient $t_i x_k \in \langle t_i x_i \rangle = \langle t_i x \rangle$. Il ne reste plus qu'à sommer sur $i$ ces appartenances pour obtenir $x_k \in \langle x \rangle$.

Voyons maintenant comment construire le s.f.i.o. en question. L'anneau est zéro-dimensionnel donc, d'après [LQ11, lemme IV-8.2.], il existe pour chaque $u_i$ un entier $d$ (on peut prendre le même entier pour tout $i$) et un idempotent $s_i$ tels que $\langle u_i^d \rangle = \langle s_i \rangle$. Au passage, on constate que $1 \in \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ et que $s_i \in (\mathbf{A}x_i : M)$. En posant $r_i = 1 - s_i$, on a l'égalité

$$\begin{aligned} 1 &= s_1 + r_1 = s_1 + r_1(s_2 + r_2) = s_1 + r_1 s_2 + r_1 r_2 (s_3 + r_3) = \cdots \\ &= s_1 + r_1 s_2 + r_1 r_2 s_3 + \cdots + r_1 r_2 \cdots r_{n-1} s_n + r_1 r_2 \cdots r_n \end{aligned}$$

permettant de définir un s.f.i.o. $(t_1, \dots, t_{n+1})$ via $t_i = r_1 \cdots r_{i-1} s_i$ pour $i \leqslant n$ et $t_{n+1} = r_1 \cdots r_n$. D'une part, on a $t_i \in (\mathbf{A}x_i : M)$ pour tout $i \leqslant n$. D'autre part, $t_{n+1} = 0$ car l'idempotent $1 - t_{n+1}$ est inversible en raison de $1 \in \langle s_1, \dots, s_n \rangle = \langle 1 - t_{n+1} \rangle$. □

Ce résultat est un cas très particulier d'un théorème de Forster-Swan [LQ11, Théorème XIV-3.6] que voici :

> *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif tel que* $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant d$ *et* $M$ *un* $\mathbf{A}$*-module de type fini. Si* $M$ *est localement engendré par* $r$ *éléments, alors il est engendré par* $d + r$ *éléments.*

On peut bien entendu appliquer la proposition à un idéal de l'anneau :

**Proposition 2.4.** *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif tel que* $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant 0$ *et soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathbf{A}$*. Si* $\mathfrak{a}$ *est localement principal alors* $\mathfrak{a}$ *est principal.*

## 2.3 Un résultat (de mathématiques) classique(s) revisité

**Lemme 2.5.** *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal radical de* $\mathbf{A}$ *tel que* $\operatorname{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) \leqslant 0$*. Alors pour tout idéal* $\mathfrak{b}$ *de type fini contenant* $\mathfrak{a}$*, on a*

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\, \mathfrak{b}$$

*En particulier, si* $\mathfrak{a}$ *est inversible alors tout idéal de type fini contenant* $\mathfrak{a}$ *est inversible.*

***Preuve.*** L'anneau $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est zéro-dimensionnel réduit. On considère l'image de l'idéal $\mathfrak{b}$ de type fini contenant $\mathfrak{a}$ dans ce quotient. D'après le lemme IV-8.5 de [LQ11], cet idéal est engendré par un idempotent. Par conséquent, il existe un élément $e$ idempotent modulo $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{b} = \langle e \rangle + \mathfrak{a}$. On a alors $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \langle 1 - e \rangle + \mathfrak{a}$ puis $\mathfrak{b}\,(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$ (utiliser $e(1 - e) \in \mathfrak{a}$). □

**Proposition 2.6.** *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal radical de* $\mathbf{A}$ *tel que* $\operatorname{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) \leqslant 0$*. Si* $\mathfrak{a}$ *est inversible alors tout idéal de type fini contenant une puissance de* $\mathfrak{a}$ *est inversible.*

***Preuve.*** Appelons $\mathfrak{c}$ l'idéal de type fini contenant une puissance de $\mathfrak{a}$, disons $\mathfrak{a}^e \subset \mathfrak{c}$. On introduit la suite croissante d'idéaux de type fini $(\mathfrak{c}_k)_{k \geqslant 1}$ définie par la formule de récurrence suivante :

$$\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{c}_{k+1} = (\mathfrak{c}_k : \mathfrak{b}_k) \quad \text{où} \quad \mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k + \mathfrak{a}.$$

de sorte que $\mathfrak{c}_k = \mathfrak{b}_k \mathfrak{c}_{k+1}$. En effet, supposons avoir construit l'idéal $\mathfrak{c}_k$ de type fini. Alors l'idéal de type fini $\mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k + \mathfrak{a}$ contient l'idéal $\mathfrak{a}$ inversible, donc d'après le lemme précédent, $\mathfrak{b}_k$ est inversible. D'après le résultat fondamental :

> *Soit* $\mathfrak{i}$ *inversible et* $\mathfrak{j}$ *de type fini tel que* $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{i}$*. Alors* $(\mathfrak{j} : \mathfrak{i})$ *est de type fini et* $\mathfrak{j} = \mathfrak{i}(\mathfrak{j} : \mathfrak{i})$*.*

appliqué à $\mathfrak{i} = \mathfrak{b}_k$ et $\mathfrak{j} = \mathfrak{c}_k$ (qui est bien inclus dans $\mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k + \mathfrak{a}$), on en déduit que $\mathfrak{c}_k = \mathfrak{b}_k \mathfrak{c}_{k+1}$ avec $\mathfrak{c}_{k+1} = (\mathfrak{c}_k : \mathfrak{b}_k)$ de type fini.

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathfrak{c}_{k+1} = (\mathfrak{c} : \mathfrak{a}^k) \quad \text{et} \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_k \mathfrak{c}_{k+1}$$

Pour montrer la première égalité, on écrit que $\mathfrak{c}_2 = (\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{c}_1 + \mathfrak{a}) = (\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{a})$ puis $\mathfrak{c}_3 = (\mathfrak{c}_2 : \mathfrak{a}) = ((\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{a}) : \mathfrak{a}) = (\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{a}^2)$ et ainsi de suite. Pour la deuxième égalité, il suffit d'utiliser $\mathfrak{c}_k = \mathfrak{b}_k \mathfrak{c}_{k+1}$.

Achevons à présent la preuve. Comme $\mathfrak{a}^e \subset \mathfrak{c}$, l'idéal $\mathfrak{c}_{e+1} = (\mathfrak{c} : \mathfrak{a}^e)$ contient 1. On récupère ainsi la décomposition $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_e$. Or chaque $\mathfrak{b}_k$ est inversible donc l'idéal $\mathfrak{c}$ se retrouve inversible (en tant que produit d'idéaux inversibles). □

**Proposition 2.7.** *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau commutatif tel que* $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 1$ *et* $\mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ *inversible. Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal de type fini fidèle. Alors* $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}) \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ *et* $\mathfrak{a}$ *est principal engendré par un élément régulier.*

***Preuve.*** Soit $x \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$. Pour tout $a \in \mathfrak{a}$, on a l'égalité $((1+ux)x^e + va)\,a^e = 0$ en raison de l'hypothèse sur la dimension (cf. définition VI-1.1). Or $1+ux$ est inversible donc $x^e \in \mathrm{Ann}\,a^e + \langle a\rangle$. Cette dernière appartenance est vraie pour un système fini de générateurs $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathfrak{a}$. Ainsi il existe un exposant $e$ vérifiant $x^e \in \mathrm{Ann}(a_1^e, \ldots, a_n^e) + \mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{a} = \langle \underline{a}\rangle$ est fidèle, on obtient $x^e \in \mathfrak{a}$.

En utilisant que $\mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ est de type fini (car inversible), on provoque l'inclusion $\mathrm{Rad}(\mathbf{A})^d \subset \mathfrak{a}$ pour un certain $d$. On est donc en mesure d'utiliser le résultat précédent : ainsi $\mathfrak{a}$ est inversible.

Montrons à présent que $\mathfrak{a}$ est principal. On remarque que $\mathfrak{a} \cap \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ contient un élément régulier $r$ et donc contient $r^2$ ! En passant au quotient modulo $r^2$, on se retrouve dans un anneau zéro-dimensionnel, dans lequel l'idéal $\mathfrak{a}$ est localement principal. Cet idéal est donc principal dans le quotient, d'après la proposition 2.4. Ainsi $\mathfrak{a} = \langle a, r^2\rangle$ pour un certain $a$. Comme $r$ est dans $\mathfrak{a}$, on dispose d'une égalité $r = ur^2 + va$ que l'on réécrit $r(1-ur) = va$. Enfin, $1-ur$ est inversible car $r \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ d'où $r \in \langle a\rangle$. Bref, $\mathfrak{a}$ est engendré par l'élément $a$, qui est nécessairement régulier. □

**Remarque 2.8.** Dans la proposition précédente, si l'on suppose de plus que $\mathfrak{a}$ contient un élément régulier alors l'inclusion $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}) \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ est immédiate en invoquant les idéaux premiers.

## 2.4 Racine d'un idéal maximal après extension entière

Soit $\mathbf{R}$ un anneau commutatif unitaire.

**Proposition 2.9.** *Soit* $F \in \mathbf{R}[X]$ *un polynôme unitaire et* $\mathbf{A} = \mathbf{R}[X]/\langle F\rangle = \mathbf{R}[x]$. *Pour un idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathbf{R}$, *la racine* $\sqrt{\mathfrak{m}\mathbf{A}}$ *a le visage suivant :*

$$\sqrt{\mathfrak{m}\mathbf{A}} \;=\; \mathfrak{m}\mathbf{A} + G(x)\mathbf{A}$$

*où* $G \in \mathbf{R}[X]$ *est un relèvement de la partie sans facteur carré de* $F$ *modulo* $\mathfrak{m}$.

***Preuve.*** Pour déterminer la racine $\sqrt{\mathfrak{m}\mathbf{A}}$, on va plutôt se concentrer sur le radical nilpotent de $\mathbf{A}/\mathfrak{m}\mathbf{A}$. Ce dernier anneau est isomorphe à $\mathbf{k}[X]/\langle \overline{F}\rangle$ où $\mathbf{k} = \mathbf{R}/\mathfrak{m}$ et $\overline{F}$ désigne la réduction de $F$ modulo $\mathfrak{m}$. L'isomorphisme en question réalise, pour un polynôme $H \in \mathbf{R}[X]$,

$$\mathbf{A}/\mathfrak{m}\mathbf{A} \;\longleftrightarrow\; \mathbf{k}[X]/\langle \overline{F}\rangle, \qquad\qquad H(x) \bmod \mathfrak{m}\mathbf{A} \;\longleftrightarrow\; \overline{H} \bmod \overline{F}$$

Le radical nilpotent de $\mathbf{k}[X]/\langle \overline{F}\rangle$ est donné par $\langle \overline{G} \bmod \overline{F}\rangle$ où $G \in \mathbf{R}[X]$ est un relèvement de la partie sans facteur carré de $\overline{F}$. Donc le radical nilpotent de $\mathbf{A}/\mathfrak{m}\mathbf{A}$ est $\langle G(x) \bmod \mathfrak{m}\mathbf{A}\rangle$. En remontant à l'anneau $\mathbf{A}$, on en déduit que

$$\sqrt{\mathfrak{m}\mathbf{A}} \;=\; \langle G(x)\rangle \;+\; \mathfrak{m}\mathbf{A}$$

ce qu'il fallait démontrer. Au cours de la preuve, on a utilisé ce résultat très facile :

> *Soit* $f \in \mathbf{k}[X]$ *un polynôme à coefficients dans un corps. Le radical nilpotent de* $\mathbf{k}[X]/\langle f\rangle$ *est donné par* $\langle g \bmod f\rangle$ *où* $g$ *est la partie sans facteur carré de* $f$.

Soit $h \in \mathbf{k}[X]$ tel que $h^e \in \langle f\rangle$. Alors les facteurs irréductibles $f_i$ de $f$ divisent $h$. Par conséquent, la partie sans facteur carré de $f$, qui est le produit des $f_i$, divise $h$. □

**Proposition 2.10.** *Considérons des éléments* $x_1, \ldots, x_r$ *d'un sur-anneau de* $\mathbf{R}$ *entiers sur* $\mathbf{R}$ *(appelons* $F_1, \ldots, F_r \in \mathbf{R}[X]$ *les polynômes certificats de l'intégrale dépendance des* $x_i$ *sur* $\mathbf{R}$*) et la* $\mathbf{R}$*-algèbre*

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_r]$$

*Soit* $\mathfrak{m}$ *un idéal maximal de* $\mathbf{R}$. *Alors pour tout polynôme* $G_i \in \mathbf{R}[X]$ *séparable modulo* $\mathfrak{m}$ *vérifiant* $G_i(x_i) \in \sqrt{\mathfrak{m}\mathbf{R}[x_i]}$, *on a*

$$\sqrt{\mathfrak{m}\mathbf{A}} \;=\; \mathfrak{m}\mathbf{A} \,+\, G_1(x_1)\mathbf{A} \,+\, \cdots \,+\, G_r(x_r)\mathbf{A}$$

**Remarque 2.11.** Si le corps $\mathbf{k} = \mathbf{R}/\mathfrak{m}$ n'est pas parfait, la proposition précédente est vide. Lorsque $\mathbf{k}$ est parfait, l'existence de $G_i$ est assurée par un relevé de la partie sans facteur carré modulo $\mathfrak{m}$ de $F_i$.

***Preuve.*** Posons $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathbf{A} + G_1(x)\mathbf{A} + \cdots + G_r(x)\mathbf{A}$. On a déjà $\mathfrak{m}\mathbf{A} \subset \mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{m}\mathbf{A}}$ à cause de l'hypothèse faite sur $G_i$. Il s'agit de vérifier que $\mathfrak{a}$ est radical ou encore que $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est un réduit. On va en fait montrer que $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre étale où $\mathbf{k} = \mathbf{R}/\mathfrak{m}$. Considérons le morphisme surjectif

$$\frac{\mathbf{k}[X_1,\ldots,X_r]}{\langle \overline{G}_1(X_1),\ldots,\overline{G}_r(X_r)\rangle} \quad \twoheadrightarrow \quad \frac{\mathbf{k}[x_1,\ldots,x_r]}{\langle \overline{G}_1(x_1),\ldots,\overline{G}_r(x_r)\rangle} \;\simeq\; \mathbf{A}/\mathfrak{a}$$

où $\overline{G}_i \in \mathbf{k}[X_i]$ désigne la réduction de $G_i \in \mathbf{R}[X_i]$ modulo $\mathfrak{m}$. L'algèbre $\mathbf{k}[X_1,\ldots,X_r]/\langle \overline{G}_1(X_1),\ldots,\overline{G}_r(X_r)\rangle$ est étale car chaque classe de $X_i$ est algébrique séparable (par hypothèse $\overline{G}_i$ est un polynôme séparable). Or $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est le quotient de cette algèbre et est donc étale (le quotient d'une algèbre étale est étale). □

# 3 Autour de la notion de normalité

## 3.1 A propos de l'algorithme Round 2

L'algorithme Round 2 permettant de déterminer l'anneau des entiers $\mathcal{O}_\mathbf{K}$ d'un corps de nombres $\mathbf{K}$ repose sur un résultat clé de Zassenhaus, portant sur le stabilisateur de $\sqrt{p\mathbf{A}}$ où $\mathbf{A}$ est un ordre de $\mathbf{K}$ et $p$ un premier de $\mathbb{Z}$. Ce résultat dit qu'il suffit (et il faut) que $\mathrm{Stab}(\sqrt{p\mathbf{A}}) = \mathbf{A}$ pour que $\mathbf{A}$ soit $p$-maximal, *i.e.* $\mathrm{pgcd}(p, [\mathcal{O}_\mathbf{K} : \mathbf{A}]) = 1$. En fait, l'ordre $p$-maximal contenant $\mathbf{A}$ est explicitement

$$\mathbf{A}^{[p]} \;=\; \{z \in \mathcal{O}_\mathbf{K} \;\mid\; \exists\, e \in \mathbb{N},\; p^e z \subset \mathbf{A}\}$$

et vérifie $[\mathbf{A}^{[p]} : \mathbf{A}] = p^e$ pour un certain $e \in \mathbb{N}$.

L'algorithme Round 2 pour déterminer $\mathcal{O}_\mathbf{K}$ fonctionne ainsi. On part d'une approximation $\mathbf{A}$ de $\mathcal{O}_\mathbf{K}$. Pour chaque premier $p \in \mathbb{Z}$ (en fait, seuls les $p$ tels que $p^2 \mid \mathrm{disc}(\mathbf{A})$ sont à traiter), on détermine $\mathrm{Stab}(\sqrt{p\mathbf{A}})$. Si $\mathrm{Stab}(\sqrt{p\mathbf{A}}) = \mathbf{A}$ c'est terminé, sinon on recommence avec l'ordre $\mathbf{A}' = \mathrm{Stab}(\sqrt{p\mathbf{A}})$. Sans rentrer dans les détails, signalons que le calcul de $\sqrt{p\mathbf{A}}$ repose sur des techniques d'algèbre linéaire, car tout revient à déterminer le nilradical de $\mathbf{A}/p\mathbf{A}$ qui est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension $n = [\mathbf{K} : \mathbb{Q}]$.

La démonstration de l'implication $\mathrm{Stab}(\sqrt{p\mathbf{A}}) = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}^{[p]} = \mathbf{A}$ qui figure chez Cohen ou encore Belabas profite du fait qu'il y a un anneau principal (en l'occurence $\mathbb{Z}$ ici) à la base, ce qui permet de raisonner sur les indices. En fait, il y a une démonstration très générale de cette implication, valable pour un anneau commutatif $\mathbf{A}$ quelconque et un idéal $\mathfrak{a}$ radical de type fini et fidèle. Cette démonstration est tirée de [GRR71, p. 220-221], ainsi que [GR11] des mêmes auteurs Grauert & Remmert, et permet à Theo de Jong [Jon98] d'en déduire un algorithme déterminant la clôture intégrale d'une $\mathbf{k}$-algèbre affine intègre. Ci-dessous, nous rapportons cette démonstration pour tenter d'y voir plus clair.

## 3.2 $\mathrm{Stab}(\sqrt{\mathfrak{a}}) = \mathbf{A} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}^{[\mathfrak{a}]} = \mathbf{A}$

Soit $\mathbf{A}$ un anneau commutatif et $\mathbf{K}$ son anneau total des fractions. Pour un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$, on introduit le sur-anneau de $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}^{[\mathfrak{a}]} \;=\; \{z \in \overline{\mathbf{A}} \;\mid\; \exists\, e \in \mathbb{N},\; z\mathfrak{a}^e \subset \mathbf{A}\}$$

Le stabilisateur de $\mathfrak{a}$ noté $\mathrm{Stab}(\mathfrak{a}) = \{z \in \mathbf{K} \mid z\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}\} = (\mathfrak{a} : \mathfrak{a})_\mathbf{K}$ va jouer un rôle important. Si $\mathfrak{a}$ est de *type fini* et *fidèle* alors, en utilisant le determinant trick, on a $\mathrm{Stab}(\mathfrak{a}) \subset \overline{\mathbf{A}}$ de sorte que

$$\mathbf{A} \subset \mathrm{Stab}(\mathfrak{a}) \subset \mathbf{A}^{[\mathfrak{a}]}$$

Passons à présent au résultat de Grauert & Remmert, que nous reformulons.

**Proposition 3.1.** *Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de type fini, radical et fidèle alors* $\mathrm{Stab}(\mathfrak{b}) = \mathbf{A} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}^{[\mathfrak{b}]} = \mathbf{A}$.

Les hypothèses permettent de dire que $\mathrm{Stab}(\mathfrak{b}) \subset \mathbf{A}^{[\mathfrak{b}]}$. Donc le sens $\Leftarrow$ est immédiat. Le lemme suivant permet de traiter le sens $\Rightarrow$.

**Lemme 3.2.** *Pour un idéal radical $\mathfrak{b}$ de $\mathbf{A}$, on a l'inclusion* $(\mathbf{A} : \mathfrak{b})_{\overline{\mathbf{A}}} \subset \mathrm{Stab}(\mathfrak{b})$.

***Preuve du lemme.*** Soit $z \in \overline{\mathbf{A}}$ tel que $z\mathfrak{b} \subset \mathbf{A}$. Considérons une relation de dépendance intégrale :

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

Soit $b \in \mathfrak{b}$ et montrons que $zb \in \mathfrak{b}$. On multiplie l'égalité par $b^n$ et on obtient

$$(zb)^n + a_{n-1}b(zb)^{n-1} + \cdots + a_0 b^n = 0$$

Autrement dit le polynôme $T^n + a_{n-1}bT^{n-1} + \cdots + a_0 b^n$ est à coefficients dans $\mathbf{A}$ et annule $zb \in \mathbf{A}$. Comme $b \in \mathfrak{b}$, on obtient $(zb)^n \in \mathfrak{b}$ donc $zb \in \mathfrak{b}$ car $\mathfrak{b}$ est radical. □

***Preuve du sens $\Rightarrow$ de la proposition.*** Soit $z \in \mathbf{A}^{[\mathfrak{b}]}$. Il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que $z\mathfrak{b}^e \subset \mathbf{A}$. Si $e \geqslant 1$, on écrit $z\mathfrak{b}^{e-1}\mathfrak{b} \subset \mathbf{A}$. Ainsi, le lemme précédent fournit $z\mathfrak{b}^{e-1} \subset \mathrm{Stab}(\mathfrak{b})$, et l'hypothèse dit alors $z\mathfrak{b}^{e-1} \subset \mathbf{A}$. L'exposant $e$ a diminué donc on finira par obtenir $z \in \mathbf{A}$. □

## 3.3 Évitement du conducteur

On peut donner une jolie application du résultat de Grauert & Remmert (proposition 3.1). Elle concerne les idéaux qui évitent le conducteur $\mathfrak{f} = (\mathbf{A} : \overline{\mathbf{A}})$ *i.e.* comaximaux à ce conducteur. Pour les propriétés générales vérifiées par les idéaux évitant le conducteur d'un anneau dans un autre, on se réfèrera au théorème III-8.24 de [LQ11].

**Proposition 3.3.** *Soit $\mathbf{A}$ un anneau tel que $\operatorname{Kdim}\mathbf{A} \leqslant 1$ et un idéal $\mathfrak{b}$ radical inversible de $\mathbf{A}$. On considère $\alpha \in \mathbf{A}$ un élément régulier qui conduit $\overline{\mathbf{A}}$ dans $\mathbf{A}$. Alors il existe $\mathfrak{f}_\alpha$ un idéal inversible de $\mathbf{A}$ contenant $\alpha$ tel que*

$$1 \in \mathfrak{f}_\alpha + \mathfrak{b} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{f}_\alpha\,\overline{\mathbf{A}} \subset \mathbf{A}$$

*En particulier, pour le conducteur $\mathfrak{f}$ de $\overline{\mathbf{A}}$ dans $\mathbf{A}$, on a $1 \in \mathfrak{f} + \mathfrak{b}$.*

***Preuve.*** Tout repose sur le précieux lemme XI-3.10 de [LQ11] que appliqué à l'anneau zéro-dimensionel $\operatorname{Kdim}\mathbf{A}/\langle\alpha\rangle$. Ce lemme affirme que l'on peut écrire $\langle\alpha\rangle = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ avec $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b} = \langle 1\rangle$ et $\mathfrak{b}^e \subset \mathfrak{a}_2$. Comme $\alpha\overline{\mathbf{A}} \subset \mathbf{A}$, on a $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}^e\,\overline{\mathbf{A}} \subset \mathbf{A}$ c'est-à-dire $\mathfrak{a}_1\overline{\mathbf{A}} \subset \mathbf{A}^{[\mathfrak{b}]}$. Comme $\mathfrak{b}$ est inversible, on a $\mathrm{Stab}(\mathfrak{b}) = \mathbf{A}$. La proposition 3.1 dit alors que $\mathbf{A}^{[\mathfrak{b}]} = \mathbf{A}$. L'inclusion précédente se réécrit donc $\mathfrak{a}_1\overline{\mathbf{A}} \subset \mathbf{A}$. Il suffit maintenant de poser $\mathfrak{f}_\alpha = \mathfrak{a}_1$. □

## 3.4 Anneau normal, anneau de Prüfer

L'objectif de cette section est de rappeler les liens très forts entre la notion « être entier sur » et celle d'idéaux localement principaux. Ces liens sont bien connus en mathématique classique et sont au coeur de l'équivalence suivante : un anneau est de Dedekind si et seulement si tout idéal non nul est inversible.

Dans cette thèse, on tient à éviter le plus possible le recours aux idéaux premiers et hypothèses noethériennes. C'est pourquoi nous tenons à détailler quelques points, bien que tous ceux-ci aient été largement développés dans le chapitre XII du livre [LQ11].

### Anneau normal

Un anneau est normal si tout élément entier sur un idéal principal est dans cet idéal (ce qui peut encore s'énoncer : « un anneau est normal si tout idéal principal est intégralement clos »). Un élément $x$ est dit entier sur l'idéal $\mathfrak{a}$ s'il existe $n \geqslant 1$ et une relation du type $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_ix^{n-i} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ avec $a_i \in \mathfrak{a}^i$. Avant de donner les principales propriétés des anneaux normaux, faisons une remarque qui permet de mieux comprendre le point *1')* de la proposition.

Il est facile de montrer qu'un anneau intégralement clos est normal. Soit $x \in \mathbf{A}$ entier sur $\langle a\rangle$. On a donc une égalité du type $x^n + \lambda_1 a x^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1}a^{n-1}x + \lambda_n a^n = 0$. Si $a = 0$, c'est bon car $x = 0$ est dans $\langle a\rangle$. Sinon, on divise par $a$ (qui est régulier car $\mathbf{A}$ est intègre) et on obtient que $\frac{x}{a}$ est entier sur $\mathbf{A}$ donc est dans $\mathbf{A}$ par hypothèse. Ainsi $x \in \langle a\rangle$.

**Proposition 3.4.** *On a les propriétés suivantes :*

*1) Un anneau normal est intégralement fermé dans son anneau total des fractions.*

*1') Un anneau quasi intègre*[1] *et intégralement fermé dans son anneau total des fractions est normal.*
*2) Un anneau normal est réduit.*
*3) Mieux, un anneau normal est localement sans diviseur de zéro.*
*4) Si* $\mathbf{A}$ *est normal alors* $S^{-1}\mathbf{A}$ *aussi (où* $S$ *est un monoïde).*

***Preuve.***
*1)* Soit $y$ dans l'anneau total des fractions que l'on écrit $\frac{b}{a}$. En écrivant une équation de dépendance intégrale, on obtient que $b$ est entier sur l'idéal principal $\langle a\rangle$. Si l'anneau est normal, on obtient $b \in \langle a\rangle$ *i.e.* $y \in \mathbf{A}$.

*1')* Soit $b$ entier sur l'idéal $\langle a\rangle$ disons $b^3 + c_1b^2a + c_2ba^2 + c_3a^3 = 0$ $(\star)$. On veut montrer que $b$ est dans $\langle a\rangle$. Considérons l'annulateur de $b$ qui est engendré par un idempotent $e$. Dans $\mathbf{A}_e$, on a $b = 0$ qui est donc dans $\langle a\rangle$. Dans $\mathbf{A}_{1-e}$, l'élément $b$ est régulier, donc $a$ aussi (car $b^3 \in \langle a\rangle$) Ainsi, l'égalité $(\star)$ fournit une relation de dépendance intégrale de $y = b/a$ sur $\mathbf{A}_{1-e}$. L'anneau $\mathbf{A}_{1-e}$ est intégralement fermé en tant que localisé de $\mathbf{A}$ intégralement fermé. Ainsi $y \in \mathbf{A}_{1-e}$ de sorte que $b = ay$ est multiple de $a$ dans ce localisé.

*2)* Si $x^n = 0$ alors $x$ est entier sur $\langle 0\rangle$ et donc $x \in \langle 0\rangle$, *i.e.* $x = 0$.

*3)* Si $xy = 0$, on a $x^2 = x(x + y)$ donc $x$ est entier sur $\langle x + y\rangle$. Par hypothèse, on a donc $x \in \langle x + y\rangle$, disons $x = a(x + y)$ ou encore $(1 - a)x = ay$. En multipliant par $x$, on a $(1 - a)x^2 = 0$. L'anneau est réduit donc $(1 - a)x = 0$ puis $ay = 0$. On a obtenu une « explication locale » pour l'égalité $xy = 0$.

*4)* On écrit que $b/t$ est entier sur $\langle a/s\rangle$ dans $S^{-1}\mathbf{A}$. On chasse les dénominateurs en multipliant par $(st)^n$ (où $n$ est le degré de la relation de dépendance intégrale considérée) et on se ramène à une égalité de $\mathbf{A}$ après multiplication par un certain $s' \in S$. En homogénéisant l'égalité, *i.e.* en multipliant par $s'^{n-1}$, on obtient que $s'sb$ est entier sur $\langle ta\rangle$ dans $\mathbf{A}$. Comme $\mathbf{A}$ est normal, il existe $c \in \mathbf{A}$ tel que $s'sb = cta$. Ainsi $b/t = c/s' \cdot a/s$. □

La définition des anneaux normaux retenue par Lombardi & Quitté est légitimée par le fait que l'on retrouve la définition classique :

**Proposition 3.5.** *Un anneau* $\mathbf{A}$ *est normal si et seulement si* $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ *est intégralement clos pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathbf{A}$*.*

***Preuve.*** Si $\mathbf{A}$ est normal alors $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ est normal d'après le point *4)*. Comme $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ est local normal, il est intègre d'après le point *3)*. Le point *1)* dit alors que $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ est intégralement clos.

Réciproquement, supposons $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ intégralement clos pour tout $\mathfrak{p}$. Soit $b \in \mathbf{A}$ entier sur $\langle a\rangle$. Alors $b$ est entier sur $\langle a\rangle$ dans $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$. Comme $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ est intégralement clos, il est normal d'après le point *1')*. D'où $b \in a\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p}$. Donc $b \in a\mathbf{A}$. □

### Prüfer ⇒ normal

Un anneau est dit de Prüfer s'il est arithmétique[2] réduit, ou encore arithmétique et localement sans diviseur de zéro (cf. [LQ11, VIII-4.4.]). Un anneau de Prüfer est un anneau normal. Plus précisément :

**Proposition 3.6.** *Un anneau est de Prüfer si et seulement si tout idéal de type fini est intégralement clos.*

***Preuve.*** Cf. [LQ11, Théorème XII-3.2]. A noter que pour l'implication ⇐, les auteurs partent de l'hypothèse « anneau normal et $xy \in \langle x^2, y^2\rangle$ pour tous $x$, $y$ » plutôt que « tout idéal de type fini est intégralement clos ». Mais si tout idéal de type fini est intégralement clos, alors en particulier tout idéal principal l'est donc l'anneau est normal et $xy \in \langle x^2, y^2\rangle$ pour tous $x$, $y$ (en effet, il suffit de remarquer que $xy$ est racine de $T^2 - x^2y^2$ donc est entier sur $\langle x^2, y^2\rangle$). □

### Normal cohérent en dimension 1 ⇒ Prüfer

**Théorème 3.7** (cf. [LQ11, Théorème XII-6.2.])**.** *Un anneau normal cohérent de dimension* $\leqslant 1$ *est un anneau de Prüfer.*

1. L'annulateur d'un élément est engendré par un idempotent.
2. Un anneau est arithmétique si tout idéal de type fini est localement principal.

Cet énoncé est le pendant constructif du résultat classique : « dans un anneau de Dedekind (intégralement clos, noethérien, de dimension 1), tous les idéaux non nuls sont inversibles ». La preuve de ce dernier résultat utilise à fond les idéaux premiers et le caractère noethérien (cf. [Sam67]). On voit donc le travail réalisé par Lombardi & Quitté à la fois dans l'énoncé (reformulé de manière constructive n'est pas chose simple) et dans la preuve (qui met en branle le principe local-global des anneaux quasi intègres). Surtout, on constate la prodigieuse efficacité de la machinerie locale-globale constamment présente dans leur ouvrage. Voilà comment débute la preuve : « *Puisque* $\mathbf{A}$ *est quasi intègre, il suffit de traiter le cas intègre et de terminer avec la machinerie locale-globale des anneaux quasi intègres. Nous supposons donc que* $\mathbf{A}$ *est intègre et nous montrons que tout idéal de type fini contenant un élément régulier est inversible* ». Le coeur de la preuve se réduit alors à quelques égalités d'idéaux et à un lemme très précieux (cf. [LQ11, Lemme XI-3.10]) :

*Soit dans un anneau* $\mathbf{A}$ *deux idéaux* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *avec* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ *zéro-dimensionnel et* $\mathfrak{b}$ *de type fini. Alors on peut écrire :*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \quad \text{avec } \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b} = \langle 1\rangle \text{ et } \mathfrak{b}^n \subset \mathfrak{a}_2$$

*pour un entier* $n$ *convenable. Cette écriture est unique et l'on a*

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \langle 1\rangle, \quad \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}^n = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}^m \quad \text{pour tout } m \geqslant n$$

# 4 L'art d'inverser un idéal 2-engendré

Avant de commencer, remarquons que s'intéresser à l'inversibilité des idéaux 2-engendrés n'est pas restrictif en raison de l'égalité générale :

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{c}+\mathfrak{a}) \;=\; (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{c}\mathfrak{a}).$$

Par ailleurs, on peut se permettre d'étudier les $\mathbf{A}$-modules du type $\mathbf{A}+\mathbf{A}.y$ plutôt que les idéaux $\langle a, b\rangle$ de $\mathbf{A}$. Considérons un idéal 2-engendré $\langle a, b\rangle$ d'un anneau $\mathbf{A}$ et supposons disposer d'une matrice de localisation principale $M = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ pour $(a, b)$. Autrement dit $\alpha + \delta = 1,\ a\beta = b\alpha$ et $a\delta = b\gamma$. Si $a$ est régulier, on peut considérer l'élement $y = b/a$ de l'anneau total des fractions de $\mathbf{A}$ et écrire les relations ci-dessus sous la forme $\alpha + \delta = 1,\ \beta = y\alpha$ et $\delta = y\gamma$. Ainsi $M$ est une matrice de localisation monogène pour le $\mathbf{A}$-module $\langle 1, y\rangle_{\mathbf{A}} := \mathbf{A}.1 + \mathbf{A}.y$.

Soit $\mathbf{A}$ un anneau et un élément $y$ dans un sur-anneau $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$. On considère le sous-$\mathbf{A}$-module de $\mathbf{B}$ :

$$E = \langle 1, y\rangle_{\mathbf{A}} = \mathbf{A}.1 + \mathbf{A}.y$$

L'objectif est de démontrer l'énoncé suivant (cf. le théorème 4.5 et le corollaire 4.6) :

*Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau et un élément* $y$ *dans un sur-anneau* $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{A}$. *On suppose qu'il existe un polynôme* primitif[3] $P \in \mathbf{A}[X]$ *tel que* $P(y) = 0$. *Alors* $(1, y)$ *admet une matrice de localisation monogène dans* $\mathbf{A}' = \mathbf{A}[H_y]$ *où* $H_y$ *est un suite finie d'éléments entiers sur* $\mathbf{A}$, *définie explicitement à partir de la donnée de* $P$ *et de* $y$. *Par conséquent, il existe un sous-*$\mathbf{A}'$*-module* $F'$ *de* $\mathbf{B}$ *tel que* $E'F' = \mathbf{A}'$ *où* $E'$ *est le* $\mathbf{A}'$*-module* $\langle 1, y\rangle_{\mathbf{A}'} = \mathbf{A}'.1 + \mathbf{A}'.y$.

On se permettra d'utiliser la terminologie « module inversible » pour « module localement monogène » conformément à l'article *Comparison of Picard groups in dimension 1* de Lombardi et Quitté. Plus précisément, dans cet article, un sous-$\mathbf{A}$-module $E$ de $\mathbf{B}$ est dit inversible s'il existe un sous-$\mathbf{A}$-module $F$ de $\mathbf{B}$ tel que $EF = \mathbf{A}$. Cela rejoint la définition de Bourbaki (AC chap II, §5, n° 6) lorsque $\mathbf{B}$ est l'anneau total des fractions de $\mathbf{A}$ (le localisé de $\mathbf{A}$ par le monoïde des éléments réguliers).

La proposition qui suit provient de Bourbaki, AC II, proposition 10, n° 6 . Elle reste valable dans notre contexte général ($\mathbf{B}$ sur-anneau quelconque de $\mathbf{A}$).

**Proposition 4.1.** *Soit* $E$ *un sous-*$\mathbf{A}$*-module de* $\mathbf{B}$, *sur-anneau quelconque de* $\mathbf{A}$. *On suppose qu'il existe un autre sous-*$\mathbf{A}$*-module* $F$ *de* $\mathbf{B}$ *tel que* $EF = \mathbf{A}$. *Alors* $F = (\mathbf{A} : E)_{\mathbf{B}}$. *Dans ce cas, le stabilisateur de* $E$ *dans* $\mathbf{B}$ *noté* $(E : E)_{\mathbf{B}}$ *est égal à* $\mathbf{A}$.

3. Un polynôme est dit primitif lorsque 1 est dans l'idéal engendré par ses coefficients.

## 4.1 Les entiers d'Emmanuel $H_y$ de $y$ associés à un polynôme $P$

Soit $\mathbf{A}$ un anneau commutatif quelconque et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbf{A}[X]$. Ce polynôme $P$ donne naissance à des polynômes $b_k(Y) \in \mathbf{A}[Y]$ :

$$\frac{P(X) - P(Y)}{X - Y} = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(Y) X^k$$

**Définition 4.2.** *Soit $y$ un élément d'un sur-anneau $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ tel que $P(y) = 0$. Alors la donnée du couple $(P, y)$ fournit les éléments $b_k(y)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, appelés* les entiers d'Emmanuel *de $y$ associés à $P$. Ils ont en effet le bon goût d'être entiers sur $\mathbf{A}$ (ce n'est pas une évidence).*

On peut trouver ces entiers dans la littérature, par exemple dans Cohen [Coh93, ex. 15, chap. 4, p.219] qui les attribue à Lenstra, ou encore dans Belabas [Bel, exemple p. 5] qui les attribue à Dedekind. Cependant, par commodité, nous gardons la terminologie personnelle « entiers d'Emmanuel » comme dans le lemme XII-4.7 de [LQ11], terminologie qui fait référence au mémoire [Hal97] d'Emmanuel Hallouin.

**Expression des entiers d'Emmanuel**

Exprimons les coefficients du polynôme $Q(X) = \dfrac{P(X)}{X - y}$ en fonction de ceux de $P$ et $y$.

$$\begin{array}{ccccccc} P & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ XQ & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & 0 \\ -yQ & 0 & -yb_{n-1} & \cdots & -yb_1 & -yb_0 \end{array}$$

On a donc

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_n y + a_{n-1} \\ \quad \vdots \\ b_0 = a_n y^{n-1} + \cdots + a_1 \end{cases}$$

Par commodité, on change la notation en indexant par le degré en $y$. Re-voilà donc les entiers d'Emmanuel $h_k$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ :

$$\begin{cases} h_0 = a_n \\ h_1 = a_n y + a_{n-1} \\ \quad \vdots \\ h_{n-1} = a_n y^{n-1} + \cdots + a_1 \end{cases}$$

On a la relation fondamentale (♡) de type Hörner

$$\boxed{h_k = y h_{k-1} + a_{n-k}}$$

pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ en posant $h_{-1} = 0$ (convention) et $h_n = 0$ (naturel).

Il est bon de coucher l'expression condensée de $h_k$ en fonction des puissances de $y$ :

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} a_{n-k+i}\, y^i$$

ce que l'on peut traduire matriciellement par :

$$\begin{bmatrix} 1 & y & \cdots & y^{n-1} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad T = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ 0 & a_n & \cdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix},$$

ou encore $\begin{bmatrix} 1 & y & \cdots & y^{n-1} \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} h_{n-1} & \cdots & h_1 & h_0 \end{bmatrix}$ en faisant apparaître la matrice symétrique codée en Magma via $S =$ `ReverseColumns(T)`.

On notera $H_y$ la suite des entiers d'Emmanuel $(h_0, h_1, \ldots, h_{n-1})$.

**L'inclusion $H_y \subset \mathrm{Stab}(E^{n-1})$ où $E = \langle 1, y\rangle_{\mathbf{A}}$**

On peut montrer très simplement que les $h_k$ sont entiers sur $\mathbf{A}$ ([LQ11, Lemme XII-4.7. chap XII et exercice XII-10.]). Pour $h_0 = a_n$, ce n'est pas un scoop. On peut donc décréter qu'il y a $n-1$ « vrais » entiers d'Emmanuel.

**Proposition 4.3.** *Un entier d'Emmanuel stabilise le $\mathbf{A}$-module $E^{n-1} = \mathbf{A}.1 + \mathbf{A}.y + \cdots + \mathbf{A}.y^{n-1}$. En particulier, un entier d'Emmanuel est entier sur $\mathbf{A}$.*

***Preuve.*** Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, l'entier $h_k$ stabilise $E^{n-1}$. En effet, on peut exprimer une matrice $M_k$ de "multiplication par $h_k$" relativement aux puissances de $y$. Plus précisément, on va exhiber une matrice $M_k$ vérifiant la relation suivante

$$\begin{bmatrix}1 & y & \cdots & y^{n-1}\end{bmatrix} M_k \;=\; h_k \begin{bmatrix}1 & y & \cdots & y^{n-1}\end{bmatrix}, \qquad \forall k \in [\![0, n-1]\!].$$

Par exemple $n = 5$ et $k = 2$, *i.e.* $h_2 = a_5y^2 + a_4y + a_3$, un petit calcul montre que la matrice suivante convient :

$$M_2 = \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 & -a_0 & 0 \\ a_4 & a_3 & 0 & -a_1 & -a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & -a_2 & -a_1 \\ 0 & a_5 & a_4 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour le caractère entier, il suffit d'écrire

$$(h_kI_n - M) \begin{bmatrix}1 & y & \cdots & y^{n-1}\end{bmatrix} \;=\; 0$$

de multiplier par la transposée de la comatrice pour obtenir $\det(h_kI_n - M) = 0$, ce qui fournit une relation de dépendance intégrale pour $h_k$ à coefficients dans $\mathbf{A}$. □

**L'algèbre des entiers d'Emmanuel $\mathbf{A}[H_y] = \mathbf{A}[h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}]$**

**Théorème 4.4.** *Le $\mathbf{A}$-module $\mathcal{H} = \mathbf{A}.h_{n-1} + \cdots + \mathbf{A}.h_1 + \mathbf{A}.h_0$ est stabilisé par n'importe quel entier d'Emmanuel et est donc un $\mathbf{A}[h_0, \ldots, h_{n-1}]$-module. En particulier, on a*

$$\mathbf{A}[h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}] \;=\; \mathbf{A}.1 + \mathbf{A}.h_1 + \cdots + \mathbf{A}.h_{n-1}$$

***Preuve.*** Il suffit d'exhiber une matrice de multiplication par $h_k$ relativement à $(h_{n-1}, \ldots, h_0)$. Or on dispose de la relation matricielle $S\,{}^{\mathrm{t}}M_k = M_kS$ où $S$ est la matrice symétrique obtenue après avoir renversé les colonnes de la matrice $T$. En multipliant à gauche chaque membre par $\begin{bmatrix}1 & y & \cdots & y^{n-1}\end{bmatrix}$ on a

$$\begin{bmatrix}h_{n-1} & \cdots & h_0\end{bmatrix} {}^{\mathrm{t}}M_k \;=\; h_k \begin{bmatrix}h_{n-1} & \cdots & h_0\end{bmatrix}, \qquad \forall k \in [\![0, n-1]\!].$$

En passant, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a obtenu la formule

$$h_k.h_{n-j} = c_1.h_{n-1} + \cdots + c_nh_0$$

où $c_i$ est le $i$-ème coefficient de la ligne $j$ de $M_k$. □

## 4.2 Inversibilité de $\langle 1, y\rangle$ dans un sur-anneau entier sur A (avec $P$ primitif)

**Théorème 4.5.** *Soit $\mathbf{A}$ un anneau et un élément $y$ dans un sur-anneau $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$. On suppose qu'il existe un polynôme* primitif *$P = \sum_{i=0}^n a_iX_i \in \mathbf{A}[X]$ tel que $P(y) = 0$. Alors $(1, y)$ admet une matrice de localisation monogène à coefficients dans $\mathbf{A}[H_y]$.*

*Plus précisément, si $1 = \sum_{i=0}^n u_ia_i$ alors on obtient une relation de comaximalité entre 1 et $y$ à coefficients dans $\mathbf{A}[H_y]$ donnée par*

$$u.1 + v.y = 1 \quad \textit{avec } u = \sum_{i=0}^{n} u_ih_{n-i} \textit{ et } v = -\sum_{i=0}^{n} u_ih_{n-i-1}$$

*Par conséquent, la matrice $M = \begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & y\end{bmatrix}$ est une matrice de localisation monogène pour $(1, y)$ à coefficients dans $\mathbf{A}[H_y]$.*

***Preuve.*** On part de la relation de comaximalité des coefficients de $P$, à savoir $1 = \sum_{i=0}^{n} u_i a_i$. On utilise l'égalité $a_i = h_{n-i} - y h_{n-i-1}$ provenant de la relation fondamentale ($\heartsuit$), et on obtient directement les expressions données pour $u$ et $v$. Comme $yh_k$ appartient à $\mathbf{A}[H_y]$ (toujours grâce à la relation fondamentale ($\heartsuit$)), on en déduit que la matrice $M$ de l'énoncé est bien à coefficients dans $\mathbf{A}[H_y]$. □

**Corollaire 4.6.** *En gardant les hypothèses du théorème, le $\mathbf{A}[H_y]$-module $\langle 1, y\rangle_{\mathbf{A}[H_y]}$ est inversible d'inverse $\langle u, v\rangle_{\mathbf{A}[H_y]}$, i.e.*

$$\langle 1, y\rangle \,.\, \langle u, v\rangle \;=\; \mathbf{A}[H_y]$$

*De plus, le $\mathbf{A}[H_y]$-module $\langle u, v\rangle$ est égal à $\langle h_0, \ldots, h_{n-1}\rangle$.*

***Preuve.*** La seule chose à justifier est l'égalité des $\mathbf{A}[H_y]$-modules : $\langle u, v\rangle = \langle h_0, \ldots, h_{n-1}\rangle$. Par construction, on a l'inclusion $\subset$. Pour l'autre sens, il suffit d'utiliser l'égalité $1 = u + vy$ et de la multiplier par un $h_k$ en se rappellant que $yh_k \in \mathbf{A}[H_y]$. □

## 4.3 Caractérisation de $\mathbf{A}[H_y]$ de manière intrinsèque

On suppose toujours le polynôme $P$ primitif.

**Proposition 4.7.** *Le $\mathbf{A}$-module $E^{n-1} = \langle 1, y\rangle^{n-1}$ est un $\mathbf{A}[H_y]$-module inversible, d'inverse $\langle u, v\rangle^{n-1}$.*

***Preuve.*** Le fait que $E^{n-1} = \mathbf{A}.1 + \mathbf{A}.y + \cdots + \mathbf{A}.y^{n-1}$ soit un $\mathbf{A}[H_y]$-module découle directement de la proposition 4.3. De plus, la proposition précédente fournit l'égalité de $\mathbf{A}[H_y]$-modules :

$$\langle 1, y\rangle \,.\, \langle u, v\rangle = \mathbf{A}[H_y]$$

En élevant à la puissance $n-1$, on obtient le résultat. □

**Remarque 4.8.** On peut faire plus fin (sans élever à la puissance $n-1$). On exhibe une relation comaximale entre les puissances $1, y, \ldots, y^{n-1}$ à coefficients dans $\mathbf{A}[H_y]$. Plus généralement, on a une relation comaximale entre les puissances $1, y, \ldots, y^m$. Rappelons que $h_k = \sum_{i=0}^{k} a_{n-k+i}\, y^i$, somme qui a un terme en $y^0$ égal à $a_{n-k}$. On multiplie donc cette égalité par $u_{n-k}$ d'où :

$$\sum_{k=0}^{m} u_{n-k}\, h_k \;=\; \sum_{i=0}^{m} \left( \sum_{k=i}^{n-1} u_{n-k} a_{n-k+i} \right) y^i$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{m} u_{n-k}\, h_k \;=\; \left( \sum_{k=0}^{m} u_{n-k} a_{n-k} \right) y^0 \;+\; \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=i}^{m} u_{n-k} a_{n-k+i} \right) y^i$$

On pose $u^{[m]} = \sum_{k=0}^{m} u_{n-k}\, h_k$ (avec cette notation, on a $u = u^{[n-1]}$) et on ajoute de chaque côté l'élément $\alpha^{[m]} = \sum_{k=m+1}^{n} u_{n-k} a_{n-k} \in \mathbf{A}$, de sorte que

$$u^{[m]} + \alpha^{[m]} \;=\; 1 \;+\; \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{k=i}^{m} u_{n-k} a_{n-k+i} \right) y^i \qquad \text{où} \quad -v_i^{[m]} \;=\; \sum_{k=i}^{m} u_{n-k} a_{n-k+i}$$

D'où

$$1 \;=\; \left( u^{[m]} + \alpha^{[m]} \right).1 \;+\; \sum_{i=1}^{m} v_i^{[m]}\, y^i$$

La proposition 4.3 concerne l'inclusion $H_y \subset \mathrm{Stab}(E^{n-1})$ en toute généralité, sans hypothèse sur le polynôme $P$ annulant $y$. Si le polynôme $P$ est primitif, on récupère l'inclusion inverse.

**Proposition 4.9.** *L'algèbre des entiers d'Emmanuel $\mathbf{A}[H_y]$ est égale au stabilisateur (dans $\mathbf{B}$) du $\mathbf{A}$-module $E^{n-1} = \langle 1, y\rangle^{n-1}$ :*

$$\mathbf{A}[H_y] \;=\; \mathrm{Stab}(E^{n-1}) := \{z \in \mathbf{B} \mid zE^{n-1} \subset E^{n-1}\} \qquad \textit{où} \;\; E = \langle 1, y\rangle_{\mathbf{A}}$$

*En particulier, l'algèbre des entiers d'Emmanuel de $y$ est indépendante du polynôme primitif $P$ choisi.*

***Preuve.*** C'est une conséquence directe du fait que $E^{n-1} = \langle 1, y\rangle^{n-1}$ est un $\mathbf{A}[H_y]$-module inversible (cf proposition précédente) et de l'utilisation du résultat général de Bourbaki (cf. proposition 4.1). □

## 4.4 Critère d'inversibilité pour $\langle 1, y\rangle$

On obtient un critère d'inversibilité pour le $\mathbf{A}$-module $E$, en supposant disposer d'un polynôme primitif annulant $y$ :

**Proposition 4.10.** *Le $\mathbf{A}$-module $E = \langle 1, y\rangle$ est inversible si et seulement si $\mathbf{A}[H_y] = \mathbf{A}$, i.e. $H_y \subset \mathbf{A}$.*

***Preuve.*** Si $H_y \subset \mathbf{A}$ alors $\mathbf{A}[H_y] = \mathbf{A}$ donc d'après 4.7, le $\mathbf{A}$-module $E$ est inversible. Dans l'autre sens : si $E$ est inversible, alors $E^{n-1}$ aussi, donc $\mathrm{Stab}(E^{n-1}) = \mathbf{A}$. Or, on a toujours $\mathrm{Stab}(E^{n-1}) = \mathbf{A}[H_y]$ (cf. proposition 4.9). Par conséquent, $\mathbf{A} = \mathbf{A}[H_y]$. □

Mieux :

**Proposition 4.11.** *Soit $\mathbf{C}$ un sur-anneau de $\mathbf{A}$. Alors $\langle 1, y\rangle_{\mathbf{C}}$ est inversible si et seulement si $\mathbf{A}[H_y] \subset \mathbf{C}$.*

***Preuve.*** On sait que le $\mathbf{A}[H_y]$-module $\langle 1, y\rangle$ est inversible $\mathbf{A}[H_y]$, donc si $H_y \subset \mathbf{C}$, le $\mathbf{C}$-module $\langle 1, y\rangle$ est a fortiori inversible. Supposons maintenant que $\langle 1, y\rangle_{\mathbf{C}}$ soit inversible. Alors il en est de même de $\langle 1, y\rangle_{\mathbf{C}}^{n-1}$. Or ce dernier module est également un $\mathbf{C}[H_y]$-module (car les entiers d'Emmanuel stabilisent les puissances de $y$), donc est à fortiori inversible en tant $\mathbf{C}[H_y]$-module. On a donc $\mathbf{C} = \mathbf{C}[H_y]$ car tous deux égaux à $\mathrm{Stab}\left(\langle 1, y\rangle_{\mathbf{C}}^{n-1}\right)$. Ainsi $H_y \subset \mathbf{C}$. □

**Remarque 4.12.** Notons $\mathbf{A}[M]$ l'algèbre engendrée par les coefficients de la matrice $M$ qui intervient dans le théorème 4.5, c'est-à-dire $\mathbf{A}[M] = \mathbf{A}[u, v, uy]$. Le $\mathbf{A}[M]$-module $\langle 1, y\rangle_{\mathbf{A}[M]}$ est inversible car $M$ est une matrice de localisation principale pour $(1, y)$. La proposition précédente dit que $\mathbf{A}[H_y] \subset \mathbf{A}[M]$. Comme on a clairement $\mathbf{A}[M] \subset \mathbf{A}[H_y]$, on en déduit que

$$\mathbf{A}[H_y] \;=\; \mathbf{A}[u,\, v,\, uy]$$

**L'anneau des entiers de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$**

Donnons un exemple permettant de faire tourner la machinerie « inverser un idéal 2-engendré ». Dans cet exemple, on arrive à déterminer la clôture intégrale de l'anneau de nombres. Bien sûr, il s'agit là d'une situation très particulière, car on tombe tout de suite sur la clôture intégrale.

Considérons l'anneau de nombres $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \mathbb{Z}[X]/\langle F\rangle$ avec $F = X^2 - 5$.

• Au-dessus d'un premier $p \notin \{2, 5\}$, le polynôme $F$ est séparable modulo $p$ car $\mathrm{disc}(F) = 2^2 \times 5$. Autrement dit, il existe un polynôme $G \in \mathbb{Z}[X]$ sans facteur carré tel que $F \equiv G \bmod p$. Par conséquent, l'idéal $\sqrt{p\mathbf{A}} = \langle p\rangle$ est principal donc inversible.

• Au-dessus de $p = 5$

On a $F \equiv X^2 \bmod 5$ donc on peut prendre $G = X$. Ainsi $\sqrt{5\mathbf{A}} = \langle 5, \sqrt{5}\rangle = \langle\sqrt{5}\rangle$ est inversible.

• Au-dessus de $p = 2$

On a $F \equiv (X + 1)^2 \bmod 2$ donc on peut prendre $G = X + 1$ d'où $\sqrt{2\mathbf{A}} = \langle 2, 1 + \sqrt{5}\rangle$. On pose $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on peut prendre $P = Y^2 - Y - 1 \in \mathbb{Z}[Y]$, primitif annulant $y$. On calcule les deux entiers d'Emmanuel de $y$ associés à $P = (Y - y)Q$, qui sont les coefficients de $Q$ ; d'où $h_0 = 1$ et $h_1 = y - 1$. Pour alléger, on pose $\overline{\varphi} = y - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. On sait alors que $\langle 1, y\rangle$ est inversible dans $\mathbf{A}[H_y] = \mathbb{Z}[\sqrt{5}, \overline{\varphi}] = \mathbb{Z}[\overline{\varphi}]$. Autrement dit, l'idéal $\langle 2, 1 + \sqrt{5}\rangle$ est inversible dans $\mathbf{A}' = \mathbb{Z}[\overline{\varphi}]$.

La question est alors : est-ce que $\sqrt{2\mathbf{A}'}$ est inversible dans $\mathbf{A}'$ ? Pour cela, on détermine un système générateur de cet idéal de $\mathbf{A}'$, on trouve $\sqrt{2\mathbf{A}'} = \langle 2, G(\overline{\varphi})\rangle$ où $G$ est un relevé de la partie sans facteur carré modulo 2 de $P = X^2 - X - 1$ qui annule $\overline{\varphi}$. On obtient donc $\sqrt{2\mathbf{A}'} = \langle 2\rangle$, principal donc inversible. Une remarque en passant : en fait, on est certain que $\sqrt{2\mathbf{A}'}$ est inversible car $[\mathbf{A}' : \mathbf{A}]$ est une vraie puissance de 2. En utilisant le fait que $2^2 \times 5 = \mathrm{disc}(\mathbf{A}) = [\mathbf{A}' : \mathbf{A}]^2 \,\mathrm{disc}(\mathbf{A}')$, on constate que $\mathrm{disc}(\mathbf{A}')$ n'est pas divisible par 2 et donc que $\sqrt{2\mathbf{A}'}$ est inversible, en vertu de la proposition 5.4.

On tient donc la clôture intégrale de $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. C'est $\mathbf{A}' = \mathbb{Z}[\overline{\varphi}]$ plus connu sous la forme $\mathbb{Z}[\varphi]$ c'est-à-dire $\mathbb{Z}\big[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\big]$.

### 4.5 Suite croissante des stabilisateurs

On a une filtration de $\mathbf{A}[y]$ via les sous-$\mathbf{A}$-modules $E^k = \mathbf{A}.1 + \mathbf{A}.y + \cdots + \mathbf{A}.y^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Cette filtration donne naissance à une filtration de stabilisateurs

$$\mathbf{A} \ \subset \ \mathrm{Stab}(E) \ \subset \ \mathrm{Stab}(E^2) \ \subset \ \cdots \ \subset \ \mathrm{Stab}(E^k) \ \subset \ \cdots$$

**Proposition 4.13.** *Si on dispose d'un polynôme $P$ primitif annulant $y$ et de degré $\leqslant n$, alors la suite croissante des stabilisateurs stationne à partir du rang $n-1$ sur l'algèbre des entiers d'Emmanuel :*

$$\mathbf{A} \ \subset \ \mathrm{Stab}(E) \ \subset \ \cdots \ \subset \ \mathrm{Stab}(E^{n-1}) \ \subset \ \mathrm{Stab}(E^n) \ = \ \cdots \ = \ \mathbf{A}[H_y]$$

***Preuve.*** En toute généralité, on a $H_y \subset \mathrm{Stab}(E^{n-1})$, donc pour $k \geqslant n-1$, les $\mathbf{A}$-modules $E^k$ sont des $\mathbf{A}[H_y]$-modules. Si on dispose d'un polynôme primitif $P$ annulant $y$ alors ces modules sont inversibles car on dispose d'une matrice de localisation monogène de $(1, y, \ldots, y^k)$ à coefficients dans $\mathbf{A}[H_y]$. Etant inversibles, on a alors $\mathrm{Stab}(E^k) = \mathbf{A}[H_y]$ pour tout $k \geqslant n-1$. □

Si l'on veut un exemple concret où la suite des stabilisateurs stationne à partir du rang $k$ *i.e.* $\mathrm{Stab}(E^k) = \mathrm{Stab}(E^{k+1})$, on peut considérer le polynôme $X^n + pX^k - p^n$ (le signe moins est là pour rendre le polynôme irréductible et ainsi pouvoir utiliser les fonctions internes à Magma). Plus précisément $\big[\mathrm{Stab}(E^i) : \mathrm{Stab}(E^{i-1})\big] = p^i$ pour tout $i \leqslant k$ et $\big[\mathrm{Stab}(E^{k+1}) : \mathrm{Stab}(E^k)\big] = 1$.

SuiteCroissanteStabilisateurs.result

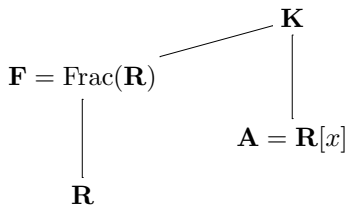
```
Loading "ManuTools.magma"
> Z := IntegerRing() ;
> ZX<X> := PolynomialRing(Z) ;
> p := 3 ;
> n := 6 ;
> k := 3 ;
> F := X^n + p*X^k - p^n ;
> F ;
X^6 + 3*X^3 - 729
> assert(IsIrreducible(F)) ;
> G,_,_ := SquareFreeMod(F,p) ;
> G ;
X
>
> K<x> := NumberField(F) ;
> A := Order([x]) ;
>
> y := Evaluate(G,x)/p ;
> y ;
1/3*x
> Hy, _, P, _ := ManuIntegers(y) ;
> Hy ;
[
    1,
    3*x,
    x^2,
    1/3*(x^3 + 3),
    1/9*(x^4 + 3*x),
    1/27*(x^5 + 3*x^2)
]
> P ;
9*$.1^6 + $.1^3 - 9
> d := Degree(P) ;
> d ;
6
>
> H,Q,_ := DedekindInteger(F,p) ;
> z := Evaluate(Q,x)/p ;
> z ;
1/3*x^5
>
> DedekindOrder := Order([x] cat [z]) ;
> ManuOrder := Order([x] cat Hy) ;
> assert Index(DedekindOrder, A) eq p^(Degree(H)) ;
```

```
>
> // Est-ce que A[Hy] est un ordre p-maximal ?
> ManuOrder eq pMaximalOrder(A,p) ;
false
>
> // E[1] = E^0 = A ; E[2] = E^1 = A.1 + A.y
> E := [ideal < A | [y^k : k in [0..i]]> : i in [0..d]]  ;
>
> // Stabilisateurs
> // S[1] = Stab(E^0) = A,  S[2] = Stab(E^1), ..., S[d] = Stab(E^(d-1)), S[d+1]
= Stab(E^d)
> S := [MultiplicatorRing(E[i]) : i in [1..d+1]] ;
>
> assert S[2] eq DedekindOrder ;
> assert S[d] eq ManuOrder ;
>
> // [Stab(E^1) : Stab(E^0)],   [Stab(E^2) : Stab(E^1)],  ...,  [Stab(E^(d-1)) :
Stab(E^(d-2))], [Stab(E^d : Stab(E^(d-1))] = 1
> Ind := [Index(S[i+1], S[i]) : i in [1..d]] ;
> Ind ;
[ 3, 9, 27, 1, 1, 1 ]
>
> // Stab(E^(k+1)) = Stab(E^k)
> assert Ind[k+1] eq 1 ;
>
> SetEchoInput(false) ;
```

# 5 Le critère de Dedekind pour une algèbre monogène

Nous nous sommes appuyés sur les travaux de thèse d'Emmanuel Hallouin. Le cadre algébrique dans lequel il énonce le critère de Dedekind a l'avantage d'être relativement général.

Les notations sont peu courantes mais elles sont cohérentes avec les sections précédentes. Soit $\mathbf{R}$ un anneau jouant le rôle « d'anneau de base ». Considérons la $\mathbf{R}$-algèbre monogène $\mathbf{A} = \mathbf{R}[X]/\langle F\rangle = \mathbf{R}[x]$ où $F \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme unitaire. Enfin, soit $\pi$ un élément régulier engendrant un idéal maximal de $\mathbf{R}$.




Un exemple typique de cette situation : un anneau de valuation discrète $\mathbf{R}$ et $\pi$ une uniformisante ou encore, sans passer en local, un anneau principal $\mathbf{R}$ et $\pi$ un irréductible.

Une des questions à laquelle nous souhaitons répondre est :

« à quelle(s) condition(s), l'idéal $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ est-il inversible ? »

D'après la proposition 2.9, on sait que

$$\sqrt{\pi\mathbf{A}} \;=\; \langle \pi,\, G(x)\rangle$$

où $G$ est un relèvement de la partie sans facteur carré [4] de $F$ modulo $\pi$. Comme $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{R}$-algèbre libre de rang $n = \deg F$, l'élément $\pi \in \mathbf{R}$ reste régulier dans $\mathbf{A}$.

## 5.1 Enoncé du critère

Rappelons l'énoncé tel qu'il a été dégagé par Emmanuel Hallouin dans [Hal98, Théorème II.2.14]. On fait appel à l'invariant $\chi_{\mathbf{R}}(M)$ défini pour un $\mathbf{R}$-module $M$ de longueur finie par Jean-Pierre Serre (cf. [Ser, chap III, §2, proposition 5]). Comme l'anneau est principal, un module de longueur finie est de torsion et cet invariant n'est rien d'autre que le produit des facteurs invariants de $M$.

4. Inutile que le corps résiduel $\mathbf{R}/\mathfrak{m}$ soit parfait dans le cas d'une algèbre monogène.

**Proposition 5.1.** *Soit* $\mathbf{R}$ *un anneau principal et* $\pi$ *un irréductible. Soit* $F \in \mathbf{R}[X]$ *un polynôme unitaire. On introduit des représentants* $G_1, \dots, G_r \in \mathbf{R}[X]$ *des diviseurs irréductibles de* $F$ *modulo* $\pi$ *avec leur multiplicité* $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$ *ainsi qu'un polynôme* $R \in \mathbf{R}[X]$ *tels que*

$$F \;=\; G_1^{e_1} \cdots G_r^{e_r} \;+\; \pi R$$

*1) L'idéal* $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ *est inversible si et seulement si les polynômes* $\prod_{e_i \geqslant 2} G_i$ *et* $R$ *sont premiers entre eux modulo* $\pi$*.*

*2) Considérons l'ensemble* $\mathcal{N} = \{\, i \mid e_i \geqslant 2 \text{ et } \overline{G}_i \mid \overline{R} \,\}$ *et les polynômes*

$$Q \;=\; \left(\prod_{i \notin \mathcal{N}} G_i^{e_i}\right)\left(\prod_{i \in \mathcal{N}} G_i^{e_i - 1}\right) \qquad \text{et} \qquad H = \prod_{i \in \mathcal{N}} G_i$$

*si bien que* $F = HQ + R$*. Alors l'élément*[5] $z = \dfrac{Q(x)}{\pi}$ *est entier sur* $\mathbf{R}$ *et*

$$\mathrm{Stab}(\sqrt{\pi\mathbf{A}}) \;=\; \mathbf{A} + \mathbf{A}z \;=\; \mathbf{A}[z]$$

*De plus, ce stabilisateur est un* $\mathbf{R}$*-module libre de rang maximum (à savoir* $n = \deg F$*), de base*

$$\Big(1,\, x,\, \dots,\, x^{\deg Q - 1},\, z,\, xz,\, \dots,\, x^{\deg H - 1} z\Big)$$

*et son discriminant est donné par*

$$\mathrm{disc}(\mathbf{A}) \;=\; \pi^{2\deg H}\, \mathrm{disc}(\mathbf{A}[z])$$

*car* $\chi_{\mathbf{R}}(\mathbf{A}[z]/\mathbf{A}) = \langle \pi^{\deg H} \rangle_{\mathbf{R}}$*.*

## 5.2 Une autre démonstration du critère de Dedekind

Soit $\mathbf{R}$ un anneau commutatif unitaire. Soit $F \in \mathbf{R}[X]$ unitaire et $\mathbf{A} = \mathbf{R}[x] = \mathbf{R}[X]/\langle F \rangle$. Pour $\pi \in \mathbf{R}$ élément régulier, vont intervenir des factorisations de $F$ modulo $\pi$ du type $\overline{F} = \overline{G}\,\overline{Q}$. Nous allons donc considérer des écritures $F = GQ + \pi R$ avec $G$ et $Q \in \mathbf{R}[X]$ unitaires, ce type d'égalité constituant l'hypothèse des deux résultats suivants.

**Lemme 5.2.** *Dans* $\mathbf{A}$*, on a les égalités suivantes*

$$\big(\pi : G(x)\big) \;=\; \langle Q(x),\, \pi \rangle \qquad \text{et} \qquad \big(G(x) : \pi\big) \;=\; \langle R(x),\, G(x) \rangle$$

***Preuve.*** Les inclusions $\supset$ sont évidentes. On traite les deux autres inclusions simultanément. Soit $A$ et $B$ deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ tels que $A(x)G(x) = \pi B(x)$ dans $\mathbf{R}[x]$. On relève cette égalité dans $\mathbf{R}[X]$ : il existe donc un polynôme $U \in \mathbf{R}[X]$ tel que $AG - \pi B = UF = UGQ + \pi UR$, d'où $(A - UQ)G = \pi(B + UR)$. Comme $G$ est unitaire, on a $A - UQ = \pi V$ pour un certain $V \in \mathbf{R}[X]$. Ainsi $A(x) = U(x)Q(x) + \pi V(x)$ ce qui fournit la première inclusion. En multipliant cette égalité par $G(x)$, on obtient donc $A(x)G(x) = \big(UQ + \pi V\big)(x)G(x) = \pi\left(-\big(UR\big)(x) + \big(VG\big)(x)\right)$, la dernière égalité étant obtenue en évaluant $F = GQ + \pi R$ en $x$. D'où $\pi B(x) = \pi(-U(x)R(x) + V(x)G(x))$. On peut simplifier par $\pi$ qui est régulier et on obtient $B(x) = -U(x)R(x) + V(x)G(x)$. □

**Proposition 5.3.** *(i) L'idéal* $\langle \pi, G(x) \rangle$ *de* $\mathbf{A}$ *est inversible si et seulement si*

$$1 \;\in\; \langle G(x),\, Q(x),\, R(x),\, \pi \rangle$$

*ou encore, en relevant dans* $\mathbf{R}[X]$*, si et seulement si,* $1 \in \langle G,\, Q,\, R,\, \pi \rangle$*. De plus, une relation* $1 = AG + BQ + CR + D\pi$ *fournit les égalités d'idéaux de* $\mathbf{A}$

$$\langle \pi, G(x) \rangle \langle U(x), V(x) \rangle \;=\; \langle \pi \rangle \qquad \text{et} \qquad \langle \pi, G(x) \rangle \langle S(x), T(x) \rangle \;=\; \langle G(x) \rangle$$

5. Cet élément est baptisé *entier de Dedekind* par E. Hallouin dans sa thèse.

*où $U, V, S, T \in \mathbf{R}[X]$ sont définis par l'égalité matricielle :*

$$\begin{bmatrix} U & S \\ V & T \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} B & D \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & -R \\ \pi & G \end{bmatrix}$$

*La matrice $\left[\begin{smallmatrix} U(x) & S(x) \\ V(x) & T(x) \end{smallmatrix}\right]$ est alors une matrice de localisation principale pour $\big(\pi, G(x)\big)$.*

*(ii) Soit $D \in \mathbf{R}[X]$ un diviseur unitaire de $G$, $Q$ et $R$ modulo $\pi$. Si $\deg D \geqslant 1$ alors $\pi^2 \mid \mathrm{disc}(F)$.*

***Preuve.*** *(i)* Un idéal $\mathfrak{a}$ contenant un élément régulier est inversible si, et seulement si, il est localement principal. Dans ce cas, par définition, il existe $n$ éléments $x_1, \dots x_n \in \mathfrak{a}$ tel que $1 \in \sum_{i=1}^{n} (x_i : \mathfrak{a})$. En fait, ceci est vrai pour n'importe quel système générateur de $\mathfrak{a}$. Ainsi, dire que $\langle \pi, G(x)\rangle$ est inversible c'est dire que $1 \in \big(\pi : G(x)\big) + \big(G(x) : \pi\big) = \langle Q(x), \pi\rangle + \langle R(x), G(x)\rangle$ d'après le lemme. Le reste est facile. Il suffit de multiplier la relation $1 = AG + \cdots$ par $\pi$, d'évaluer en $x$ et d'utiliser que $R(x)\pi = -G(x)Q(x)$. L'autre égalité se montre de la même façon.

*(ii)* On écrit $G = D\widetilde{G} + \pi g$, $Q = D\widetilde{Q} + \pi q$ et $R = D\widetilde{R} + \pi r$. Le polynôme $F = GQ + \pi R$ vérifie alors

$$F \;\equiv\; D\widetilde{D} \pmod{\pi^2}$$

où $\widetilde{D} = D\widetilde{G}\widetilde{Q} + \pi(\widetilde{G}q + \widetilde{Q}g + \widetilde{R})$ est unitaire. Examinons le discriminant de $F$. On a

$$\mathrm{disc}(F) \;\equiv\; \mathrm{disc}(D\widetilde{D}) \;\equiv\; \mathrm{disc}(D)\,\mathrm{disc}(\widetilde{D})\,\mathrm{res}^2(D, \widetilde{D}) \pmod{\pi^2}$$

Jusqu'à présent, le polynôme $D$ était simplement un diviseur unitaire quelconque de $G$, $Q$ et $R$ modulo $\pi$. La condition $\deg D \geqslant 1$ et l'égalité $\widetilde{D} \equiv D \pmod{\pi}$ fournissent $\mathrm{res}(D, \widetilde{D}) \equiv 0 \pmod{\pi}$. En reportant dans l'égalité ci-dessus, on obtient $\mathrm{disc}(F) \equiv 0 \pmod{\pi^2}$. □

**Lorsque $\pi$ engendre un idéal maximal**

On garde le contexte précédent et on rajoute l'hypothèse « $\pi$ engendre un idéal maximal de $\mathbf{R}$ ». Typiquement, il faut penser à $\mathbf{R}$ anneau principal et $\pi$ un irréductible de $\mathbf{R}$. Dans ce nouveau contexte, $\mathbf{R}/\pi\mathbf{R}$ est un corps si bien que l'on peut considérer la décomposition en produit d'irréductibles de $F$ dans ce quotient. Soient $G_1, \dots, G_r \in \mathbf{R}[X]$ des représentants des irréductibles de $F$ modulo $\pi$ avec leur multiplicité $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$ :

$$F \;=\; G_1^{e_1} \cdots G_r^{e_r} \;+\; \pi R$$

Par ailleurs, si on note $G = \prod G_i$ un relevé de la partie sans facteur carré de $F$ modulo $\pi$, alors $\sqrt{\pi\mathbf{A}} = \langle \pi, G(x)\rangle$. Enfin, on pose $Q = \prod G_i^{e_i - 1}$ de sorte que $F = GQ + \pi R$.

**Proposition 5.4.**

*(i) L'idéal $\langle \pi, G_i(x)\rangle$ est inversible si et seulement si $e_i = 1$ ou $\overline{G}_i \wedge \overline{R} = 1$ (i.e. $\overline{G}_i \not| \overline{R}$).*

*(ii) On considère $D \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme unitaire tel que $\overline{D} = \mathrm{pgcd}(\overline{G}, \overline{Q}, \overline{R})$ dans $\mathbf{R}/\pi\mathbf{R}[X]$. Si $D = 1$, alors $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ est inversible. Si $\deg D \geqslant 1$, alors $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ est non inversible et $\pi^2 \mid \mathrm{disc}(F)$.*

***Preuve.***

*(i)* On applique la proposition 5.3 à $G = G_i$, $Q = G_i^{e_i - 1} \prod_{j \neq i} G_j^{e_j}$. La condition $1 \in \langle G, Q, R, \pi\rangle$ est alors équivalente à $e_i = 1$ ou $\overline{G}_i \wedge \overline{R} = 1$.

*(ii)* On applique la proposition 5.3 à $G = \prod G_i$ et on utilise le point *(ii)* de cette même proposition. □

## 5.3 Évitement du conducteur (*bis repetita placent*)

L'objet de cette section est de donner une situation concrète dans laquelle il y a effectivement « évitement du conducteur ». La proposition dégagée à la section 3.3 couvre largement ce que nous allons raconter ci-dessous. Cependant, nous donnons, dans cette situation concrète, une preuve encore plus élémentaire que celle donnée pour la proposition 3.3.

Commençons par un des faits généraux avec un anneau commutatif $\mathbf{R}$ et un polynôme unitaire $F \in \mathbf{R}[X]$. On note toujours $\mathbf{A} = \mathbf{R}[x] = \mathbf{R}[X]/\langle F\rangle$. Soit $\pi \in \mathbf{R}$ un élément tel que $\mathbf{k} = \mathbf{R}/\pi\mathbf{R}$ soit un corps. On introduit la décomposition en irréductibles de $F$ modulo $\pi$

$$F \;=\; G_1^{e_1} \cdots G_r^{e_r} \;+\; \pi R$$

On pose $\mathfrak{q}_k = \langle \pi,\, G_k(x)^{e_k} \rangle$ et $\mathfrak{p}_k = \langle \pi,\, G_k(x) \rangle$. On a $\mathfrak{p}_k^{e_k} \subset \mathfrak{q}_k \subset \mathfrak{p}_k$ ainsi que les égalités classiques :

$$\pi\mathbf{A} \;=\; \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \sqrt{\pi\mathbf{A}} \;=\; \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$$

**Lemme 5.5.** *On se place dans le contexte précédent et on suppose en plus $\pi$ régulier. Si $\mathfrak{p}_i$ est inversible, alors $\mathfrak{p}_i^e = \langle \pi, G_i(x)^e \rangle$ pour tout $0 \leqslant e \leqslant e_i$. En particulier, $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{e_i}$.*

***Preuve.*** On souhaite montrer l'égalité $\langle \pi, G_i(x) \rangle^e = \langle \pi, G_i(x)^e \rangle$ pour tout $0 \leqslant e \leqslant e_i$. L'inclusion $\subset$ est évidente et dans l'inclusion $\supset$, il suffit juste de faire rentrer $\pi$ dans le membre gauche. On peut se permettre de supposer $e_i \geqslant 2$ (si $e_i = 1$ la proposition est évidente) de sorte que $Q = G_i^{e_i-1} \prod_{j\neq i} G_j^{e_j}$ est multiple de $G = G_i$ dans l'égalité $F = GQ + \pi R$. En utilisant la proposition 5.3 et le fait que $\mathfrak{p}_i$ est inversible, on obtient alors $1 \in \langle G_i, R, \pi \rangle = \langle R \rangle + \langle \pi, G_i \rangle$. Pour tout entier $e$, on a $1 \in \langle R \rangle + \langle \pi, G_i \rangle^e$. En multipliant par $\pi$ et en évaluant en $x$, on obtient $\pi \in \langle \pi R(x) \rangle + \langle \pi, G_i(x) \rangle^e$. Or $\pi R(x) \in \langle G_i(x)^{e_i} \rangle \subset \langle G_i(x) \rangle^e$ pour tout $e \leqslant e_i$. Finalement, on a obtenu $\pi \in \langle \pi, G_i(x) \rangle^e$ ce qui achève la démonstration. □

Mettons-nous à présent dans la situation concrète suivante : $\mathbf{R}$ anneau principal et $F \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme unitaire irréductible. On appelle $\mathbf{K}$ le corps des fractions de $\mathbf{A} = \mathbf{R}[x]$ et on note $\mathcal{O}_\mathbf{K}$ l'ordre maximal. On garde les notations précédentes concernant les idéaux $\mathfrak{p}_k$ et $\mathfrak{q}_k$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des indices $j$ tels que $\mathfrak{p}_j$ est non inversible et $\mathcal{I}$ l'ensemble des indices $i$ tels que $\mathfrak{p}_i$ est inversible. On rappelle que

$$\mathcal{N} \;=\; \{\, j \mid e_j \geqslant 2 \;\text{ et }\; \overline{G}_j \mid \overline{R} \,\} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \mathcal{I} = \{\, i \mid e_i = 1 \;\text{ ou }\; \overline{G}_i \wedge \overline{R} = 1 \,\}$$

La proposition suivante dit que si $\mathfrak{p}_i$ est inversible, alors il est comaximal au conducteur et récupère toutes les bonnes propriétés des idéaux évitant le conducteur, notamment l'isomorphisme canonique $\mathbf{A}/\mathfrak{p}_i \simeq \mathcal{O}_\mathbf{K}/\mathfrak{p}_i\mathcal{O}_\mathbf{K}$.

**Proposition 5.6.** *En écrivant* $\operatorname{disc}(F) = \pi^v\mu$ *avec $\pi \wedge \mu = 1$, on a*

$$1 \in \Big(\prod_{j\in\mathcal{N}} \mathfrak{q}_j\Big)^v \mu \;+\; \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{p}_i \qquad\qquad \textit{et} \qquad\qquad \Big(\prod_{j\in\mathcal{N}} \mathfrak{q}_j\Big)^v \mu\, \mathcal{O}_\mathbf{K} \;\subset\; \mathbf{A}$$

*En particulier, $1 \in \mathfrak{f} + \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{p}_i$ où $\mathfrak{f}$ est le conducteur de $\mathcal{O}_\mathbf{K}$ dans $\mathbf{A}$.*

***Preuve.*** Pour l'inclusion. Le discriminant de $F$ conduit $\mathcal{O}_\mathbf{K}$ dans $\mathbf{A}$, c'est-à-dire $\pi^v\mu\mathcal{O}_\mathbf{K} \subset \mathbf{A}$. Ce que l'on peut encore écrire

$$\Big(\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{q}_i\Big)^v \Big(\prod_{j\in\mathcal{N}} \mathfrak{q}_j\Big)^v \mu\, \mathcal{O}_\mathbf{K} \;\subset\; \mathbf{A}$$

D'après le lemme précédent, on a $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{e_i}$. En notant $e = \max e_i$, on obtient

$$\Big(\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{p}_i\Big)^{ev} \Big(\prod_{j\in\mathcal{N}} \mathfrak{q}_j\Big)^v \mu\, \mathcal{O}_\mathbf{K} \;\subset\; \mathbf{A}$$

Ainsi $\Big(\prod_{j\in\mathcal{N}} \mathfrak{q}_j\Big)^v \mu\, \mathcal{O}_\mathbf{K} \subset \mathbf{A}^{[\mathfrak{b}]}$ où $\mathfrak{b}$ est l'idéal $\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{p}_i$ qui est radical (car les $\mathfrak{p}_i$ sont comaximaux) et inversible. Le fait que $\mathfrak{b}$ soit inversible force l'égalité $\operatorname{Stab}(\mathfrak{b}) = \mathbf{A}$ et la proposition 3.1 donne $\mathbf{A}^{[\mathfrak{b}]} = \mathbf{A}$ d'où l'inclusion.

Pour la relation de comaximalité. D'une part, on a $1 \in \langle \mu \rangle + \langle \pi \rangle \subset \langle \mu \rangle + \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{p}_i$. D'autre part, $1 \in \prod \mathfrak{p}_j + \prod \mathfrak{p}_i$ donc $1 \in \prod \mathfrak{p}_j^{e_j} + \prod \mathfrak{p}_i \subset \prod \mathfrak{q}_j + \prod \mathfrak{p}_i$. D'où $1 \in \Big(\prod_{j\in\mathcal{N}} \mathfrak{q}_j\Big)^v + \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathfrak{p}_i$. En multipliant ces deux relations de comaximalité, on obtient le résultat. □

# 6 Des exemples dans le cas d'une algèbre monogène

Soit $\mathbf{R}$ un anneau principal, $\pi$ un irréductible de $\mathbf{R}$ et enfin $F \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme unitaire. On note toujours $\mathbf{A} = \mathbf{R}[X]/\langle F \rangle = \mathbf{R}[x]$. On introduit la décomposition en irréductibles de $F$ modulo $\pi$

$$F \;=\; G_1^{e_1} \cdots G_r^{e_r} \;+\; \pi R$$

On note $G = G_1 \cdots G_r$ la partie sans facteur carré de $F$ modulo $\pi$.

On s'intéresse toujours à l'inversibilité de l'idéal $\sqrt{\pi\mathbf{A}} = \langle \pi, G(x)\rangle$ ou ce qui revient au même du $\mathbf{A}$-module $E = \mathbf{A} + \mathbf{A}y$ où $y = \frac{G(x)}{\pi}$. S'il n'est pas inversible dans $\mathbf{A}$, on sait qu'il est inversible dans $\mathrm{Stab}(E^{d-1}) = \mathbf{A}[H_y]$ où $d = [\mathbf{F}[y] : \mathbf{F}]$ avec $\mathbf{F} = \mathrm{Frac}(\mathbf{R})$. Sur des exemples, on va voir que cette algèbre est en un certain sens meilleure que l'algèbre de l'entier de Dedekind $\mathrm{Stab}(E) = \mathbf{A}[z]$ (définie au point 2 de la proposition 5.1).

## 6.1 $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ inversible

**Polynôme sans facteur carré modulo $\pi$**

On suppose $F$ sans facteur carré modulo $\pi$. A fortiori, cela fonctionne si $F$ est séparable modulo $\pi$ ou encore plus fort, $F$ irréductible modulo $\pi$. Dans ce cas, on a alors $\langle \pi, G(x)\rangle = \langle \pi\rangle$. L'idéal $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ est donc principal, donc inversible. Notons que le critère de Dedekind est vérifié trivialement car $\prod_{e_i \geqslant 2} G_i = 1$.

**Polynôme $\pi$-Eisenstein**

Soit $F$ un polynôme unitaire et $\pi$-Eisenstein c'est-à-dire $\pi$ divise tous les coefficients (sauf le dominant qui est 1 ici) et $\pi^2$ ne divise pas le coefficient constant. Ainsi le polygone de Newton de $F$ est réduit à un seul segment de pente $-1/n$ où $n = \deg(F)$. Comme $\pi$ divise tous les coefficients (sauf le dominant), on a (on peut choisir) $G = X$.

On va montrer que $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ est inversible (dans $\mathbf{A}$).

• Avec les entiers d'Emmanuel de $y = \frac{G(x)}{\pi} = \frac{x}{\pi}$
Le polynôme $P = \frac{1}{\pi}F(\pi X) = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$ annule $y$ et est primitif (car $c_n = \pi^{n-1}$ et $v_\pi(c_0) = 0$). De plus, $v_\pi(c_i) \geqslant i - 1$. Ainsi les entiers d'Emmanuel sont tous dans $\mathbf{A}$. En effet, on rappelle qu'il y a $n-1$ entiers d'Emmanuel définis par $h_k = c_n y^k + c_{n-1}y^{k-1} + \cdots + c_{n-k}$. Bref, on a $\mathbf{A}[H_y] = \mathbf{A}$ ce qui assure l'inversibilité de $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ (d'après le critère donné à la proposition 4.10).

• Avec le critère de Dedekind
Comme $F$ est $\pi$-Eisenstein, le coefficient constant de $R$ a une $\pi$-valuation nulle. Ainsi $1 \in \langle \prod_{e_i \geqslant 2} G_i, R, \pi\rangle$.

## 6.2 $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ non inversible

**Polynôme ayant un polygone de Newton réduit à un unique segment de pente $-1$**

On peut penser à un polynôme de ce type là :

$$F(X) \;=\; X^n + \pi X^{n-1} + \cdots + \pi^{n-k}X^k + \cdots + \pi^{n-1}X + \pi^n$$

Ce polynôme ne vérifie pas le critère de Dedekind car $\prod_{e_i \geqslant 2} G_i = X$ et $R$ ne sont pas premiers entre eux modulo $\pi$. Regardons ce que donne les entiers d'Emmanuel de $y = \frac{x}{\pi}$. Le polynôme $P = \frac{1}{\pi^n}F(\pi X) = \sum a_i X^i$ est unitaire, à coefficients dans $\mathbf{A}$ (en fait, dans $\mathbf{R}$) car $v_\pi(a_i) \geqslant n - i$ et surtout annule $y$. Par conséquent, $y$ est entier sur $\mathbf{A}$ d'où $\mathbf{A}[H_y] = \mathbf{A}[y]$. Comme $x = \pi y$, on a même $\mathbf{A}[y] = \mathbf{R}[y]$.

Une $\mathbf{R}$-base de $\mathbf{R}[y]$ est $(1, y, \ldots, y^{n-1})$ et cette base est adaptée à la $\mathbf{R}$-base de $\mathbf{A}$ donnée par $(1, x, \ldots, x^{n-1})$. On en déduit que

$$\chi_{\mathbf{R}}\big(\mathbf{A}[H_y]/\mathbf{A}\big) \;=\; \langle \pi^{\frac{n(n-1)}{2}}\rangle_{\mathbf{R}}$$

L'algèbre engendrée par l'entier de Dedekind $z = \frac{x^{e-1}}{\pi}$ est beaucoup plus proche de $\mathbf{A}$ que l'algèbre des entiers d'Emmanuel car, rappelons-le, on a (avec les notations de la proposition 5.1, on a $H = X$ qui est de degré 1)

$$\chi_{\mathbf{R}}\big(\mathbf{A}[z]/\mathbf{A}\big) \;=\; \langle \pi\rangle_{\mathbf{R}}$$

En fait, la suite des stabilisateurs est strictement croissante et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$\chi_{\mathbf{R}}\big(\mathrm{Stab}(E^k)/\mathrm{Stab}(E^{k-1})\big) \;=\; \langle \pi^k\rangle_{\mathbf{R}}$$

En prenant $k = 1$, on retrouve l'égalité précédente concernant l'algèbre de Dedekind.

En MAGMA, on fait en sorte d'obtenir un polynôme irréductible sur $\mathbb{Z}$ pour profiter des constructeurs existants. Un exemple typique de polynôme irréductible vérifiant les hypothèses est (le caractère irréductible n'est absolument pas une évidence) :

$$F(X) \;=\; X^n + pX^{n-1} + \cdots + p^{n-k}X^k + \cdots + p^{n-1}X - p^n$$

**Polynôme ayant un $G$-polygone de Newton réduit à un unique segment de pente $-1$**

Considérons un polynôme $F$ de la forme

$$F \;=\; G^e \,+\, c_{e_1}(X)G^{e-1} \,+\, \cdots \,+\, c_0(X)$$

où $G$ est un polynôme irréductible modulo $\pi$ de degré $f$, et $c_i \in \mathbf{R}[X]$ est tel que le minimum des valuations de ses coefficients noté $v(c_i)$ vérifie $v(c_i) \geqslant e-i$.

Ce polynôme $F$ ne vérifie pas le critère de Dedekind. Voyons ce qui se passe du côté de l'algèbre des entiers d'Emmanuel de $y = \frac{G(x)}{\pi}$. On introduit le polynôme $\widetilde{P} = T^e + c_{e-1}(x)T^{e-1} + \cdots + c_0(x) \in \mathbf{A}[T]$ qui annule $G(x)$. Il n'est donc pas difficile de fournir un polynôme annulant $y$ et primitif : le polynôme $P = \frac{1}{\pi^e}\widetilde{P}(\pi T)$ annule $y$, est unitaire et à coefficients dans $\mathbf{A}$. Par conséquent, $y$ est entier sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}[H_y] = \mathbf{A}[y] = \mathbf{R}[x,y]$. En considérant la $G$-base de $\mathbf{R}[x]$, c'est-à-dire en écrivant la décomposition

$$\mathbf{A} \;=\; \mathbf{R}[x] \;=\; \bigoplus_{\substack{0\leqslant i<f\\ 0\leqslant j<e}} \mathbf{R}x^iG(x)^j$$

il n'est pas difficile de voir que

$$\mathbf{A}[H_y] \;=\; \bigoplus_{\substack{0\leqslant i<f\\ 0\leqslant j<e}} \mathbf{R}x^iy^j$$

On en déduit, puisque $y = \frac{G(x)}{\pi}$, que

$$\chi_{\mathbf{R}}\big(\mathbf{A}[H_y]/\mathbf{A}\big) \;=\; \langle \pi^{\frac{n(e-1)}{2}} \rangle_{\mathbf{R}}$$

Quant à elle, l'algèbre de Dedekind $\mathbf{A}[z]$ où $z = \frac{G^{e-1}}{\pi}$ vérifie

$$\chi_{\mathbf{R}}\big(\mathbf{A}[z]/\mathbf{A}\big) \;=\; \langle \pi^f \rangle_{\mathbf{R}}$$

# 7 Inverser $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ dans une extension entière de A, au-dessus d'un anneau principal

Le contexte : soit $\mathbf{R}$ un anneau principal et $\pi$ un élément irréductible tel que $\mathbf{R}/\pi\mathbf{R}$ est parfait. Soit $\mathbf{A}$ un anneau intègre (de corps des fractions $\mathbf{K}$) qui est une $\mathbf{R}$-algèbre de type fini engendrée par des éléments entiers sur $\mathbf{R}$, disons

$$\mathbf{A} \;=\; \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_s]$$

Le fait de supposer $\mathbf{R}$ principal et $\mathbf{A}$ intègre nous offre la possibilité d'utiliser le procédé effectif permettant d'inverser les idéaux 2-engendrés décrit à la section 4.

Dans cette situation, on va montrer comment inverser $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ dans un sur-anneau $\mathbf{A}' \subset \mathbf{K}$ que l'on va construire comme $\mathbf{A}$-algèbre de type fini engendrée par des éléments entiers sur $\mathbf{A}$ (donc $\mathbf{A}'$ sera une extension entière de $\mathbf{A}$).

Pour présenter la stratégie, supposons $s = 2$, *i.e.* $\mathbf{A} = \mathbf{R}[x_1, x_2]$ ; la situation pour $s \geqslant 3$ s'en déduit facilement. Tout d'abord, d'après la proposition 2.10, on sait que

$$\sqrt{\pi\mathbf{A}} \;=\; \langle \pi, g_1, g_2 \rangle$$

avec $g_i = G_i(x_i)$ et $G_i \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme séparable modulo $\pi$ vérifiant $G_i(x_i) \in \sqrt{\pi\mathbf{R}[x_i]}$. Un tel polynôme existe car le corps résiduel $\mathbf{R}/\pi\mathbf{R}$ est supposé parfait.

**2-engendrer $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$**

On va d'abord chercher à 2-engendrer $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ (dans un sur-anneau $\mathbf{B}$ qui sera une $\mathbf{A}$-algèbre de type fini engendrée par des éléments entiers sur $\mathbf{A}$). Pour cela, on considère l'idéal 2-engendré $\langle g_1, g_2\rangle$. On sait l'inverser dans $\mathbf{B} = \mathbf{A}[H_y]$, algèbre des entiers d'Emmanuel de $y = \frac{g_2}{g_1}$. On raisonne maintenant dans $\mathbf{B}/\pi\mathbf{B}$ qui est un anneau de dimension 0. D'après la proposition 2.4, il existe $z \in \mathbf{B}$ tel que $\langle\overline{g_1}, \overline{g_2}\rangle = \langle\overline{z}\rangle$ dans $\mathbf{B}/\pi\mathbf{B}$, autrement dit $\langle\pi, g_1, g_2\rangle = \langle\pi, z\rangle$ dans $\mathbf{B}$.

Résumons : on a donc un élément $z \in \mathbf{B} = \mathbf{A}[H_y]$ avec $y = \frac{g_2}{g_1}$ tel que

$$\sqrt{\pi\mathbf{A}}.\mathbf{B} \;=\; \langle\pi, z\rangle_{\mathbf{B}}$$

**Inverser $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$**

Le paragraphe précédent a montré que l'on peut trouver $\mathbf{B}$ tel que $\sqrt{\pi\mathbf{A}}.\mathbf{B} \;=\; \langle\pi, z\rangle_{\mathbf{B}}$ pour un certain $z \in \mathbf{B}$. On est maintenant en mesure d'inverser un tel idéal. L'algèbre des entiers d'Emmanuel $\mathbf{A}' = \mathbf{B}[H_{z/\pi}]$ permet de le faire.

**Conclusion**

Nous avons donc construit un sur-anneau $\mathbf{A}' \subset \mathbf{K}$ qui est une $\mathbf{A}$-algèbre de type fini engendrée par des éléments entiers : ces éléments sont des entiers d'Emmanuel associés à divers éléments $y$ de $\mathbf{K}$ (rappelons que $\mathbf{A}[H_y] \subset \mathbf{A}[y] \subset \mathbf{K}$).

L'algèbre $\mathbf{A}'$ dont il était question au début pour inverser $\langle\pi, g_1, g_2\rangle$ est donc :

$$\mathbf{A}' \;=\; \mathbf{B}[H_{z/\pi}] \;=\; \mathbf{A}[H_{g_2/g_1}, H_{z/\pi}]$$

où $z \in \mathbf{B} = \mathbf{A}[H_{g_2/g_1}]$ est un élément ayant la vocation de rendre monogène $\langle g_1, g_2\rangle$ dans $\mathbf{B}/\pi\mathbf{B}$. A fortiori, ce $z$ vérifie

$$\sqrt{\pi\mathbf{A}}.\mathbf{A}' \;=\; \langle\pi, z\rangle_{\mathbf{A}'}$$

Cette dernière égalité aura son importance en pratique car, pour déterminer $\sqrt{\pi\mathbf{A}'}$, nul besoin de considérer $\mathbf{A}'$ en tant que $\mathbf{R}$-algèbre de type fini. Le fait de considérer $\mathbf{A}'$ comme une $\mathbf{A}$-algèbre de type fini suffira. En effet, si $\mathbf{A}' = \mathbf{A}[h_1, \ldots, h_q]$, on a

$$\sqrt{\pi\mathbf{A}'} \;=\; \sqrt{\pi\mathbf{A}}.\mathbf{A}' \;+\; \langle G_1(h_1), \ldots, G_q(h_q)\rangle$$

où les $G_i$ ont toujours la même propriété à savoir : $G_i \in \mathbf{R}[X]$ est un polynôme séparable modulo $\pi$ vérifiant $G_i(h_i) \in \sqrt{\pi\mathbf{R}[h_i]}$.

Par conséquent, en conservant préciseusement l'élément $z$ précédent, on obtient

$$\sqrt{\pi\mathbf{A}'} \;=\; \langle\pi, z, G_1(h_1), \ldots, G_q(h_q)\rangle$$

ce qui est déjà plus sympathique que

$$\sqrt{\pi\mathbf{A}'} \;=\; \langle\pi, g_1, \ldots, g_s, G_1(h_1), \ldots, G_q(h_q)\rangle$$

**Remarque 7.1.** Soit $\sqrt{\pi\mathbf{A}} = \langle\pi, z_1, \ldots, z_r\rangle$. Il ne suffit pas d'inverser les idéaux $\langle\pi, z_i\rangle$ pour inverser $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$. Par exemple, prenons $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[x_1, x_2]$ où $x_1 = \sqrt{3}$ et $x_2 = \sqrt{7}$. Alors $\sqrt{2\mathbf{A}} = \langle 2, z_1, z_2\rangle$ avec $z_1 = x_1 - 1, z_2 = x_2 - 1$. L'idéal $\langle 2, z_i\rangle$ est inversible dans $\mathbf{A}$ car il l'est dans $\mathbb{Z}[x_i] \subset \mathbf{A}$. Mais l'idéal $\langle z_1, z_2\rangle$ n'est pas inversible dans $\mathbf{A}$.

# 8 Un calcul de fermeture intégrale en dimension 1

Soit $\mathbf{A}$ un anneau intègre (de corps des fractions $\mathbf{K}$) qui est une algèbre de type fini, sur un anneau principal $\mathbf{R}$, engendrée par des éléments entiers sur $\mathbf{R}$, disons

$$\mathbf{A} \;=\; \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_s]$$

On suppose de plus que $\mathbf{K}$ est une extension séparable de $\mathbf{F} = \mathrm{Frac}(\mathbf{R})$ et que les corps résiduels $\mathbf{R}/\pi\mathbf{R}$ sont parfaits. Alors, on peut déterminer la clôture intégrale de $\mathbf{A}$ en tant que $\mathbf{R}$-algèbre de type fini (comme $\mathbf{R}$ est principal, $\mathbf{A}$ est libre sur $\mathbf{R}$, propriété que nous utiliserons pour le calcul en machine).

Considérons le discriminant $\Delta = \mathrm{disc}(\mathbf{A}) \in \mathbf{R}$ qui est non nul car l'extension est supposée séparable (ce discriminant est défini au carré d'un inversible de $\mathbf{R}$ près). On décompose $\Delta$ en produit fini de premiers $\pi_1^{\alpha_1} \cdots \pi_s^{\alpha_s}$ à un inversible près. Les monoïdes $\Delta^{\mathbb{N}}$, $1 + \pi_1\mathbf{R}$, …, $1 + \pi_s\mathbf{R}$ sont comaximaux [6] si bien qu'il suffit de vérifier l'inversibilité des idéaux dans $S^{-1}\mathbf{A}$ pour chaque monoïde $S$ du type ci-dessus.

Pour $S = \Delta$, il n'y a rien à vérifier. En effet, on a l'inclusion

$$\mathcal{O}_{\mathbf{K}} \ \subset \ \frac{1}{\Delta}\mathbf{A}$$

et on sait bien que tout idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ est inversible.

Pour $S = 1 + \pi\mathbf{R}$, qui a même saturé que $\mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{R}$, il suffit de demander l'inversibilité de $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ :

**Proposition 8.1.** *Si $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ est inversible dans $\mathbf{A}$ alors tout idéal (de type fini) non nul est inversible dans $S^{-1}\mathbf{A}$ où $S = 1 + \pi\mathbf{R}$.*

***Preuve.*** Soit $\mathfrak{b}$ un idéal non nul de $\mathbf{A}$. Il contient un élément non nul de $\mathbf{R}$ (par exemple, la norme d'un élément non nul). L'idéal $S^{-1}\mathfrak{b}$ contient une puissance de $\pi$ donc contient $S^{-1}\sqrt{\pi\mathbf{A}}$. Ce dernier idéal est radical, de dimension 0 et inversible car $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ est inversible dans $\mathbf{A}$ par hypothèse. D'après la proposition 2.6 appliquée à l'anneau $S^{-1}\mathbf{A}$ et à l'idéal $S^{-1}\mathfrak{b}$, ce dernier idéal est inversible. □

On vient donc de montrer que pour inverser tous les idéaux non nuls, il suffit d'inverser $\sqrt{\pi\mathbf{A}}$ pour $\pi$ divisant $\Delta$ (même divisant $\delta$, confer le paragraphe suivant). Pour un premier $\pi$, on détermine donc un sur-anneau $\mathbf{A}'$ de $\mathbf{A} \subset \mathbf{K}$ entier sur $\mathbf{A}$ tel que $\sqrt{\pi\mathbf{A}}.\mathbf{A}'$ soit inversible (dans $\mathbf{A}'$). Si $\sqrt{\pi\mathbf{A}'}$ est inversible, on s'arrête là. Sinon, on recommence. Le processus s'arrête car la $\pi$-valuation du discriminant de $\mathbf{A}'$ diminue strictement par rapport à celle de $\mathbf{A}$.

### Précisions

En fait, en notant $\delta$ le plus grand facteur carré de $\Delta$, *i.e.* $\Delta = \delta^2 k$ avec $k$ sans facteur carré, alors on a l'inclusion

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathcal{O}_{\mathbf{K}} \ \subset \ \frac{1}{\delta}\mathbf{A}$$

Il suffit de montrer que pour $z \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$, on a $z \in \frac{1}{\delta}\mathbf{A}$.

**Proposition 8.2.** *Soit $e = (e_i)$ une $\mathbf{R}$-base de $\mathbf{A}$. Soit $z \in \mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ que l'on peut écrire $z = \sum a_i e_i/d$ avec $d, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ comaximaux. Alors $d^2 \mid \mathrm{disc}(\mathbf{A})$.*

***Preuve.*** On va appliquer le lemme aux $\mathbf{R}$-modules $N = \bigoplus \mathbf{R}e_i$ (c'est la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathbf{A}$ ici) et $M = N + \mathbf{R}z$. Soit $e' = (e'_i)$ une $\mathbf{R}$-base de $M$. Le lemme ci-après fournit que $d$ et $\det_{e'}(e)$ sont associés dans $\mathbf{R}$. Par ailleurs, comme $M$ et $N$ sont des anneaux, on a l'égalité bien connue

$$\mathrm{disc}(e) \ = \ \mathrm{disc}(e')\big(\det_{e'}(e)\big)^2$$

On obtient ainsi que $d^2$ divise $\mathrm{disc}(e) \sim \mathrm{disc}(\mathbf{A})$. □

Dans la démonstration, on a eu besoin du lemme suivant (cf. [LQ11, lemme 8.18]).

**Lemme 8.3.** *Soit $\mathbf{R}$ un anneau commutatif. Considérons $M$ et $N$ deux $\mathbf{R}$-modules libres de rang $n$ avec $M = N + \mathbf{R}z$. Soit $d \in \mathbf{R}$ un élément régulier tel que $dz \in N$. On note $(e_i)$ une $\mathbf{R}$-base de $N$ et on écrit $dz = \sum a_i e_i$. Alors*

$$\det_{\mathcal{B}_M}(\mathcal{B}_N)\,.\langle d, a_1, \ldots, a_n\rangle \ = \ \langle d\rangle$$

*où $\det_{\mathcal{B}_M}(\mathcal{B}_N)$ désigne le déterminant d'une matrice exprimant une base de $N$ sur une base de $M$.*

6. Soit $s_i = 1 - u_i\pi_i$. Ainsi $1 = u_i\pi_i + s_i$. On peut faire apparaître les puissances : $1 = u_i\pi^{\alpha_i} + v_i s_i$. On multiplie ces égalités et on obtient une relation de comaximalité entre $\Delta$ et les $s_i$.

# 9 Une implémentation en Magma

Dans cette section, on présente notre implémentation en Magma de l'algorithme décrit dans le paragraphe précédent, permettant de calculer l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ d'un corps de nombres $\mathbf{K}$. On commence par décrire les trois fonctions principales de l'algorithme. Bien évidemment, ces fonctions principales font appel à d'autres fonctions, à savoir des fonctions implémentant certaines opérations sur les modules et ordres (calcul de $\mathbb{Z}$-base, opération de réduction), la génération de $\sqrt{p\mathbf{A}}$, les entiers d'Emmanuel de $y$ ainsi que la matrice de localisation principale de $(1, y)$. Afin d'avoir une vue d'ensemble sur le programme, nous présentons toutes ces fonctions de manière succincte et informelle avant de fournir l'intégralité du programme en fin de section. Enfin, on fait tourner notre implémentation sur quelques exemples en la comparant à la fonction `MaximalOrder` de Magma.

## 9.1 Le coeur du programme

`pEnlargedOrder(X, z, p)`

Etant donné un ordre $\mathbf{A}$ et un nombre premier $p$, on sait déterminer un sur-ordre $\mathbf{A}'$ (que l'on obtient comme $\mathbf{A}$-algèbre de type fini) tel que $\sqrt{p\mathbf{A}}.\mathbf{A}'$ soit inversible (on dit parfois $\sqrt{p\mathbf{A}}$ inversible dans $\mathbf{A}'$, par abus de langage). Il suffit de suivre la stratégie exposée à la section 7. C'est ce que réalise la fonction `pEnlargedOrder` qui prend trois arguments `X`, `z` et `p`. En fait, mathématiquement parlant, elle possède quatre arguments car `X` est un couple $(\mathbf{A}, X)$ où $\mathbf{A}$ est un ordre et $X$ une famille d'éléments entiers de $\mathbf{A}$ telle que $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0[X]$. L'anneau $\mathbf{A}_0$ est un ordre sauf pour la première approximation $\mathbf{A}$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{K}}$ où $\mathbf{A}_0 = \mathbb{Z}$. On profite du fait que Magma se souvient de l'ordre dans lequel vit `X`. Afin de ne pas doubler l'information, on a choisi de ne pas faire intervenir l'ordre $\mathbf{A}$ dans les arguments Magma de la fonction. L'argument `z` est mathématiquement peu important, il est surtout là pour éviter d'effectuer des calculs redondants comme expliqué juste avant la remarque 7.1. Précisément, l'argument `z` est un élément $z \in \mathbf{A}$ tel que $\sqrt{p\mathbf{A}_0}.\mathbf{A} = \langle p, z\rangle_{\mathbf{A}}$. Un système générateur de $\sqrt{p\mathbf{A}}$ est alors donné par

$$\sqrt{p\mathbf{A}} \;=\; \langle p, \mathcal{R}\rangle_{\mathbf{A}} \quad \text{avec} \;\; \mathcal{R} = \Big\{ z,\; \big(G_x(x)\big)_{x\in X} \Big\}$$

système retourné par la fonction `pRadicalGenerators(X, z, p)`.

La fonction `pEnlargedOrder` retourne $X'$ (dans lequel est ancré son ordre $\mathbf{A}'$) et $z'$ vérifiant $\mathbf{A}' = \mathbf{A}[X']$ et $\sqrt{p\mathbf{A}}.\mathbf{A}' = \langle p, z'\rangle_{\mathbf{A}'}$ idéal inversible. Plus précisément, $X'$ est obtenu en deux étapes. La première calculant $H$ et simultanément $z'$ tel que $\sqrt{p\mathbf{A}}.\mathbf{A}[H] = \langle p, z'\rangle_{\mathbf{A}[H]}$. La seconde calculant $M_y$ pour inverser l'idéal $\langle p, z'\rangle$ dans $\mathbf{A}[H, M_y] = \mathbf{A}'$.

Schématiquement, la fonction réalise

$$(\mathbf{A} = \mathbf{A}_0[X],\, z) \;\longrightarrow\; (\mathbf{A}' = \mathbf{A}[X'],\, z')$$

```
pEnlargedOrder := function(X, z, p)
  A := UniverseOrder(X) ;
  R := pRadicalGenerators(X, z, p) ;
  zprime, H := pPrincipal(R, p) ;
  eA := Kbasis(A) ;
  y := zprime/p ;
  My := {M[1,1], M[1,2], M[2,1]} where M is LocalisationMatrix(y) ;
  Xprime := EnlargingIntegers(A, H join My) ;
  return Xprime, zprime ;
end function ;
```

`pSubMaximalOrder(X0, p)`

Soit $X_0 = \{x_1, \ldots, x_r\}$ une famille d'entiers algébriques et $p$ un nombre premier. La fonction `pSubMaximalOrder(X0, p)` retourne un sur-ordre $\mathbf{B}$ de $\mathbb{Z}[X_0]$ tel que $\sqrt{p\mathbf{B}}$ soit inversible Passons à la description : cette fonction sollicite la fonction précédente, à savoir `pEnlargedOrder`, avec $\big(\mathbf{A} = \mathbb{Z}[X_0],\; z = 0\big)$. Est alors retourné $\big(\mathbf{A}' = \mathbf{A}[X'],\; z'\big)$ où l'idéal $\sqrt{p\mathbf{A}}.\mathbf{A}' = \langle p, z'\rangle_{\mathbf{A}'}$ a la propriété d'être inversible. Si $X'$

est vide, l'objectif est atteint, c'est-à-dire $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Sinon on recommence avec $(\mathbf{A}' = \mathbf{A}[X'], z')$. La terminaison est assurée car la $p$-valuation du discriminant de $\mathbf{A}'$ décroît strictement à chaque itération.

```
pSubMaximalOrder := function(X0, p)
  K := NumberField(Universe(X0)) ;
  X := X0 ;  z := K!0 ;
  repeat
     X, z := pEnlargedOrder(X,z,p) ;
  until IsEmpty(X) ;
  B := UniverseOrder(X) ;
  return B ;
end function ;
```

`OrderMaximal(K)`

Soit $\mathbf{K}$ un corps de nombres donné par $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_r)$ où les $x_i$ sont entiers sur $\mathbb{Z}$. On souhaite déterminer l'anneau des entiers $\mathcal{O}_\mathbf{K}$ de $\mathbf{K}$. L'ordre $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_r]$ est une première approximation de $\mathcal{O}_\mathbf{K}$. On a besoin de la factorisation du discriminant $\Delta$ de $\mathbf{A}$. Pour les premiers $p$ tels que $p^2 \not| \Delta$, il n'y a rien à faire puisque pour ces premiers, l'idéal $\sqrt{p\mathbf{A}}$ est inversible. Notons $\mathcal{P} = \{p \text{ premier tel que } p^2 \mid \Delta\}$. Pour chaque premier $p \in \mathcal{P}$, on détermine un ordre $p$-maximal $\mathbf{A}^{(p)}$ avec notre fonction `pSubMaximalOrder`. Il s'agit maintenant de rassembler ces $\mathbf{A}^{(p)}$ pour obtenir $\mathcal{O}_\mathbf{K}$. Se présentent alors deux stratégies.

**Première stratégie : $\mathcal{O}_\mathbf{K} = \sum_{p\in\mathcal{P}} \mathbf{A}^{(p)}$**

Ici, on considère la somme des $\mathbf{A}$-modules $\mathbf{A}^{(p)}$. Le fait que cette somme fournisse l'anneau $\mathcal{O}_\mathbf{K}$ n'est pas totalement une évidence. Une façon de le voir consiste à introduire l'ordre $p$-maximal $\mathbf{A}^{[p]}$ défini à la section 3.1. Commençons par remarquer que l'on a $\mathbf{A}^{[p]} \subset \mathbf{A}^{(p)}$. Pour justifier cette dernière inclusion, posons $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{(p)}$. Comme $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, on a $\mathbf{A}^{[p]} \subset \mathbf{B}^{[p]}$. Par définition de $\mathbf{B}$, l'idéal $\sqrt{p\mathbf{B}}$ est inversible, donc $\mathrm{Stab}(\sqrt{p\mathbf{B}}) = \mathbf{B}$. La section 3.2 nous apprend alors que $\mathbf{B}^{[p]} = \mathbf{B}$. On récupère donc l'inclusion souhaitée $\mathbf{A}^{[p]} \subset \mathbf{B}$.

Revenons à la somme des $\mathbf{A}^{(p)}$. En fait, nous allons montrer l'égalité avec les ordres $p$-maximaux, *i.e.* $\mathcal{O}_\mathbf{K} = \sum_{p\in\mathcal{P}} \mathbf{A}^{[p]}$, ce qui suffit d'après la remarque précédente. De manière générale, pour deux entiers $m_1$ et $m_2$ premiers entre eux, une relation de Bezout fournit l'égalité $\mathbf{A}^{[m_1]} + \mathbf{A}^{[m_2]} = \mathbf{A}^{[m_1 m_2]}$. Par ailleurs, si $p^2 \not| \Delta$ alors $\mathbf{A}^{[p]} = \mathbf{A}$ (en effet, si $p^2 \not| \Delta$, on sait que $\sqrt{p\mathbf{A}}$ est inversible, donc son stabilisateur est égal à $\mathbf{A}$ donc $\mathbf{A}^{[p]} = \mathbf{A}$ d'après la section 3.2. Une approche relativement différente consiste à considérer le groupe abélien $\mathbf{A}^{[p]}/\mathbf{A}$. C'est un $p$-groupe de sorte que $[\mathbf{A}^{[p]} : \mathbf{A}]$ est une puissance de $p$. L'égalité $\mathrm{disc}(\mathbf{A}) = \mathrm{disc}(\mathbf{A}^{[p]})[\mathbf{A}^{[p]} : \mathbf{A}]^2$ permet alors de conclure).

Le paragraphe précédent se résume en $\sum_{p\in\mathcal{P}} \mathbf{A}^{[p]} = \sum_{p|\Delta} \mathbf{A}^{[p]} = \mathbf{A}^{[\Delta]}$. Pour conclure définitivement, il suffit de remarquer que $\mathbf{A}^{[\Delta]} = \mathcal{O}_\mathbf{K}$ car $\Delta.\mathcal{O}_\mathbf{K} \subset \mathbf{A}$.

```
OrderMaximal := function(K)
  eA := Basis(K) ;
  A := Order(eA : Verify := false, Order := true) ;
  A`Kbasis := eA ;
  X0 := ChangeUniverse(Generators(K), A) ;
  DiscA := Discriminant(A) ;
  P := [p : p in PrimeDivisors(DiscA) | Valuation(DiscA,p) ge 2] ;
  e0 := eA ;
  for p in P do
    Ap := pSubMaximalOrder(X0,p) ;
    for e in Ap`Kbasis do
      AddVectorToLattice(e, ~e0) ;
    end for ;
  end for ;
  O := Order(e0 : Verify := false, Order := true) ;
  return O ;
end function ;
```

**Seconde stratégie : $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \mathbf{A}[X^{(p)} \mid p \in \mathcal{P}]$**

Ici, on considère $\mathbf{A}^{(p)}$ en tant que $\mathbf{A}$-algèbre de type fini $\mathbf{A}^{(p)} = \mathbf{A}[X^{(p)}]$ où $X^{(p)}$ est une famille d'entiers algébriques. Cette famille $X^{(p)}$ n'est pas récupérée par la fonction `pSubMaximalOrder`, contrairement à la fonction suivante `pSubMaximalOrder_AlgebraicMethod` qui elle, retourne une telle famille. Il s'agit ensuite de collecter toutes ces familles pour obtenir $\mathcal{O}_{\mathbf{K}} = \mathbf{A}[X^{(p)} \mid p \in \mathcal{P}]$, ce qui est réalisé dans la fonction `OrderMaximal_AlgebraicMethod`.

```
pSubMaximalOrder_AlgebraicMethod := function(X0, p)
  K := NumberField(Universe(X0)) ;
  X := X0 ;  z := K!0 ;
  Xp := {K| } ;
  repeat
     X, z := pEnlargedOrder(X,z,p) ;
     Xp := Xp join ChangeUniverse(X,K) ;
  until IsEmpty(X) ;
  return ChangeUniverse(Xp, UniverseOrder(X)) ;
end function ;

OrderMaximal_AlgebraicMethod := function(K)
  eA := Basis(K) ;
  A := Order(eA : Verify := false, Order := true) ;
  A`Kbasis := eA ;
  X0 := ChangeUniverse(Generators(K), A) ;
  DiscA := Discriminant(A) ;
  P := [p : p in PrimeDivisors(DiscA) | Valuation(DiscA,p) ge 2] ;
  O := A ;
  for p in P do
    Xp := pSubMaximalOrder_AlgebraicMethod(X0,p) ;
    O := UniverseOrder(EnlargingIntegers(O, Xp)) ;
  end for ;
  return O ;
end function ;
```

## 9.2 Les fonctions primitives sur les modules et les ordres

Afin de gérer nous-mêmes les $\mathbb{Z}$-bases d'un ordre (confer le paragraphe suivant), nous avons ajouté un attribut `Kbasis` à la catégorie `RngOrd`. Une fois une $\mathbb{Z}$-base `eA` d'un ordre `A` déterminée par nos soins, on peut se permettre de la stocker dans `A` via `A`Kbasis := eA`. La fonction de même nom `Kbasis(A)` permet l'accès à une telle $\mathbb{Z}$-base de l'ordre `A` ; au cas où le champ `` `Kbasis `` ne serait pas affecté, la fonction `Kbasis` se charge de son affectation en prenant par défaut `Basis(A, K)` avec `K = NumberField(A)`.

```
AddAttribute(RngOrd, "Kbasis") ;

Kbasis := function(A)
  assert Type(A) eq RngOrd ;
  if not assigned A`Kbasis then A`Kbasis := Basis(A, NumberField(A)) ; end if ;
  return A`Kbasis ;
end function ;
```

Une autre fonction bien utile dans l'allégement du code : `UniverseOrder`. Elle permet de retourner l'ordre retenu par Magma dans lequel vit une famille d'éléments entiers et au passage de contrôler le type d'une telle séquence.

```
UniverseOrder := function(X)
  A := Universe(X) ;
  assert Type(A) eq RngOrd ;
  return A ;
end function ;
```

**Réduction et opérations dans les modules et les ordres**

Initialement, nous avions opté pour l'utilisation des intrinsics de base proposées par MAGMA dans le chapitre ORDERS AND ALGEBRAIC FIELDS. Grâce à l'utilisation du Profiler, qui fournit notamment le nombre d'appels et le côut de chaque fonction, nous avons pu constater qu'une grande partie du temps était occupée par la saturation multiplicative. C'est la raison pour laquelle nous reprenons en charge le calcul d'une $\mathbb{Z}$-base d'un ordre de la forme $\mathbf{A}[h]$ (où $\mathbf{A}$ est un ordre donné par une $\mathbb{Z}$-base et $h$ un élément entier) et nous utilisons l'attribut `Kbasis`.

```
RationalQuot := function(a, b)
  // a, b are rationals with b neq 0
  // Returns q in Z such that r = a - q*b with |r| < |b| and sgn(r) = sgn(b)
  // We have a = q*b iff a in Z.b

LatticeReduction := function(y, L, m)
  // y in K, L is a K-lattice, m in Z > 0
  // Returns (yred, q) with yred in K, q in Z^n  such y-yred = m * sum of q[i]*L[i]
  // And the FUNDAMENTAL property :  yred = 0 iff y in Z.m*L

OrderReduction := function(y, A, m)
  // y in K, A an order of K, m in Z > 0
  // Returns yred and q such that y-yred = m * sum of q[i]*eA[i]

AddVectorToLattice := procedure(y, ~L)
  // L is a K-triangular Z-basis of a K-lattice (K = number field),  y in K
  // Let L' a K-triangular Z-basis of Z.L + Z*y
  // This procedure replaces L by L' (so L is destroyed)

MultiplyAndAdd := procedure(y, ~L)
  // L is modified : at the end, it contains a Z-basis of Z.L_initial + y*Z.L_initial

MonogenicSuborderBasis := function(eA, h)
  // eA is a Z-basis of an order A of degree n
  // h in Frac(A) is integral over Z so h^n in Z + Z.h + ... + Z.h^{n-1}
  // Returns a Z-basis of B = A[h] = A.1 + ... + A.h^{n-1}

EnlargingIntegers := function(A, Y)
  // A is an order and Y subset Frac(A) a set of integral elements
  // Returns an RngOrd-set Y' with A[Y] = A[Y'] and the property
  //  A[Y] = A iff Y' is empty
```

## 9.3 Système générateur de $\sqrt{p\mathbf{A}}$

```
SquareFreeModOfMinPol := function(x, p)
  // Used in pRadicalGenerators (x is of type RngOrdElt)
  // Returns a square free polynomial G such that G(x) = 0 mod p Z[x]

pRadicalGenerators := function(X, z, p)
  // Used in pEnlargedOrder
  // We have z in B = UniverseOrder(X)
  // For some A, we have B = A[X] and <p,z>_A = Sqrt(pA)
  // Returns R such that <p, R>_B = Sqrt(pB)
```

## 9.4 Entiers d'Emmanuel et matrice de localisation principale pour $(1, y)$

```
ManuIntegersByLeverrier := function(y)
  // Used in LocalisationMatrix
```

```
  // y is an element of a number field K of degree n
  // Returns H = [h_0, h_1, h_2, ..., h_{n-1}] (Manu integers of y)
  // and the sequence C of coeffs of the characteristic polynomial of y
  // in the order C = [constant coeff., ..., leading coeff.]
  // Rem : h0 = H[1] is equal to Lcm(denominators of C)

LocalisationMatrix := function(y)
  // Returns a localisation matrix for (1, y)
```

## 9.5 Pour 2-engendrer un idéal...

Nous voulons 2-engendrer un idéal du type $\langle p, \mathcal{R}\rangle$ où $p$ un premier de $\mathbb{Z}$. Il faut (et il suffit de) commencer par 2-engendrer les idéaux du type $\langle p, a_0, a_1\rangle$ où $a_0$ et $a_1$ sont deux éléments d'un ordre $\mathbf{A}_{01}$, c'est-à-dire obtenir un ordre $\mathbf{B}$ contenant $\mathbf{A}_{01}$ et un élément $z$ tel que $\langle p, a_0, a_1\rangle_{\mathbf{B}} = \langle p, z\rangle_{\mathbf{B}}$.

On sait que l'idéal $\langle a_0, a_1\rangle$ est inversible dans $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{01}[u, v, uy]$ avec les notations de la remarque 4.12 où $y = a_1/a_0$ ($a_0$ non nul). Précisément, on a $1 = u + vy$, $a_0 v = a_1 u$ et $a_0 vy = a_1 uy$. Ces égalités passent modulo $p$ de sorte que l'idéal $\langle a_0, a_1\rangle$ reste localement principal dans $\mathbf{B}/p\mathbf{B}$. Au passage, on peut se permettre de réduire modulo $p\mathbf{B}$ les coefficients $u, v, uy$. Or l'anneau $\mathbf{B}/p\mathbf{B}$ est zéro-dimensionnel donc $\langle a_0, a_1\rangle$ est principal dans ce quotient, disons engendré par $z$. Pour trouver un tel $z$, il suffit de suivre la démonstration de « loc. principal + Kdim 0 $\Rightarrow$ principal » donnée à la proposition 2.3. Le côté zéro-dimensionnel du quotient fournit un entier $e$ tel que $u^e = tu^{e+1} \bmod p\mathbf{B}$. Par exemple, on peut prendre pour $e$ la valuation du polynôme caractéristique de $u$, réduit modulo $p$. Dans $\mathbf{B}/p\mathbf{B}$, on a $\langle u^e\rangle = \langle s\rangle$ avec $s = (tu)^e$ idempotent. La démonstration dit que l'on peut prendre $z = sa_0 + (1-s)a_1$.

```
pPrincipalForTwoElts := function(a0, a1, p)
  A := Parent(a1) ;
  K := NumberField(A) ;
  eA := Kbasis(A) ;
  if a0 eq 0 then return K!a1, {K| } ; end if ;
  eA0 := MonogenicSuborderBasis(eA, a0) ;
  y := a1/a0 ;
  u, uy, v, vy := Explode(Eltseq(M)) where M is LocalisationMatrix(y) ;
  G := {K| u, uy, v} ;
  u := LatticeReduction(u, eA0, p) ;
  Chi := CharacteristicPolynomial(u) ;
  P := ChangeRing(ChangeRing(Chi, GF(p)), IntegerRing()) ;
  X := Parent(P).1 ;
  e := Valuation(P) ;  c := Coefficient(P, e) ;
  t := -InverseMod(c,p)*Evaluate(P div X^(e+1), u) ;
  s := LatticeReduction((t*u)^e, eA0, p) ;
  z := LatticeReduction(s*a0 + (1-s)*a1, eA0, p) ;
  return z, G ;
end function ;
```

A présent, voici une fonction permettant de 2-engendrer un idéal de la forme $\langle p, \mathcal{R}\rangle$. Cette fonction retourne $H$ et $z$ tels que $\langle p, \mathcal{R}\rangle = \langle p, z\rangle$ dans $\mathbf{A}[H]$.

```
pPrincipal := function(R, p)
  A := UniverseOrder(R) ;
  K := NumberField(A) ;
  z := K!0 ;
  H := {K| } ;
  for r in R do
     z, G := pPrincipalForTwoElts(z, r, p) ;
     H := H join G ;
  end for ;
  return z, H ;
end function ;
```

## 9.6 Quelques exemples

Voici quelques exemples traités avec la version V2.18-2 de MAGMA. Les temps d'exécution sont affichés en seconde. La terminologie LinearMethod correspond à l'utilisation de la fonction `OrderMaximal` décrite à la page 191. Le temps correspondant à AlgebraicMethod fait référence à l'utilisation des fonctions décrites à la page 192.

**Base de données `Anf` de MAGMA**

Commençons par deux batteries de tests. Ces corps de nombres sont issus de la base de données `Anf` de MAGMA.

• En degré 6, la base de données contient 65813 corps de nombres
LinearMethod : 550.240 AlgebraicMethod : 667.520 MAGMA : 165.120

• En degré 8, la base de données contient 9697 corps de nombres
LinearMethod : 77.780 AlgebraicMethod : 87.640 MAGMA : 31.860

**Un exemple de Guàrdia, Montes, Nart, cf. [GMN]**

• Soit $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(x)$ de degré 20 défini par $f = \phi_3\phi_{21} + 2^{30}$ avec $\phi_0 = x+1, \quad \phi_1 = \phi_0^2+2, \quad \phi_{21} = \phi_1^2+8, \quad \phi_{22} = \phi_1^4 + 4\phi_0\phi_1^2 + 32, \quad \phi_3 = \phi_{22}^2 + 256\phi_1^2$.

$$\begin{aligned}\operatorname{disc}(f) \;=\; & 2^{268}\cdot 3^2\cdot 19927\cdot 43691^2\cdot 211039\cdot 6059454913\cdot \\ & 512920919154157817\cdot 25506978885046388417449\cdot \\ & 14916979554304228238754231794823296867892557173 9.\end{aligned}$$

Une fois le discriminant factorisé, les temps d'exécutions sont les suivants :

LinearMethod : 0.300 AlgebraicMethod : 0.300 MAGMA : 1.160

**From « THE MONTES PACKAGE WEB PAGE, Fast computation of integral basis of number fields » `http://www-ma4.upc.edu/~guardia/MontesAlgorithm.html`**

• $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(x)$ avec

$$\begin{aligned}f_{31} = X^{32} + 160X^{30} + 11216X^{28} + 455360X^{26} + 11928052X^{24} + 212540000X^{22} + 2645190320X^{20} + \\ 23223642560X^{18} + 143402547926X^{16} + 613283590880X^{14} + 1764753386480X^{12} + 3275906117440X^{10} + \\ 3788371498452X^8 + 2940754348320X^6 + 1769278869776X^4 + 73445288000X^2 + 87782430961\end{aligned}$$

Le calcul et la factorisation du discriminant sont instantanés :

$$\operatorname{disc}(f_{31}) = 2^{544}\cdot 3^{32}\cdot 5^{32}\cdot 7^{32}\cdot 11^8\cdot 13^8\cdot 19^8\cdot 29^8\cdot 89^{10}\cdot 101^8\cdot 277^4\cdot 3329^{10}\cdot 7717^4\cdot 1405249^8\cdot 3545209^4\cdot 13554721^4$$

LinearMethod : 3.180 AlgebraicMethod : 3.520 MAGMA : 252.080

• En degré 800 avec $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(x)$ où $f = X^{800} + 2^{50}X^{600} + 2^{100}X^{400} + 2^{200}$.

Une fois la factorisation du discriminant $\operatorname{disc}(f) = 2^{162200}\cdot 5^{1600}\cdot 257^{200}$ effectuée, les temps d'exécutions sont les suivants :
LinearMethod : 164 AlgebraicMethod : 179 MAGMA ne termine pas.

**Une extension « à nous »**

• En degré 50 avec $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5},\ \sqrt[25]{2})$

Une fois le discriminant factorisé, les temps d'exécutions sont les suivants :

LinearMethod : 3.380 AlgebraicMethod : 3.500 MAGMA : 41.440

**Polynôme ayant un polygone de Newton réduit à un unique segment de pente $-1$**

- $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(x)$ où $F(X) = X^n + pX^{n-1} + \cdots + p^{n-k}X^k + \cdots + p^{n-1}X - p^n$ avec $p = 1987$

Une fois le discriminant factorisé, les temps d'exécutions sont les suivants :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ▷ $n = 25$ | LinearMethod : 0.300 | AlgebraicMethod : 0.320 | Magma : 55.300 |
| ▷ $n = 26$ | LinearMethod : 0.400 | AlgebraicMethod : 0.420 | Magma : 2.560 |
| ▷ $n = 27$ | LinearMethod : 0.420 | AlgebraicMethod : 0.440 | Magma : 4.320 |
| ▷ $n = 28$ | LinearMethod : 0.500 | AlgebraicMethod : 0.520 | Magma : 135.400 |
| ▷ $n = 29$ | LinearMethod : 0.620 | AlgebraicMethod : 0.660 | Magma : 135.140 |

## 9.7 Le programme dans son intégralité

RingOfIntegersTools.magma

```
if not assigned VERIF then
  VERIF := false ;
else
  printf "=== VERIF assigned by user at %o ===\n", VERIF ;
end if ;

if not assigned OrderMaximalVersion then OrderMaximalVersion := "LinearMethod" ; end if ;
printf "=== OrderMaximalVersion assigned at %o\n", OrderMaximalVersion ;

MyXgcd := function(A)
  Z := IntegerRing() ;
  n := #A ;
  U := [Z| 0^^n] ;
  J := [i : i in [1..n] | A[i] ne 0] ;
  if IsEmpty(J) then return Z!0, U ; end if ;
  b0, j0 := Min([Abs(A[j]) : j in J]) ;
  i0 := J[j0] ;
  g := b0 ;
  for j := 1 to #J do
    if g eq 1 then break ; end if ;
    i := J[j] ;
    // g = (sum k in [1..i-1] U[k]*A[k]) modulo b0
    if VERIF then assert IsDivisibleBy(g - &+[Z| U[k]*A[k] : k in [1..i-1]], b0) ; end if ;
    g, u, v := Xgcd(g, A[i]) ;
    U[i] := v ;
    for k := 1 to i-1 do U[k] := u*U[k] ; end for ;
    // sometimes, we reduce modulo b0
    if (#J-j) mod 5 eq 0 then for k := 1 to i-1 do U[k] := U[k] mod b0 ; end for ; end if ;
  end for ;
  s := &+[Z| U[i]*A[i] : i in [1..n]] ;
  q := ExactQuotient(g-s, A[i0]) ;
  // g-s = q*A[i0] then g = s + q*A[i0] -> add q to U[i0]
  U[i0] := U[i0] + q ;
  if VERIF then
    assert g eq GCD(A) ;
    assert g eq &+[U[i]*A[i] : i in [1..n]] ;
  end if ;
  return g, U ;
end function ;

AddAttribute(RngOrd, "Kbasis") ;

Kbasis := function(A)
  assert Type(A) eq RngOrd ;
  if not assigned A`Kbasis then
    A`Kbasis := Basis(A, NumberField(A)) ;
  end if ;
  return A`Kbasis ;
end function ;

UniverseOrder := function(X)
  A := Universe(X) ;
  assert Type(A) eq RngOrd ;
  return A ;
```

```
55  end function ;
56
57  RationalQuot := function(a, b)
58    // a, b are rationals with b neq 0
59    // Returns q in Z such that r = a - q*b with |r| < |b| and sgn(r) = sgn(b)
60    // We have a = q*b iff a in Z.b
61    q, _ := Quotrem(Numerator(a)*Denominator(b), Numerator(b)*Denominator(a)) ;
62    return q ;
63  end function ;
64
65  IsTriangularSequence := function(L)
66    K := NumberField(Universe(L)) ;
67    n := Degree(K) ;
68    if #L ne n then return false ; end if ;
69    eK := Basis(K) ;
70    assert &and [z eq &+[z[j]*eK[j] : j in [1..n]] : z in L] ;
71    for i := 1 to n do
72      if L[i][i] eq 0 then return false ; end if ;
73      for j := i+1 to n do if L[i][j] ne 0 then return false ; end if ; end for ;
74    end for ;
75    return true ;
76  end function ;
77
78  Reseau := function(L)
79    // used for verification in LatticeReduction
80    K := NumberField(Universe(L)) ;
81    n := Degree(K) ;
82    E := LatticeWithBasis(Matrix(BaseField(K), n, n, [Flat(K!z) : z in L])) ;
83    return E ;
84  end function ;
85
86  LatticeReduction := function(y, L, m)
87    // Returns (yred, q) with yred in K, q in Z^n  such y-yred = m * sum of q[i]*L[i]
88    // And the fundamental property :  yred = 0 iff y in Z.m*L
89    if VERIF then assert IsTriangularSequence(L) ; end if ;
90    K := NumberField(Universe(L)) ;
91    n := Degree(K) ;
92    yred := K!y ;
93    q := [IntegerRing()| 0^^n] ;
94    for i := n to 1 by -1 do
95      // y - yred = m * (sum of q[j]*L[j] for j > i)
96      if yred[i] eq 0 then continue ; end if ;
97      Li := L[i] ;  aii := Li[i] ;
98      q[i] := RationalQuot(yred[i], m*aii) ;
99      // yred[i] = q[i]*m*aii + ri où |ri| < m*|aii|, sgn(ri) = sgn(aii)
100     yred := yred - m*q[i]*Li ;
101   end for ;
102   if VERIF then assert y-yred eq  m * &+[q[i]*L[i] : i in [1..n]] ; end if ;
103   if VERIF then
104     E := Reseau([m*z : z in L]) ;
105     v := AmbientSpace(E)!Flat(K!y) ;
106     assert (v in E) eq (yred eq 0) ;
107     if v in E then assert Coordinates(E!v) eq q ; end if ;
108   end if ;
109   return yred, q ;
110 end function ;
111
112 OrderReduction := function(y, A, m)
113   // A is an order of a number field K, y in K and m in Z > 0
114   assert Type(A) eq RngOrd ;
115   K := NumberField(A) ;
116   eA := A`Kbasis ;
117   y := K!y ;
118   yred, q := LatticeReduction(y, eA, m) ;
119   if VERIF then assert y-yred eq m * &+[q[i]*eA[i] : i in [1..#q]] ; end if ;
120   return yred, q ;
121 end function ;
122
123 AddVectorToLattice := procedure(y, ~L)
124   // L is a K-triangular Z-basis of a K-lattice (K = number field),  y in K
```

```
  // Let L' a K-triangular Z-basis of Z.L + Z*y
  // This procedure replaces L by L' (so L is destroyed)
  K := Universe(L) ; assert Type(K) eq FldNum ;
  y := K!y ;
  n := Degree(K) ;
  // When y is in Z.L, the result L' is equal to L
  for i := n to 1 by -1 do
     yi := y[i] ;
     // If yi = 0 then the 2x2 matrix [[a,b], [-v,u]] below is the identity I_2
     // So we can omit the instructions below (i.e. continue)
     if yi eq 0 then continue ; end if ;
     Li := L[i] ;  aii := Li[i] ;
     alpha := Denominator(yi)*Numerator(aii) ;
     beta := -Denominator(aii)*Numerator(yi) ;
     // alpha*yi + beta*aii = 0
     d, u, v := Xgcd(alpha, beta) ;
     a := alpha/d ;     b := beta/d ;
     /*
       |a    b| * |y | = |y'  |
       |-v   u|   |Li|   |Li' |
     We have  Z*y + Z*Li = Z*y' + Z*Li' since a*u + b*v = 1
     y'[i] = 0 since (a*y + b*Li)[i] = (alpha*yi + beta*aii)/d = 0
     */
     L[i] := -v*y + u*Li ;
     y := a*y + b*Li ;
     if VERIF then assert &and [y[j] eq 0 : j in [i..n]] ; end if ;
  end for ;
  if VERIF then assert IsTriangularSequence(L) ; end if ;
end procedure ;

MultiplyAndAdd := procedure(y, ~L)
  // L is modified : at the end, it contains a Z-basis of Z.L_initial + y*Z.L_initial
  L_initial := L ;
  for e in L_initial do
    ye := LatticeReduction(y*e, L, 1) ;
    if ye ne 0 then AddVectorToLattice(ye, ~L) ; end if ;
  end for ;
end procedure ;

/*
We will use the property (#) for i >= 1 :
(#) x in  h^i + A + ... + A.h^{i-1}  ==>  x^2 in h^{2i} + A + ... + A.h^{2i-1}
Proof : x^2 in h^{2i} + h^i*[A + ... + A.h^{i-1}] + [A + ... + A.h^{i-1}]^2
And the set after h^{2i} is a subset of A + ... + A.h^(2i-1).
*/

MonogenicSuborderBasis := function(eA, h)
  // eA is a Z-basis of an order A of degree n
  // h in Frac(A) is integral over Z so h^n in Z + Z.h + ... + Z.h^{n-1}
  // Returns a Z-basis of B = A[h] = A.1 + .. + A.h^{n-1}
  n := #eA ;
  eB := eA ;
  i := 1 ;
  hPower := h ;
  while true do
    // Z.eB = A + ... + A.h^(i-1)  and  hPower in h^i + A + ... + A.h^{i-1}
    hPower := LatticeReduction(hPower, eB, 1) ;
    if hPower eq 0 then break ; end if ;
    // Z.eB + Z.hPower.eB = Z.eB + Z.h^i.eB = A + ... + A.h^{2i-1}
    MultiplyAndAdd(hPower, ~eB) ;
    // Z.eB = A + ... + A.h^{2i-1}
    // By the property (#) hPower^2 in h^{2i} + A + ... + A.h^{2i-1}
    i := 2*i ;
    // Z.eB = A + ... + A.h^{i-1}  and  hPower^2 in h^i + A + ... + A.h^{i-1}
    if i ge n then break ; end if ;
    hPower := hPower^2 ;
    // Z.eB = A + ... + A.h^{i-1}  and  hPower in h^i + A + ... + A.h^{i-1}
  end while ;
  if VERIF then
    B := Order(eB : Verify := false, Order := true) ;
```

```
    assert B eq Order(eA cat [h] : Verify := false) ;
  end if ;
  return eB ;
end function ;

EnlargingIntegers := function(A, Y)
  // A is an order and Y subset Frac(A) a set of integral elements
  // Returns an RngOrd-set Y' with A[Y] = A[Y'] and the property
  //  A[Y] = A iff Y' is empty
  K := NumberField(A) ;
  Yprime := {K| } ;
  eB := A`Kbasis ;
  for y in Y do
    yred := LatticeReduction(y, eB, 1) ;
    if yred eq 0 then continue ; end if ;
    eB := MonogenicSuborderBasis(eB, yred) ;
    Include(~Yprime, yred) ;
  end for ;
  // Z.eB = A[Y] = A[Y'].  So if Y' is empty then A[Y] = A. Reciprocally,
  // if A[Y] = A, the reduction of Y modulo A is 0, a fortiori modulo
  // Z.eB for all eB such that A subset Z.eB so Y' is empty.
  B := Order(eB : Verify := false, Order := true) ;
  B`Kbasis := eB ;
  return ChangeUniverse(Yprime, B) ;
end function ;

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

SquareFreeModOfMinPol := function(x, p)
  // Used in pRadicalGenerators (x is of type RngOrdElt)
  // Returns a square free polynomial G such that G(x) = 0 mod p Z[x]
  M := RepresentationMatrix(x) ;
  P := MinimalPolynomial(ChangeRing(M, GF(p))) ;
  return ChangeRing(SquarefreePart(P), IntegerRing()) ;
end function ;

EvaluateModp := function(G, x, p)
  // Used in pRadicalGenerators (x is of type RngOrdElt, x in B)
  // Returns G(x) mod pB
  B := Parent(x) ;
  K := NumberField(B) ; assert Type(K) eq FldNum ;
  Gx := K!0 ;
  for g in Reverse(Coefficients(G)) do
    Gx := OrderReduction(Gx * x + g, B, p) ;
  end for ;
  if VERIF then
      assert 0 eq OrderReduction(x, B, 1) ;
      assert 0 eq OrderReduction(Gx - Evaluate(G,x), B, p) ;
  end if ;
  return Gx ;
end function ;

pRadicalGenerators := function(X, z, p)
  // Used in pEnlargedOrder
  // We have z in B = UniverseOrder(X),  but z of type FldNumElt
  // For some A, we have B = A[X] and <p,z>_A = Sqrt(pA)
  // Returns R such that <p, R>_B = Sqrt(pB)
  assert Type(z) eq FldNumElt ;
  X := SetToSequence(X) ;
  B := UniverseOrder(X) ;
  if VERIF then assert z in B ; end if ;
  // G = [G1, G2, ...], Gi squarefree part mod. p of the pol. min. of X[i]
  G := [SquareFreeModOfMinPol(x, p) : x in X] ;
  // p, z, G1(x1), G2(x2), ..  is a sys. gen. of Sqrt(pB)
  // Below, generation of big elements, so we must reduce them modulo p*B
  // R must be a sequence with z first in order to be more efficient
  R := [B| z] cat [B| EvaluateModp(G[i], X[i], p) : i in [1..#X]] ;
  if VERIF then assert ideal <B | p,R> eq pRadical(B, p) ; end if ;
  return R ;
end function ;
```

```
265
266 ////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
267
268 AddAttribute(FldNum, "TraceMatrix") ;
269
270 MyTrace := function(z)
271   K := Parent(z) ; assert Type(K) eq FldNum ;
272   if not assigned K`TraceMatrix then
273      K`TraceMatrix := [Trace(i) : i in Basis(K)] ;
274   end if ;
275   t := &+[ z[j] * Tr[j] : j in [1..Degree(K)]] where Tr is K`TraceMatrix ;
276   if VERIF then assert t eq Trace(z) ; end if ;
277   return t ;
278 end function ;
279
280 ManuIntegersByLeverrier := function(y)
281   // y is an element of a number field K of degree n
282   // Returns H = [h_0, h_1, h_2, ..., h_{n-1}] (Manu integers of y)
283   // and the sequence C of coeffs of the characteristic polynomial of y
284   // in the order C = [constant coeff., ..., leading coeff.]
285   // Rem : h0 = H[1] is equal to Lcm(denominators of C)
286   // Leverrier algorithm :
287   K := Parent(y) ;
288   n := Degree(K) ;
289   // Let c_0X^n + c_1X^(n-1) + ... + c_n the char. pol. of y with c_0 = 1
290   C := [RationalField()| 1] ;
291   // After the loop, C = [c_0, c_1, .., c_n]
292   H := [K| 1] ;
293   // After the loop H = [c_0, c_0*y + c_1, c_0*y^2 + c_1*y + c_2, ...., 0]
294   // i.e. h_0*H = [h_0, h_1, h_2, ..., h_{n-1}, h_n = 0]
295   for i := 1 to n do // calcul dans c du coefficient c_i en X^(n-i)
296     z := y*H[i] ;
297     c := -MyTrace(z)/i ;
298     Append(~C, c) ;
299     Append(~H, z+c) ;
300   end for ;
301   h0 := Lcm([Denominator(c) : c in C]) ;
302   Reverse(~C) ;
303   // Now C = [constant coeff., ..., leading coeff.]
304   H := [h0*H[i] : i in [1..n]] ;
305   // H[1] (rational) is h0 = Lcm(denominators of the char. pol. coeffs)
306   return H, C ;
307 end function ;
308
309 LocalisationMatrix := function(y)
310   // Returns a localisation matrix for (1, y)
311   // [u    v]
312   // [uy  vy]
313   // with u and v defined in section 4.2
314   H, C := ManuIntegersByLeverrier(y) ;
315   C := [IntegerRing()| h0*c : c in C] where h0 is H[1] ;
316   un, U := MyXgcd(C) ; assert un eq 1 ;
317   Reverse(~H) ;
318   // Now H = [h_{n-1}, ..., h_0] and we have h_n = 0 and h_{-1} = 0
319   // u = u_0*h_n + u_1*h_{n-1} + u_2*h_{n-2} + ... + u_n*h_0 =
320   //       0     +  U[2]*H[1]  +  U[3]*H[2] + ...  + U[n+1]*H[n]
321   // v = -(u_0*h_{n-1} + u_1*h_{n-2} + ... + u_n*h_{-1}) =
322   //     -(U[1]*H[1]  +   U[2]*H[2]  + ... + U[n]*H[n])
323   n := #H ;  // we have n >= 1, so [2..n+1] and [1..n] are not empty
324   u := &+[U[i]*H[i-1] : i in [2..n+1]] ;
325   v := -&+[U[i]*H[i] : i in [1..n]] ;
326   if VERIF then
327     assert u + v*y eq 1 ;
328     assert IsIntegral(v) ;
329     assert IsIntegral(u) ;
330     assert IsIntegral(u*y) ;
331   end if ;
332   M := Matrix(2, 2, [u, u*y, v, vy]) where vy is 1-u ;
333   return M ;
334 end function ;
```

```
335
336 ////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
337
338 pPrincipalForTwoElts := function(a0, a1, p)
339   // Find z and G such <p, a0, a1> = <p, z> in A0[G]
340   // Below, we modify a1 but we always have the equality above
341   a1_ := a1 ;
342   assert Type(a0) eq FldNumElt ;
343   assert Type(a1) eq RngOrdElt ;
344   A := Parent(a1) ;
345   K := NumberField(A) ;
346   eA := A`Kbasis ;
347   if a0 eq 0 then return K!a1, {K| } ; end if ;
348   eA0 := MonogenicSuborderBasis(eA, a0) ;
349   y := a1/a0 ;
350   // Reduction of the integer Denominator(y) with respect to the canonical basis of K
351   // Den = p^e*q where q is an integer such that gcd(p,q) = 1.
352   // We write 1 = g*p + h*q so a1  = g * p * a1  +  h * q * a1
353   // If we denote a1_new := q * a1, we have a1 in <p, a1_new>
354   // Then <p, a0, a1> is unchanged & always y = a1/a0
355   q := Den/p^e where e is Valuation(Den, p) where Den is Denominator(y) ;
356   a1 := q * K!a1 ; y := q * y ;
357   // Reduction of y
358   // yprime - y in A0, so <p, a0, a1> is unchanged & always y = a1/a0
359   yprime := LatticeReduction(y, eA0, 1) ;
360   a1 := a1 + a0*(yprime-y) ; y := yprime ;
361   if a1 eq 0 then return K!a0, {K| } ; end if ;
362   u, uy, v, vy := Explode(Eltseq(M)) where M is LocalisationMatrix(y) ;
363   // (a0,a1) is invertible in A0[H_y] = A0[u, uy, v] where A0 = A[a0]
364   G := {K| u,uy,v} ;
365   u := LatticeReduction(u, eA0, p) ;
366   if u eq 0 then return K!a1, G ; end if ;
367   if u eq 1 then return K!a0, G ; end if ;
368   Chi := CharacteristicPolynomial(u) ;
369   P := ChangeRing(ChangeRing(Chi, GF(p)), IntegerRing()) ;
370   X := Parent(P).1 ;
371   e := Valuation(P) ;  c := Coefficient(P, e) ;
372   t := -InverseMod(c,p) * Evaluate(P div X^(e+1), u) ;
373   s := LatticeReduction((t*u)^e, eA0, p) ;
374   z := LatticeReduction(s*a0 + (1-s)*a1, eA0, p) ;
375   // Remark : t in Z[u] and s - (t*u)^e in p*A0, therefore s in A0[u]
376   if VERIF then
377      assert s in Order(eA0 cat [u] : Verify := false) ;
378      B := Order(eA0 cat SetToSequence(G) : Verify := false) ;
379      assert s^2 - s in ideal <B | p> ;
380      assert ideal <B | p, a0, a1_> eq ideal <B | p,z> ;
381   end if ;
382   return z, G ;
383 end function ;
384
385 pPrincipal := function(R, p)
386   // R a sequence of elements in an order A
387   // remark : in pEnlargedOrder, R will be s.t. <p, R>_A = Sqrt(pA)
388   // Returns z, H such that, in B = A[H], we have <p,R>_B = <p,z>_B
389   A := UniverseOrder(R) ;
390   K := NumberField(A) ;
391   z := K!0 ;
392   H := {K| } ;
393   for r in R do
394      z, G := pPrincipalForTwoElts(z, r, p) ;
395      H := H join G ;
396   end for ;
397   if VERIF then
398      eA := A`Kbasis ;
399      B := Order(eA cat SetToSequence(H) : Verify := false) ;
400      assert ideal <B | p,R> eq ideal <B | p,z > ;
401   end if ;
402   return z, H ;
403 end function ;
404
```

```
405 ////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
406
407 pEnlargedOrder := function(X, z, p)
408   A := UniverseOrder(X) ;
409   // <p,z>_A is invertible
410   R := pRadicalGenerators(X, z, p) ;
411   assert UniverseOrder(R) eq A ;
412   // Sqrt(pA) = <p, R>
413   zprime, H := pPrincipal(R, p) ;
414   if VERIF then "H =", H ; end if ;
415   // Sqrt(pA).A[H] = <p, z'>
416   eA := A`Kbasis ;
417   if VERIF then
418     AH := Order(eA cat SetToSequence(H) : Verify := false) ;
419     assert ideal <AH | p,zprime> eq AH!!pRadical(A,p) ;
420   end if ;
421   if zprime eq z then My := {} ;
422     // <p, z'>_A is invertible in A, so <p, z'>_A[H] is invertible in A[H]
423   else
424     y := zprime/p ;
425     My := {M[1,1], M[1,2], M[2,1]} where M is LocalisationMatrix(y) ;
426   end if ;
427   if VERIF then "My =", My ; end if ;
428   // Sqrt(pA) = <p, z'> is invertible in A[H, My]
429   Xprime := EnlargingIntegers(A, H join My) ;
430   // A[X'] = A[H, My] with X' reduced
431   if VERIF then "X' =", ChangeUniverse(Xprime, NumberField(A)) ; end if ;
432   return Xprime, zprime ;
433 end function ;
434
435 pSubMaximalOrder_LinearMethod := function(X0, p)
436   K := NumberField(Universe(X0)) ;
437   X := X0 ;  z := K!0 ;
438   NbTours := -1 ;
439   repeat
440      // Let A = UniverseOrder(X)
441      X, z := pEnlargedOrder(X,z,p) ;
442      // Let A' = A[X'] ; then Sqrt(pA).A' = <p,z'> is invertible in A'
443      NbTours := NbTours + 1 ;
444   until IsEmpty(X) ;
445   // X is empty, so A' = A, and Sqrt(pA) is invertible in A
446   B := UniverseOrder(X) ;
447   return B, NbTours ;
448 end function ;
449
450 pSubMaximalOrder_AlgebraicMethod := function(X0, p)
451   K := NumberField(Universe(X0)) ;
452   X := X0 ;  z := K!0 ;
453   NbTours := -1 ;
454   Xp := {K| } ;
455   repeat
456      // Let A = UniverseOrder(X)
457      X, z := pEnlargedOrder(X,z,p) ;
458      Xp := Xp join ChangeUniverse(X,K) ;
459      // Let A' = A[X'] ; then Sqrt(pA).A' = <p,z'> is invertible in A'
460      NbTours := NbTours + 1 ;
461   until IsEmpty(X) ;
462   // X is empty, so A' = A, and Sqrt(pA) is invertible in A
463   return ChangeUniverse(Xp, UniverseOrder(X)), NbTours ;
464 end function ;
465
466 FactorizationToString := func <P | IsEmpty(P) select "1"
467                             else &*[Sprintf("%o^%o ", pe[1],pe[2]) : pe in P] > ;
468
469 SFactorization := func <n | FactorizationToString(Factorization(n)) > ;
470
471 OrderMaximal_LinearMethod := function(K : Verbose := false)
472   eA := Basis(K) ;
473   A := Order(eA : Verify := false, Order := true) ;
474   A`Kbasis := eA ;
```

```
475   X0 := ChangeUniverse(Generators(K), A) ;
476   DiscA := Discriminant(A) ;
477   P := [p : p in PrimeDivisors(DiscA) | Valuation(DiscA,p) ge 2] ;
478   eO := eA ;
479   for p in P do
480     Ap, NbTours := pSubMaximalOrder_LinearMethod(X0,p) ;
481     assert assigned Ap`Kbasis ;
482     if Verbose then
483       printf "\n*** p = %o  [Ap:A] = %o ***", p, SFactorization(Index(Ap,A)) ;
484       if NbTours ge 1 then
485         printf "  %o enlarging(s) ***", NbTours ;
486       end if ;
487       printf "\n" ; "-"^30 ;
488     end if ;
489     for e in Ap`Kbasis do
490       AddVectorToLattice(e, ~eO) ;
491     end for ;
492   end for ;
493   O := Order(eO : Verify := false, Order := true) ;
494   return O ;
495 end function ;
496
497 OrderMaximal_AlgebraicMethod := function(K : Verbose := false)
498   eA := Basis(K) ;
499   A := Order(eA : Verify := false, Order := true) ;
500   A`Kbasis := eA ;
501   X0 := ChangeUniverse(Generators(K), A) ;
502   DiscA := Discriminant(A) ;
503   P := [p : p in PrimeDivisors(DiscA) | Valuation(DiscA,p) ge 2] ;
504   O := A ;
505   for p in P do
506     Xp, NbTours := pSubMaximalOrder_AlgebraicMethod(X0,p) ;
507     if Verbose then
508       Ap := UniverseOrder(Xp) ;
509       printf "\n*** p = %o  [Ap:A] = %o ***", p, SFactorization(Index(Ap,A)) ;
510       if NbTours ge 1 then
511         printf "  %o enlarging(s) ***", NbTours ;
512       end if ;
513       printf "\n" ; "-"^30 ;
514     end if ;
515     O := UniverseOrder(EnlargingIntegers(O, Xp)) ;
516   end for ;
517   return O ;
518 end function ;
519
520 OrderMaximal := OrderMaximalVersion eq "AlgebraicMethod" select OrderMaximal_AlgebraicMethod
521                     else OrderMaximal_LinearMethod ;
522
523 pSubMaximalOrder := OrderMaximalVersion eq "AlgebraicMethod" select pSubMaximalOrder_AlgebraicMethod
524                     else pSubMaximalOrder_LinearMethod ;
525
526 pOrderMaximal := function(B, p)
527   assert Type(B) eq RngOrd ;
528   K := NumberField(B) ;
529   ZX0 := Order(Basis(K) : Verify := false, Order := true) ;
530   ZX0`Kbasis := Basis(K) ;
531   X0 := ChangeUniverse(Generators(K), ZX0) ;
532   return pSubMaximalOrder_LinearMethod(X0, p) ;
533 end function ;
```

# Annexe A

# Complexe cône et résolutions dans une suite exacte courte

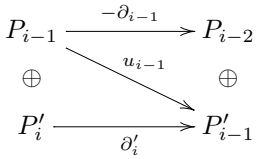
Nous avons tenu à préciser la version du complexe cône (mapping cone, en anglais) utilisée dans cette thèse. En effet, les définitions, en particulier les différentielles, diffèrent selon les auteurs (Bourbaki, Eisenbud).

## 1 Complexe cône descendant

Soit deux complexes descendants $(P, \partial)$ et $(P', \partial')$ et $u : P \to P'$ un morphisme de complexes. Le complexe cône de $u$ est un complexe construit à partir d'un morphisme $u$ entre deux complexes. On le notera $\mathcal{C}(u)$. C'est le complexe dont le module gradué est $P[-1] \oplus P'$, muni de la différentielle suivante

$$d_i : x_{i-1} \oplus x'_i \;\mapsto\; -\partial(x_{i-1}) \oplus \big(\partial'(x'_i) + u(x_{i-1})\big)$$

que l'on peut illustrer par un petit schéma et une version matricielle :




$$d_i = \begin{array}{c} \\ P_{i-2} \\ P'_{i-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_{i-1} & P'_i \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\partial_{i-1} & 0 \\ u_{i-1} & \partial'_i \end{bmatrix} \end{array}$$

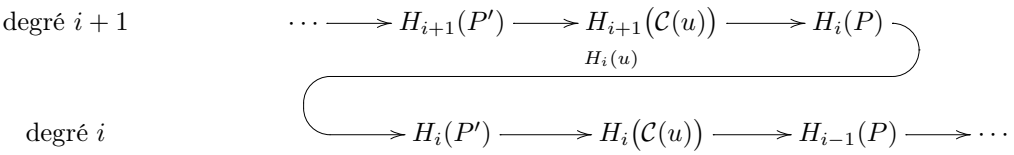
**Suite exacte courte de complexes**

$$0 \to P' \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]} \mathcal{C}(u) \xrightarrow{[\,1\ 0\,]} P[-1] \to 0$$

**Suite exacte longue en homologie**

La suite exacte courte précédente donne naissance à une longue suite exacte en homologie. Bien noter que le morphisme de connection vaut exactement (*i.e.* pas au signe près) $H(u)$ ; la vérification est immédiate, et repose sur le fait que c'est $u$ qui apparaît dans la différentielle (et pas $\pm u$).

Pour vérifier qu'il s'agit bien de $u$, on prend un cycle $z \in P_i$ (*i.e.* $\partial_i(z) = 0$) que l'on remonte (grâce à la surjection en haut à droite) dans $\mathcal{C}_{i+1}$ en $z \oplus 0$. On descend en prenant $d_i(z \oplus 0) = -\partial_i(z) \oplus u_i(z) = 0 \oplus u_i(z)$. Et ensuite, grâce à l'injection en bas à gauche, cela fournit l'élément $u_i(z)$ de $P'_i$.



### Application au complexe de Koszul descendant

Pour un élément $b$ d'un anneau $\mathbf{A}$, on note $\mathrm{K}_\bullet(b)$ son complexe de Koszul descendant à coefficients dans $\mathbf{A}$.

**Théorème 1.1.** *Soit $b \in \mathbf{A}$ et $(C, \partial)$ un complexe descendant de $\mathbf{A}$-modules. Considérons $u : C \xrightarrow{\times b} C$, morphisme de multiplication par $b$. Alors le complexe $\mathrm{K}_\bullet(b) \otimes C$ est isomorphe au complexe cône de $u$.*

***Preuve.*** Le terme de degré $i$ de $\mathrm{K}_\bullet(b)\otimes C$ est par définition $\mathrm{K}_0(b)\otimes C_i \,\oplus\, \mathrm{K}_1(b)\otimes C_{i-1} \,\simeq\, C_{i-1}\oplus C_i$. Et la différentielle est $d(1_0 \otimes x_i) = 1_0 \otimes \partial(x_i)$ et $d(1_1 \otimes x_{i-1}) = b\,1_0 \otimes x_{i-1} - 1_1 \otimes \partial(x_{i-1})$. Matriciellement, cela s'écrit

$$d_i = \begin{array}{c} \\ C_{i-2} \\ C_{i-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_{i-1} & C_i \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\partial_{i-1} & 0 \\ b & \partial_i \end{bmatrix} \end{array}$$

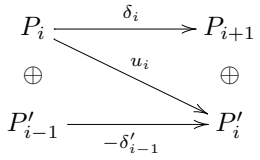
ce qui colle avec la définition du complexe cône de $u$. □

## 2 Complexe cône montant

Soit deux complexes montants $(P, \delta)$ et $(P', \delta')$ et $u : P \to P'$ un morphisme de complexes. Le complexe cône de $u$ est un complexe (montant) construit à partir d'un morphisme $u$ entre deux complexes. On le notera $\mathcal{C}(u)$. C'est le complexe dont le module gradué est $P \oplus P'[-1]$, muni de la différentielle suivante

$$d_i : x_i \oplus x'_{i-1} \;\mapsto\; \delta(x_i) \oplus \big( -\delta'(x'_{i-1}) + u(x_i)\big)$$

que l'on peut illustrer par un petit schéma et une version matricielle :




$$d_i = \begin{array}{c} \\ P_{i+1} \\ P'_i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P_i & P'_{i-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \delta_i & 0 \\ u_i & -\delta'_{i-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

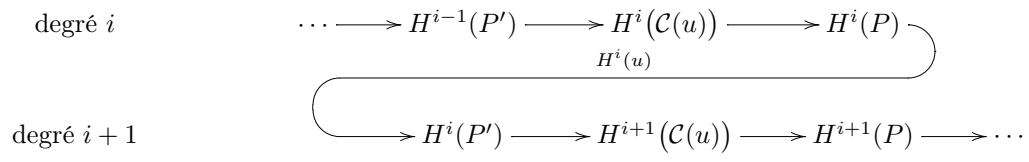
**N.B.** Bien que les complexes soient montants, on a fait figurer les indices en bas pour plus de lisibilité vis-à-vis des « primes ».

### Suite exacte courte de complexes

$$0 \to P'[-1] \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]} \mathcal{C}(u) \xrightarrow{[\,1\;0\,]} P \to 0$$

### Suite exacte longue en cohomologie

La suite exacte courte précédente donne naissance à une longue suite exacte en homologie. Bien noter que le morphisme de connection vaut exactement (*i.e.* pas au signe près) $H(u)$.



**Application au complexe de Koszul montant**

**Théorème 2.1.** *Soit $b \in \mathbf{A}$ et $(C, \delta)$ un complexe montant de $\mathbf{A}$-modules. Considérons $u : C \xrightarrow{\times b} C$, morphisme de multiplication par $b$. Alors le complexe $\mathrm{K}^\bullet(b) \otimes C$ est isomorphe au complexe cône de $u$.*

***Preuve.*** Le terme de degré $i$ de $\mathrm{K}^\bullet(b) \otimes C$ est par définition $\mathrm{K}_0(b) \otimes C^i \ \oplus \ \mathrm{K}_1(b) \otimes C^{i-1} \ \simeq \ C^i \oplus C^{i-1}$. Et la différentielle est $d(1_0 \otimes x_i) = b1_1 \otimes x_i + 1_0 \otimes \delta(x_i)$ et $d(1_1 \otimes x_{i-1}) = -1_1 \otimes \delta(x_{i-1})$. Matriciellement, cela s'écrit

$$d_i = \begin{array}{c} \\ C^{i+1} \\ C^i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} C^i & C^{i-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \delta_i & 0 \\ b & -\delta_{i-1} \end{bmatrix} \end{array}$$

ce qui colle avec la définition du cône de $u$. □

# 3 Longue suite exacte en (co)homologie Koszul

Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite d'éléments de $\mathbf{A}$. On note $\underline{a}' = (a_2, \ldots, a_n)$ la suite tronquée. On peut appliquer les résultats qui précèdent avec $C = \mathrm{K}(\underline{a}'; M)$ et $b = a_1$. Comme $\mathrm{K}(\underline{a}; M) \simeq \mathrm{K}(b; \mathbf{A}) \otimes C$, on obtient les longues suites exactes suivantes :

**En homologie**

degré $i+1$ : $\cdots \longrightarrow \mathrm{H}_{i+1}(\underline{a}'; M) \longrightarrow \mathrm{H}_{i+1}(\underline{a}; M) \longrightarrow \mathrm{H}_i(\underline{a}'; M)$

$\times a_1$

degré $i$ : $\longrightarrow \mathrm{H}_i(\underline{a}'; M) \longrightarrow \mathrm{H}_i(\underline{a}; M) \longrightarrow \mathrm{H}_{i-1}(\underline{a}'; M) \longrightarrow \cdots$

**En cohomologie**

degré $i$ : $\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{i-1}(\underline{a}'; M) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\underline{a}; M) \longrightarrow \mathrm{H}^i(\underline{a}'; M)$

$\times a_1$

degré $i+1$ : $\longrightarrow \mathrm{H}^i(\underline{a}'; M) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(\underline{a}; M) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(\underline{a}'; M) \longrightarrow \cdots$

# 4 Résolutions dans une suite exacte courte

Considérons une suite exacte courte de $\mathbf{A}$-modules

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \longrightarrow 0$$

Il est bien connu (voir par exemple le *Comparison Theorem* de Kunz, cf. [Kun85, proposition 1.8, chap. VII]) que si deux des modules sont projectivement résolubles, il en est de même du troisième ; avec un contrôle sur les longueurs des résolutions :

$$\mathrm{Pd}(E) \leqslant \max\big(\mathrm{Pd}(F)-1, \mathrm{Pd}(G)\big), \quad \mathrm{Pd}(F) \leqslant \max\big(\mathrm{Pd}(E), \mathrm{Pd}(G)\big), \quad \mathrm{Pd}(G) \leqslant \max\big(\mathrm{Pd}(E)+1, \mathrm{Pd}(F)\big)$$

Dans cette section, nous allons réaliser les inégalités de manière effective. Plus précisément, à partir de résolutions projectives de deux des modules, nous allons fournir une construction explicite (basée sur le cône d'un certain morphisme de complexes) pour une résolution projective du troisième module. Dans la mesure du possible, on essaie de prendre des notations cohérentes et uniformes.

## 4.1 Résoudre le conoyau

Soit $u : E \to F$ un morphisme. Considérons une résolution projective $(E_\bullet, e_\bullet)$ de $E$ et également une résolution projective $(F_\bullet, f_\bullet)$ de $F$. Tout d'abord, en utilisant uniquement le fait que $E_\bullet$ est un complexe de modules projectifs et l'exactitude de $F_\bullet$, on peut prolonger le morphisme $u : E \to F$ en un morphisme de complexes $u_\bullet : E_\bullet \to F_\bullet$ (en posant $E_{-1} = E$ et $F_{-1} = F$, on a donc $u_{-1} = u$).

On peut alors former le complexe cône $\mathcal{C} = E_\bullet[-1] \oplus F_\bullet$ de $u_\bullet$, qui est exact puisque $H_i(\mathcal{C})$ est entouré par $H_i(F_\bullet)$ et $H_{i-1}(E_\bullet)$ dans la longue suite exacte qui figure page 1. Voici le complexe cône en question :

$$\cdots \longrightarrow E_2 \oplus F_3 \xrightarrow[d_3]{\left[\begin{smallmatrix} -e_2 & 0 \\ u_2 & f_3 \end{smallmatrix}\right]} E_1 \oplus F_2 \xrightarrow[d_2]{\left[\begin{smallmatrix} -e_1 & 0 \\ u_1 & f_2 \end{smallmatrix}\right]} E_0 \oplus F_1 \xrightarrow[d_1]{\left[\begin{smallmatrix} -e_0 & 0 \\ u_0 & f_1 \end{smallmatrix}\right]} E \oplus F_0 \xrightarrow[d_0]{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ u & f_0 \end{smallmatrix}\right]} 0 \oplus F \longrightarrow 0$$

En supposant $u$ injectif, on peut aménager la suite exacte ci-dessus afin de construire une résolution projective de $\operatorname{Coker} u = F/u(E)$ de longueur $\leqslant \max(n_E + 1,\, n_F)$. En quotientant $E \oplus F_0 \to 0 \oplus F$ par $E \oplus 0 \to 0 \oplus u(E)$, on obtient la résolution suivante :

$$\cdots \longrightarrow E_2 \oplus F_3 \xrightarrow[g_3]{\left[\begin{smallmatrix} -e_2 & 0 \\ u_2 & f_3 \end{smallmatrix}\right]} E_1 \oplus F_2 \xrightarrow[g_2]{\left[\begin{smallmatrix} -e_1 & 0 \\ u_1 & f_2 \end{smallmatrix}\right]} E_0 \oplus F_1 \xrightarrow[g_1]{[\,u_0 \;\; f_1\,]} F_0 \xrightarrow{\overline{f}_0} \operatorname{Coker} u$$

où la flèche $F_0 \twoheadrightarrow \operatorname{Coker} u$ est obtenue en composant $F_0 \xrightarrow{f_0} F \xrightarrow{\text{can.}} F/u(E) = \operatorname{Coker} u$ .

Vérifions l'exactitude aux endroits aménagés :

▷ en $F_0$ : soit $y_0 \in F_0$ tel que $f_0(y_0) \in u(E)$, disons $u(x) + f_0(y_0) = 0$ pour un certain $x \in E$. L'élément $x \oplus y_0 \in \mathcal{C}_0 = E \oplus F_0$ est dans le noyau de $d_0$ donc est dans l'image de $d_1$ par exactitude de $(\mathcal{C}, d)$. Donc $y_0$ est dans l'image de $g_1$ car $g_1 = \pi_{F_0} \circ d_1$.

▷ en $E_0 \oplus F_1$ : soit $x_0 \oplus y_1 \in E_0 \oplus F_1$ dans le noyau de $g_1$ c'est-à-dire tel que $u_0(x_0) + f_1(y_1) = 0$. Donnons un coup de $f_0$ à cette égalité ; on obtient donc $f_0\big(u_0(x_0)\big) = 0$, c'est-à-dire $u\big(e_0(x_0)\big) = 0$. On utilise alors que $u$ est injectif pour obtenir $e_0(x_0) = 0$. Par conséquent, $x_0 \oplus y_1 \in \mathcal{C}_1$ est dans le noyau de $d_1$, donc dans l'image de $d_2 = g_2$.

**Théorème 4.1** (Résolution du conoyau)**.** *Soit $u : E \hookrightarrow F$ un morphisme injectif. À partir d'une résolution projective $(E_\bullet, e_\bullet)$ de $E$ et $(F_\bullet, f_\bullet)$ de $F$, on peut construire une résolution projective $(G_\bullet, g_\bullet)$ de* $\operatorname{Coker} u$ *de longueur $\leqslant \max(n_E + 1,\, n_F)$ via :*

$$\cdots \longrightarrow E_2 \oplus F_3 \xrightarrow[g_3]{\left[\begin{smallmatrix} -e_2 & 0 \\ u_2 & f_3 \end{smallmatrix}\right]} E_1 \oplus F_2 \xrightarrow[g_2]{\left[\begin{smallmatrix} -e_1 & 0 \\ u_1 & f_2 \end{smallmatrix}\right]} E_0 \oplus F_1 \xrightarrow[g_1]{[\,u_0 \;\; f_1\,]} F_0 \xrightarrow{\overline{f}_0} \operatorname{Coker} u$$

*où $u_\bullet : E_\bullet \to F_\bullet$ désigne un prolongement de $u : E \to F$.*

*En particulier, si* $\operatorname{Pd}(E) \leqslant n$ *et* $\operatorname{Pd}(F) \leqslant n + 1$ *alors* $\operatorname{Pd}(\operatorname{Coker} u) \leqslant n + 1$. *Même chose avec des résolutions libres.*

## 4.2 Résoudre le noyau

Soit $v : F \to G$ un morphisme. Considérons une résolution projective $(F_\bullet, f_\bullet)$ de $F$ et également une résolution projective $(G_\bullet, g_\bullet)$ de $G$. Tout d'abord en utilisant uniquement le fait que $F_\bullet$ est un complexe de modules projectifs et l'exactitude de $G_\bullet$, on peut prolonger le morphisme $v : F \to G$ en un morphisme de complexes $v_\bullet : F_\bullet \to G_\bullet$ (en posant $F_{-1} = F$ et $G_{-1} = G$, on a donc $v_{-1} = v$).

On peut alors former le complexe cône $\mathcal{C} = F_\bullet[-1] \oplus G_\bullet$ de $v_\bullet$ qui est exact puisque $H_i(\mathcal{C})$ est entouré par $H_i(G_\bullet)$ et $H_{i-1}(F_\bullet)$ dans la longue suite exacte qui figure page 1. Voici le complexe cône en question :

$$\cdots \longrightarrow F_2 \oplus G_3 \xrightarrow[d_3]{\left[\begin{smallmatrix} -f_2 & 0 \\ v_2 & g_3 \end{smallmatrix}\right]} F_1 \oplus G_2 \xrightarrow[d_2]{\left[\begin{smallmatrix} -f_1 & 0 \\ v_1 & g_2 \end{smallmatrix}\right]} F_0 \oplus G_1 \xrightarrow[d_1]{\left[\begin{smallmatrix} -f_0 & 0 \\ v_0 & g_1 \end{smallmatrix}\right]} F \oplus G_0 \xrightarrow[d_0]{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ v & g_0 \end{smallmatrix}\right]} 0 \oplus G \longrightarrow 0$$

En supposant $v$ surjectif, cette suite exacte peut être aménagée pour fournir une résolution projective de $\operatorname{Ker} v \subset F$ de longueur $\leqslant \max(n_F,\, n_G - 1)$. Le dernier terme à droite ne sera pas utile. En l'oubliant, on provoque donc un léger décalage d'indice par rapport à l'indexation du complexe cône. Mais tout ceci

est sans importance. Voici l'aménagement en question qui est bien un complexe (pour vérifier ci-dessous que $\operatorname{Im} e_1 \subset E_0$, on exprime tout en fonction du complexe cône pour lequel on a $\operatorname{Im} d_2 \subset \operatorname{Ker} d_1$. Comme $e_1 = d_2$ et $E_0 = \operatorname{Ker}(\pi_{G_0} \circ d_1)$, l'inclusion cherchée est immédiate) :

$$\cdots \longrightarrow F_2 \oplus G_3 \xrightarrow[e_2]{\left[\begin{smallmatrix} -f_2 & 0 \\ v_2 & g_3 \end{smallmatrix}\right]} F_1 \oplus G_2 \xrightarrow[e_1]{\left[\begin{smallmatrix} -f_1 & 0 \\ v_1 & g_2 \end{smallmatrix}\right]} E_0 \subset F_0 \oplus G_1 \xrightarrow[e_0]{[\,-f_0\ 0\,]} \operatorname{Ker} v$$

où $E_0 = \operatorname{Ker}\big(F_0 \oplus G_1 \xrightarrow[\pi_{G_0} \circ d_1]{[\,v_0\ g_1\,]} G_0\big)$. De plus, la suite courte

$$0 \to E_0 \to F_0 \oplus G_1 \xrightarrow{[\,v_0\ g_1\,]} G_0 \to 0$$

est exacte. En conséquence, on a $E_0 \oplus G_0 \simeq F_0 \oplus G_1$ car $G_0$ est projectif. Justifions la surjectivité : soit $z_0 \in G_0$. On veut trouver $y_0 \oplus z_1 \in F_0 \oplus G_1$ tel que $z_0 = v_0(y_0) + g_1(z_1)$. Observons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & F_0 & \xrightarrow{f_0} & F \\ & & \downarrow{\scriptstyle v_0} & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ G_1 & \xrightarrow{g_1} & G_0 & \xrightarrow{g_0} & G \end{array}$$

On part de $z_0 \in G_0$ que l'on envoie dans $G$ via $g_0(z_0)$. On relève cet élément de $G$ dans $F_0$ grâce à la surjectivité de $v$ et de $f_0$ : on obtient donc $y_0 \in F_0$ tel que $v\big(f_0(y_0)\big) = g_0(z_0)$ c'est-à-dire tel que $g_0\big(v_0(y_0)\big) = g_0(z_0)$. Ainsi $z_0 - v_0(y_0)$ est dans $\operatorname{Ker} g_0 = \operatorname{Im} g_1$, donc il existe $z_1$ tel que $z_0 - v_0(y_0) = g_1(z_1)$.

Vérifions l'exactitude aux endroits aménagés (la surjectivité de $v$ n'est pas utilisée ci-dessous) :

▷ Soit $y \in \operatorname{Ker} v$. Ainsi $y \oplus 0 \in \mathcal{C}_0 = F \oplus G_0$ est dans le noyau de $d_0$, donc par exactitude de $(\mathcal{C}, d)$, $y \oplus 0$ est dans l'image de $d_1$. Autrement dit, il existe $y_0 \oplus z_1 \in F_0 \oplus G_1$ tel que $d_1(y_0 \oplus z_1) = y \oplus 0$, c'est-à-dire tel que $-f_0(y_0) \oplus \big(v_0(y_0) + g_1(z_1)\big) = y \oplus 0$. Résumons : l'élément $y_0 \oplus z_1$ est dans $E_0$ et son image par $e_0 = [\,-f_0\ 0\,]$ est $y$.

▷ Soit $y_0 \oplus z_1 \in E_0$ dans le noyau de $e_0$, c'est-à-dire tel que $-f_0(y_0) = 0$. Ceci est équivalent à « soit $y_0 \oplus z_1 \in F_0 \oplus G_1$ tel que $v_0(y_0) + g_1(z_1) = 0$ et $-f_0(y_0) = 0$ ». Bref, l'élément $y_0 \oplus z_1 \in \mathcal{C}_1 = F_0 \oplus G_1$ est dans le noyau de $d_1$, donc dans l'image de $d_2 = \left[\begin{smallmatrix} -f_1 & 0 \\ v_1 & g_2 \end{smallmatrix}\right] = e_1$.

**Théorème 4.2** (Résolution du noyau)**.** *Soit $v : F \twoheadrightarrow G$ un morphisme surjectif. À partir d'une résolution projective $(F_\bullet, f_\bullet)$ de $F$ et $(G_\bullet, g_\bullet)$ de $G$, on peut construire une résolution projective $(E_\bullet, e_\bullet)$ de $\operatorname{Ker} v$ de longueur $\leqslant \max(n_F,\, n_G - 1)$ via :*

$$\cdots \longrightarrow F_2 \oplus G_3 \xrightarrow[e_2]{\left[\begin{smallmatrix} -f_2 & 0 \\ v_2 & g_3 \end{smallmatrix}\right]} F_1 \oplus G_2 \xrightarrow[e_1]{\left[\begin{smallmatrix} -f_1 & 0 \\ v_1 & g_2 \end{smallmatrix}\right]} E_0 \xrightarrow[e_0]{[\,-f_0\ 0\,]} \operatorname{Ker} v$$

*où $E_0 = \operatorname{Ker}\big(F_0 \oplus G_1 \xrightarrow{[\,v_0\ g_1\,]} G_0\big)$ vérifie $E_0 \oplus G_0 \simeq F_0 \oplus G_1$ et $v_\bullet : F_\bullet \to G_\bullet$ désigne un prolongement de $v : F \to G$.*

*En particulier, si $\operatorname{Pd}(F) \leqslant n$ et $\operatorname{Pd}(G) \leqslant n+1$ alors $\operatorname{Pd}(\operatorname{Ker} v) \leqslant n$. De plus, si $F$ admet une résolution libre de longueur $n$ et $G$ une résolution libre de longueur $n+1$ alors $\operatorname{Ker} v$ admet une résolution libre de longueur $\max(n, 1)$.*

***Preuve du « en particulier ».*** Pour le côté résolution libre, si $n = 0$ alors $\operatorname{Ker} v$ admet une résolution du type $0 \to E_0 \twoheadrightarrow \operatorname{Ker} v$. Comme $E_0 \oplus G_0 \simeq F_0 \oplus G_1$, le module $E_0$ est stablement libre et il suffit de lui ajouter $G_0$ pour qu'il devienne libre. On obtient ainsi une résolution libre de $\operatorname{Ker} v$ de longueur 1 via $0 \to G_0 \to E_0 \oplus G_0 \twoheadrightarrow \operatorname{Ker} v$. Lorsque $n \geqslant 1$, il suffit d'ajouter à la résolution $E_\bullet$ le morceau $0 \to \cdots \to 0 \to G_0 \xrightarrow{\mathrm{Id}_{G_0}} G_0 \to 0$. □

**Corollaire 4.3.** *Soit $M$ un module tel que $\operatorname{Pd}(M) \leqslant n$. Alors tout début de résolution projective de longueur $r < n$ de $M$ peut être prolongé en une résolution projective de longueur $n$ de $M$. Même chose en remplaçant « projective » par « libre ».*

***Preuve.*** Soit $P_r \to P_{r-1} \to \cdots \to P_0 \to M$ le début d'une résolution projective de longueur $r < n$. En utilisant le théorème précédent, on a $\mathrm{Pd}(\mathrm{Ker}\, v_0) \leqslant n-1$, puis $\mathrm{Pd}(\mathrm{Ker}\, v_1) \leqslant n-2$, etc. jusqu'à $\mathrm{Pd}(\mathrm{Ker}\, v_r) \leqslant n-r-1$. A partir d'une résolution de $\mathrm{Ker}\, v_r$ du type (attention à la numérotation non-usuelle) $0 \to Q_{n-r} \to \cdots \to Q_1 \to \mathrm{Ker}\, v_r$, on obtient la résolution suivante de $M$, de longueur $n$ : $0 \to Q_{n-r} \to \cdots \to Q_1 \to P_r \to P_{r-1} \to \cdots \to P_0 \to M$. □

## 4.3 Résoudre le milieu à partir des extrémités

Soit $0 \to E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \to 0$ une suite exacte courte. Considérons une résolution projective $(E_\bullet, e_\bullet)$ de $E$ et également une résolution projective $(G_\bullet, g_\bullet)$ de $G$.

Contrairement aux deux situations précédentes, le morphisme de complexes à considérer ici n'est pas naturel. Commençons par faire un dessin — qui ressemble à un fer à cheval (n'est-ce pas ? !) d'où le *Horseshoe lemma*, cf. par exemple [Wei94, page 37] —.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle e_2} & & \downarrow{\scriptstyle g_2} & & & & \\
 & & E_1 & & G_1 & & & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle e_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_1} & & & & \\
 & & E_0 & & G_0 & & & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle e_0} & & \downarrow{\scriptstyle g_0} & & & & \\
0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{u} & F & \xrightarrow{v} & G & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Soit $\widetilde{E}_\bullet$ le complexe exact suivant (pour l'exactitude, on utilise l'injectivité de $u$, la surjectivité de $e_0$ et la surjectivité de $v$) :

$$\cdots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{e_1} E_0 \xrightarrow{u\circ e_0} F \xrightarrow{v} G$$

On peut relever $\mathrm{Id}_G$ en un morphisme du complexe $G_\bullet$ vers le complexe $\widetilde{E}_\bullet$ que l'on note $w_\bullet : G_\bullet \to \widetilde{E}_\bullet$. Ceci est possible car $G_\bullet$ est un complexe de modules projectifs et $\widetilde{E}_\bullet$ est un complexe exact (d'ailleurs, $\widetilde{E}_\bullet$ n'est pas un complexe de modules projectifs à cause de la présence de $F$). Petit dessin :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & G_2 & \xrightarrow{g_2} & G_1 & \xrightarrow{g_1} & G_0 & \xrightarrow{g_0} & G & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle w_2} & & \downarrow{\scriptstyle w_1} & & \downarrow{\scriptstyle w_0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_G} & & \\
\cdots & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{e_1} & E_0 & \xrightarrow{u\circ e_0} & F & \xrightarrow{v} & G & &
\end{array}$$

Maintenant, on considère le complexe cône $\mathcal{C} = G[-1] \oplus \widetilde{E}_\bullet$ de $w_\bullet$ qui est exact :

$$\cdots \longrightarrow G_2 \oplus E_2 \xrightarrow[d_3]{\left[\begin{smallmatrix} -g_2 & 0 \\ w_2 & e_2 \end{smallmatrix}\right]} G_1 \oplus E_1 \xrightarrow[d_2]{\left[\begin{smallmatrix} -g_1 & 0 \\ w_1 & e_1 \end{smallmatrix}\right]} G_0 \oplus E_0 \xrightarrow[d_1]{\left[\begin{smallmatrix} -g_0 & 0 \\ w_0 & u\circ e_0 \end{smallmatrix}\right]} G \oplus F \xrightarrow[d_0]{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{Id}_G & v \end{smallmatrix}\right]} 0 \oplus G \longrightarrow 0$$

On procède à un petit aménagement pour obtenir une résolution projective de $F$ de longueur $\leqslant \max(n_E,\, n_G)$ :

$$\cdots \longrightarrow G_2 \oplus E_2 \xrightarrow[f_2]{\left[\begin{smallmatrix} -g_2 & 0 \\ w_2 & e_2 \end{smallmatrix}\right]} G_1 \oplus E_1 \xrightarrow[f_1]{\left[\begin{smallmatrix} -g_1 & 0 \\ w_1 & e_1 \end{smallmatrix}\right]} G_0 \oplus E_0 \xrightarrow[f_0]{\left[\begin{smallmatrix} w_0 & u\circ e_0 \end{smallmatrix}\right]} F$$

Vérifions l'exactitude aux endroits aménagés :

▷ Soit $y \in F$. L'élément $-v(y) \oplus y \in G \oplus F = \mathcal{C}_0$ est dans le noyau de $d_0$ donc est dans l'image de $d_1$. Donc $y$ est dans l'image de $f_0$ car $f_0 = \pi_F \circ d_1$.

▷ Soit $z_0 \oplus x_0 \in G_0 \oplus E_0$ dans le noyau de $f_0$ c'est-à-dire tel que $w_0(z_0) + u \circ e_0(x_0) = 0$. Donnons un coup de $v$ à cette égalité ; on obtient donc $v\big(w_0(z_0)\big) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{Id}_G\big(g_0(z_0)\big) = 0$, *i.e.* $g_0(z_0) = 0$. Ainsi $z_0 \oplus x_0$ est dans le noyau de $d_1$ donc dans l'image de $d_2 = f_1$.

**Théorème 4.4** (Résolution du milieu). *Soit* $0 \to E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G \to 0$ *une suite exacte courte. À partir d'une résolution projective* $(E_\bullet, e_\bullet)$ *de* $E$ *et* $(G_\bullet, g_\bullet)$ *de* $G$*, on peut construire une résolution projective* $(F_\bullet, f_\bullet)$ *de* $F$ *de longueur* $\leqslant \max(n_E, n_G)$ *via :*

$$\cdots \longrightarrow G_2 \oplus E_2 \xrightarrow[f_2]{\left[\begin{smallmatrix} -g_2 & 0 \\ w_2 & e_2 \end{smallmatrix}\right]} G_1 \oplus E_1 \xrightarrow[f_1]{\left[\begin{smallmatrix} -g_1 & 0 \\ w_1 & e_1 \end{smallmatrix}\right]} G_0 \oplus E_0 \xrightarrow[f_0]{[\,w_0 \quad u \circ e_0\,]} F$$

*où* $w_\bullet : \widetilde{E}_\bullet \to G_\bullet$ *est un prolongement de* $\mathrm{Id}_G$ *et où* $\widetilde{E}_\bullet$ *désigne le complexe exact*

$$\cdots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{e_1} E_0 \xrightarrow{u \circ e_0} F \xrightarrow{v} G$$

*En particulier, si* $\mathrm{Pd}(E) \leqslant n$ *et* $\mathrm{Pd}(G) \leqslant n$ *alors* $\mathrm{Pd}(F) \leqslant n$*. Même chose avec des résolutions libres.*

# Annexe B

# Régularité et Singularité : *memento*

Petit résumé des diverses notions. Pour simplifier, on les présente avec $M = \mathbf{A}$. Pour des contre-exemples aux implications, on pourra consulter l'article [Kab71].

## 1 Du côté de la Régularité

La suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ est...

...régulière $\Leftrightarrow$ $a_{i+1}$ est régulier modulo $\langle a_1, \ldots, a_i\rangle$ pour tout $i < n$

...complètement sécante $\Leftrightarrow$ $\mathrm{H}^i(\underline{a}) = 0$ pour tout $i < n$

...1-sécante $\Leftrightarrow$ $\mathrm{H}_1(\underline{a}) = 0$

...quasi-régulière $\Leftrightarrow \forall\, d \in \mathbb{N},\ \forall\, F \in \mathbf{A}[\underline{X}]_d,\ F(\underline{a}) = 0 \ \Rightarrow\ F \in \mathfrak{a}\mathbf{A}[\underline{X}]$

...Lech-indépendante $\Leftrightarrow \forall\, x_i \in \mathbf{A},\ \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i \in \langle \underline{a}\rangle$

On a les implications suivantes

$$\text{régulière} \overset{\text{V}-5.2}{\Longrightarrow} \text{comp. sécante} \implies \text{1-sécante} \overset{\text{V}-9.10}{\Longrightarrow} \text{quasi-régulière} \implies \text{Lech-indépendante}$$

À l'extrême gauche, on peut ajouter la notion de suite commutativement régulière (cf. section V-7), notion qui peut se mesurer via les sous-suites 1-sécantes (cf. proposition V-7.2).

Pour aller de « droite à gauche » : si $\underline{a}$ est Lech-indépendante et si l'idéal $\langle \underline{a}\rangle$ admet une résolution projective alors $\underline{a}$ est complétement sécante : c'est une formulation de théorème de Jouanolou, cf. le corollaire VII-1.2. Peut-on démontrer à la main les énoncés suivants ?

*Si $\underline{a}$ est Lech-indépendante et si $\langle \underline{a}\rangle$ est projectivement résoluble alors $\underline{a}$ est quasi-régulière.*

*Si $\underline{a}$ est 1-sécante et si $\langle \underline{a}\rangle$ est projectivement résoluble alors $\underline{a}$ est complètement sécante.*

## 2 Du côté de la Singularité

• L'idéal $\mathcal{C}(\underline{a})$ est défini comme étant l'idéal des $\mathcal{C}$oefficients des polynômes $F \in \mathbf{A}[\underline{X}]_d$ tels que $F(\underline{a}) \in \langle \underline{a}\rangle^{d+1}$ (cf. définition VI-5.1). On note $a^\alpha$ le monôme $a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}$.

$$1 \in \mathcal{C}(\underline{a}) \iff \exists\, \alpha \in \mathbb{N}^n,\quad \exists\, u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{A},\quad \big(1 + \textstyle\sum u_i a_i\big)\, a^\alpha \ \in \sum_{\substack{|\beta|=|\alpha| \\ \beta \neq \alpha}} \mathbf{A} a^\beta$$

$$\iff \exists\, e \in \mathbb{N},\quad \exists\, u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{A},\quad \big(1 + \textstyle\sum u_i a_i\big)\, (a_1 \cdots a_n)^e \ \in\ \langle \underline{a}\rangle^{ne-e-1}\, \langle a_1^{e+1}, \ldots, a_n^{e+1}\rangle$$

• L'idéal bord $\mathcal{S}(\underline{a})$ est présent dans la définition de la dimension de Krull (cf. VI-1 page 93)

$$0 \in \mathcal{S}(\underline{a}) \qquad \iff \qquad \exists\, e \in \mathbb{N},\quad (a_1 \cdots a_n)^e \ \in\ \langle\, (a_1 \cdots a_{n-1})^e a_n^{e+1},\ \ldots,\ a_1^e a_2^{e+1},\ a_1^{e+1}\,\rangle$$

• L'idéal de quasi-singularité $\mathrm{QS}(\underline{a})$ est défini à la page 87, définition V-9.4.

$$1 \in \mathrm{QS}(\underline{a}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, e \in \mathbb{N}, \quad (a_1 \cdots a_n)^e \ \in\ \langle\, a_1^{e+1}, \ldots,\ a_n^{e+1} \,\rangle$$

La suite $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ est...

...monomialement dépendante $\Leftrightarrow 1 \in \mathcal{C}(\underline{a})$ (notion diamétralement opposée à la quasi-régularité)

...singulière $\Leftrightarrow 0 \in \mathcal{S}(\underline{a})$

...quasi-singulière $\Leftrightarrow 1 \in \mathrm{QS}(\underline{a})$

Avec les définitions ci-dessus, les implications suivantes sont immédiates :

monomialement dépendante $\Longrightarrow$ quasi-singulière et singulière $\Longrightarrow$ quasi-singulière

Lorsque l'anneau est noethérien, toute suite de longueur $d+1$ est singulière si et seulement si toute suite de longueur $d+1$ est monomialement dépendante (penser à $\mathrm{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant d$). Confer le théorème VI-5.12 à la page 122.

Ajoutons également que l'on a l'implication $0 \in \mathcal{S}(\underline{a}) \ \Rightarrow\ \check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0$ où l'on rappelle que

$$\check{\mathrm{H}}^n_{\underline{a}}(\mathbf{A}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, h \in \mathbb{N}, \quad (a_1 \cdots a_n)^h \ \in\ \langle a_1^{h+k}, \ldots, a_n^{h+k} \rangle$$

Autrement dit, une suite singulière est mieux que quasi-singulière, elle est « Čech-singulière » (terminologie non définie dans la thèse).

## 3 Les deux en même temps

Une définition équivalente de la quasi-régularité est $\mathcal{C}(\underline{a}) = \langle \underline{a} \rangle$ (cf. la remarque V-5.6).

De plus, $\underline{a}$ quasi-régulière $\overset{\text{V}-9.11}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{QS}(\underline{a}) = \langle \underline{a} \rangle$. En particulier, si $\underline{a}$ est quasi-régulière et quasi-singulière, alors $\underline{a}$ est unimodulaire. Encore plus faible : si $\underline{a}$ est 1-sécante et singulière alors $\underline{a}$ est unimodulaire. On a une preuve directe de cela (cf. la section V-10).

# Bibliographie


[AG02] L.L. Avramov and D.R. Grayson. Resolutions and cohomology over complete intersections. *Computations in algebraic geometry with Macaulay 2, Algorithms and Computations in Mathematics 8*, pages 131–178, 2002.

[ASV81] J.F. Andrade, A. Simis, and W. Vasconcelos. On the grade of some ideals. *Manuscripta mathematica*, 34(2-3) :241–254, 1981.

[Bar76] J. Barshay. Generalized analytic independence. *Proc. Am. Math. Soc.*, 58 :32–36, 1976.

[BE74] D.A. Buchsbaum and D. Eisenbud. Some structure theorems for finite free resolutions. *Adv. in Math.*, 12 :84–139, 1974.

[Bel] K. Belabas. Quelques aspects algorithmiques de la théorie algébrique des nombres. Non publié.

[BH98] W. Bruns and H.J. Herzog. *Cohen-Macaulay Rings*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1998.

[Bou07] N. Bourbaki. *Algèbre commutative : Chapitre 10*. Springer, 2007.

[Bru80] W. Bruns. On the number of elements independent with respect to an ideal. *J. London Math. Soc. (2)*, 22(1) :57–62, 1980.

[BS07] M.P. Brodmann and R.Y. Sharp. *Local Cohomology : An Algebraic Introduction with Geometric Applications*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2007.

[BV88] W. Bruns and U. Vetter. *Determinantal Rings*. Number vol. 1327 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1988.

[CJR13] M. Chardin, J.-P. Jouanolou, and A. Rahimi. The eventual stability of depth, associated primes and cohomology of a graded module. *Journal of Commutative Algebra*, 5(1) :63–92, 03 2013.

[Coh93] H. Cohen. *A Course in Computational Algebraic Number Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1993.

[CQ12] T. Coquand and C. Quitté. Constructive finite free resolutions. *Manuscripta Mathematica*, 137(3-4) :331–345, 2012.

[CR06] L.M Sega C. Rotthaus. On a class of coherent regular rings. *Proceedings of the American Mathematical society*, 135(6) :1631–1640, 2006.

[Dav67] E.D. Davis. Ideals of the principal class, $r$-sequences and a certain monoidal transformation. *Pacific Journal of Mathematics*, 20(2) :197–205, 1967.

[Die66] J. Dieudonné. On regular sequences. *Nagoya Mathematical Journal*, 27(1) :355–356, 1966.

[DQ06] L. Ducos and C. Quitté. Dimension de Krull : extensions entières, anneaux noethériens. 2006.

[EGS] D. Eisenbud, D.R. Grayson, and M.E. Stillman. Using Macaulay 2. Non publié.

[Eis95] D. Eisenbud. *Commutative Algebra : with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1995.

[Eis05] D. Eisenbud. *The Geometry of Syzygies : A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2005.

[GMN] J. Guàrdia, J. Montes, and E. Nart. A new computational approach to ideal theory in number fields. *Foundations of Computational Mathematics*, 13(5) :729–762.

[GR11] H. Grauert and R. Remmert. *Coherent Analytic Sheaves*. Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften. Springer London, Limited, 2011.

[GRR71] H. Grauert, R. Remmert, and O. Riemenschneider. *Analytische Stellenalgebren*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1971.

[Hal97] E. Hallouin. Parcours initiatique à travers la théorie des valuations. Rapport technique, Université de Poitiers, 1997.

[Hal98] E. Hallouin. Fermeture intégrale en dimension 1 et factorisation. 1998. Thèse doctorale, Université de Poitiers.

[Har67] R. Hartshorne. *Local Cohomology. A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall 1961, Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin New-York, 1967.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer, 1977.

[HH10] J. Herzog and T. Hibi. *Monomial Ideals*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2010.

[HKM09] C. Huneke, D. Katz, and T. Marley. On the support of local cohomology. *Journal of Algebra*, 322(9) :3194 – 3211, 2009. Special Issue in Honor of Paul Roberts.

[HM07] T. D. Hamilton and T. Marley. Non-noetherian Cohen-Macaulay rings. *Journal of Algebra*, 307(1) :343 – 360, 2007.

[ILL+07] S. Iyengar, G.J. Leuschke, A. Leykin, C. Miller, E. Miller, A.K. Singh, and U. Walther. *Twenty-Four Hours of Local Cohomology*. Graduate Studies in Mathematics 87, American Mathematical Society, 2007.

[Jon98] T. De Jong. An algorithm for computing the integral closure. *J. Symb. Comput.*, 26(3) :273–277, 1998.

[Jou] J.-P. Jouanolou. Sur les idéaux ayant une résolution projective finie. Non publié, 2012.

[Jou97] J.-P. Jouanolou. Formes d'inertie et résultant : un formulaire. *Advances in Mathematics*, 126(2) :119 – 250, 1997.

[Kab71] T.G. Kabele. Regularity conditions in nonnoetherian rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 155(2) :363–374, 1971.

[KT14] G. Kemper and N.V. Trung. Krull dimension and monomial orders. *Journal of Algebra*, 399 :782 – 800, 2014.

[Kun85] E. Kunz. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Birkhäuser Boston, 1985.

[Lec85] C. Lech. A property of independent elements. *J. Pure Appl. Algebra*, 38 :285–286, 1985.

[LM02] J.P. Lafon and J. Marot. *Algèbre locale*. Collection Enseignement des sciences. Hermann, 2002.

[LQ11] H. Lombardi and C. Quitté. *Algèbre commutative, Méthodes constructives*. Calvage & Mounet, 2011.

[Mat89] H. Matsumura. *Commutative Ring Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.

[McC01] J. McCleary. *A User's Guide to Spectral Sequences*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2001.

[MP99] E. Miller and D. Perkinson. Eight lectures on monomial ideals. 1999.

[MS05] E. Miller and B. Sturmfels. *Combinatorial Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2005.

[Mus00] M. Mustata. Local cohomology at monomial ideals. *Journal of Symbolic Computation*, 29 :709–720, 2000.

[Nor53] D.G. Northcott. *Ideal Theory*. Cambridge University Press, 1953.

[Nor76] D.G. Northcott. *Finite free resolutions*. Cambridge University Press, 1976.

[Rob92] P. Roberts. The homological conjectures. *Free Resolutions in Commutative Algebra and Algebraic Geometry (Sundance 90)*, pages 121–132, 1992.

[Rot08] J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Universitext. Springer, 2008.

[Sam67] P. Samuel. *Théorie algébrique des nombres*. Hermann, collection Méthodes, 1967.

[Sch98] P. Schenzel. On the use of local cohomology in algebra and geometry, lectures at the summer school of commutativ algebra and algebraic geometry. *Birkhäuser*, pages 161–180, 1998.

[Sch03] P. Schenzel. Proregular sequences, local cohomology and completion. *Math Scand 92*, pages 161–180, 2003.

[Sch13] H. Schoutens. Dimension and singularity theory for local rings of finite embedding dimension. *Journal of Algebra*, 386(0) :1 – 60, 2013.

[Ser] J.-P. Serre. *Corps locaux*. Hermann, 2004.

[Ser56] J.-P. Serre. Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens. *Proceedings of the international symposium on algebraic number theory, Tokyo & Nikko*, pages 175–189, 1956.

[Sta02] R.P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*. Number vol. 1 in Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 2002.

[Sta14] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. `http://stacks.math.columbia.edu`, 2014.

[Str90] J.R. Strooker. *Homological Questions in Local Algebra*. Lecture note series : London Mathematical Society. Cambridge University Press, 1990.

[Swa] R.G. Swan. On a theorem of Mohar Kumar and Nori. pdf disponible sur la page web de Swan.

[Tat57] J. Tate. Homology of noetherian rings and local rings. *Illinois Journal of Mathematics*, 1(1) :14–27, 1957.

[Têt14] C. Tête. La suite exacte de Mayer-Vietoris en cohomologie de Čech. *Journal of Algebra*, 406(0) :290 – 307, 2014.

[Val70] G. Valla. Elementi indipendenti rispetto ad un ideale. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 44 :339–354, 1970.

[Vas67] W. Vasconcelos. Ideals generated by $R$-sequences. *J. Algebra*, pages 309 – 316, 1967.

[VE04] W. Vasconcelos and D. Eisenbud. *Computational Methods In Commutative Algebra And Algebraic Geometry*. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[Wei94] C. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 1994.

[ZSC60] O. Zariski, P. Samuel, and I.S. Cohen. *Commutative Algebra II*. Commutative Algebra. Springer, 1960.

# Résumé

Cette thèse d'algèbre commutative porte principalement sur la théorie de la profondeur. Nous nous efforçons d'en fournir une approche épurée d'hypothèse noethérienne dans l'espoir d'échapper aux idéaux premiers et ceci afin de manier des objets élémentaires et explicites. Parmi ces objets, figurent les complexes algébriques de Koszul et de Čech dont nous étudions les propriétés cohomologiques grâce à des résultats simples portant sur la cohomologie du totalisé d'un bicomplexe. Dans le cadre de la cohomologie de Čech, nous avons établi la longue suite exacte de Mayer-Vietoris avec un traitement reposant uniquement sur le maniement des éléments. Une autre notion importante est celle de dimension de Krull. Sa caractérisation en termes de monoïdes bords permet de montrer de manière expéditive le théorème d'annulation de Grothendieck en cohomologie de Čech. Nous fournissons également un algorithme permettant de compléter un polynôme homogène en un h.s.o.p.. La profondeur est intimement liée à la théorie des résolutions libres/projectives finies, en témoigne le théorème de Ferrand-Vasconcelos dont nous rapportons une généralisation due à Jouanolou. Par ailleurs, nous revenons sur des résultats faisant intervenir la profondeur des idéaux caractéristiques d'une résolution libre finie. Nous revisitons, dans un cas particulier, une construction due à Tate permettant d'expliciter une résolution projective totalement effective de l'idéal d'un point lisse d'une hypersurface. Enfin, nous abordons la théorie de la régularité en dimension 1 via l'étude des idéaux inversibles et fournissons un algorithme implémenté en Magma calculant l'anneau des entiers d'un corps de nombres.



**Mots clés :** algèbre commutative effective, (co)homologie de Koszul, cohomologie de Čech, suite exacte de Mayer-Vietoris, cohomologie du totalisé d'un bicomplexe, profondeur, suite régulière, suite complètement sécante, suite 1-sécante, suite quasi-régulière, dimension de Krull, résolution libre finie, construction de Tate, algorithme de calcul de l'anneau des entiers d'un corps de nombres.



# Abstract

This commutative algebra thesis focuses mainly on the depth theory. We try to provide an approach without noetherian hypothesis in order to escape prime ideals and to handle only basic and explicit concepts. We study the algebraic complexes of Koszul and Čech and their cohomological properties by using simple results on the cohomology of the totalization of a bicomplex. In the Čech cohomology context we established the long exact sequence of Mayer-Vietoris only with a treatment based on the elements. Another important concept is that of Krull dimension. Its characterization in terms of monoids allows us to show expeditiously the vanishing Grothendieck theorem in Čech cohomology. We also provide an algorithm to complete a homogeneous polynomial in a h.s.o.p.. The depth is closely related to the theory of finite free/projective resolutions. We report a generalization of the Ferrand-Vasconcelos theorem due to Jouanolou. In addition, we review some results involving the depth of the ideals of expected ranks in a finite free resolution. We revisit, in a particular case, a construction due to Tate. This allows us to give an effective projective resolution of the ideal of a point of a smooth hypersurface. Finally, we discuss the regularity theory in dimension 1 by studying invertible ideals and provide an algorithm implemented in Magma computing the ring of integers of a number field.



**Keywords :** effective commutative algebra, Koszul cohomology, Čech cohomology, Mayer-Vietoris exact sequence, cohomology of the totalization of a bicomplex, depth, regular sequence, 1-secant sequence, quasi-regular sequence, Krull dimension, finite free resolution, Tate construction, algorithm for computing the ring of integers of a number field.