

THESE



Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées
Pôle poitevin de recherche pour l'ingénieur en mécanique, matériaux et énergétique - PPRIMME
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : SIMMEA - Sciences et ingénierie en matériaux, mécanique,
énergétique et aéronautique
Secteur de recherche : Mécanique des fluides

Présentée par :
Frédéric Dehoux

Modélisation statistique des écoulements turbulents en convection forcée, mixte et naturelle

Directeur(s) de Thèse :
Eric Lamballais, Rémi Manceau

Soutenue le 18 octobre 2012 devant le jury

Jury :

Président	Bertrand Aupoix	ONERA, Toulouse et ISAE
Rapporteur	Bertrand Aupoix	ONERA, Toulouse et ISAE
Rapporteur	Aziz Hamdouni	Université de La Rochelle, LASIE
Membre	Eric Lamballais	Université de Poitiers, Institut Pprime
Membre	Rémi Manceau	Institut Pprime, CNRS, Poitiers
Membre	Thomas Gatski	Institut Pprime, CNRS, Poitiers
Membre	Sofiane Benhamadouche	EDF R&D, Chatou

Pour citer cette thèse :

Frédéric Dehoux. *Modélisation statistique des écoulements turbulents en convection forcée, mixte et naturelle* [En ligne]. Thèse Mécanique des fluides. Poitiers : Université de Poitiers, 2012. Disponible sur Internet <<http://theses.univ-poitiers.fr>>

THÈSE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

École Doctorale Science et Ingénierie en Matériaux,

Mécanique, Énergétique et Aéronautique

(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

Spécialité : Mécanique des fluides

Présentée par

Frédéric DEHOUX

MODÉLISATION STATISTIQUE DES ÉCOULEMENTS TURBULENTS EN CONVECTION FORCÉE, MIXTE ET NATURELLE

Directeur de Thèse : Éric Lamballais

Co-direction : Rémi Manceau et Sofiane Benhamadouche

Soutenue le 18 octobre 2012

devant le jury

Pr. Bertrand Aupoix	ONERA, Toulouse et ISAE	Président / Rapporteur
Pr. Aziz Hamdouni	Université de La Rochelle, LASIE	Rapporteur
Dr. Sofiane Benhamadouche	EDF R&D, Chatou	Examineur
Pr. Eric Lamballais	Université de Poitiers, Institut Pprime	Examineur
Dr. Thomas B. Gatski	Institut Pprime, CNRS, Poitiers	Examineur
Dr. Rémi Manceau	Institut Pprime, CNRS, Poitiers	Examineur

Institut PPRIME (UPR 3346)
CNRS, Université de Poitiers, ENSMA
SP2MI, téléport 2
11 bd Marie et Pierre Curie, BP 30179
86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex

EDF Recherche et Développement
Département Mécanique des Fluides,
Énergies et Environnement
6 quai Watier
78401 Chatou Cedex

Remerciements

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une bourse CIFRE au sein de l'entreprise EDF R&D. Tout d'abord, je tiens à remercier très sincèrement Frédéric Archambeau (chef du groupe I83) de m'avoir accueilli au sein du département MFEE. Je lui suis également reconnaissant des précieux conseils qu'il m'a fourni pour mener un bon entretien.

Je tiens à remercier tout particulièrement et très sincèrement Dr Sofiane Benhamadouche de m'avoir encadré, guidé et supporté dans mes périodes de doute. J'ai vraiment apprécié de travailler avec lui pour ses compétences techniques et sa vivacité d'esprit. Je lui serai toujours reconnaissant de la confiance qu'il m'a accordée.

Merci à Dr Rémi Manceau (Institut PPRIME, Poitiers) qui a réalisé la direction scientifique de cette thèse. Ses connaissances scientifiques et son expérience ont permis de corriger et d'enrichir mon manuscrit. Merci sincèrement d'avoir réorienté ma soutenance, ce qui a permis de la rendre plus "digeste" et appréciée du jury.

Je remercie également Pr Aupoix et Pr Hamdouni d'avoir accepté d'être mes rapporteurs. Ma reconnaissance s'adresse également au Dr Gatski et au Pr Lamballais qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon manuscrit.

J'adresse mes sincères remerciements à tous mes collègues du groupes I83 pour leur sympathie et leur accueil. Je pense plus particulièrement à Jack, Dodo, Féfé, Romain et Martin pour leur bonne humeur et pour les bons moments (extra-)professionnels.

Je souhaite également remercier les stagiaires (longs) et thésards avec qui j'ai passé d'agréables moments, en particulier Pierre qui a été mon mentor pour *Code_Saturne* sans interface graphique et Cozzio qui fut mon collègue de bureau, sa douce voix me manquerait presque.

Pour finir, je souhaite remercier ma famille, mes proches, mes amis et en particulier ma mère d'avoir toujours cru en moi et de m'avoir soutenu tout au long de ce projet. Je tiens également à remercier ma femme de son aide précieuse pour ma soutenance ainsi que pour le soutien et l'amour qu'elle m'a offerts au cours de ces trois ans.

A Céline

Table des matières

Introduction générale	1
1 Bibliographie - Modélisation RANS de la dynamique de l'écoulement	4
1.1 Équations générales	4
1.2 Modélisation quasi-homogène des équations de transport des tensions de Reynolds	6
1.2.1 Modélisation du terme de corrélation vitesse-gradient de pression	6
1.2.2 Modélisation du tenseur de dissipation turbulente	10
1.2.3 Modélisation de la diffusion turbulente	11
1.3 Modélisation en proche paroi des tensions de Reynolds à l'aide de l'« elliptic blending »	12
1.4 Récapitulatif du Modèle EB-RSM	18
2 Bibliographie - Modélisation RANS de la thermique fluide	21
2.1 Équation de transport de la température	21
2.2 Modélisation « quasi-homogène » des flux thermiques turbulents	22
2.2.1 Équations de transport des flux thermiques turbulents	22
2.2.2 Modèles algébriques des flux thermiques turbulents	26
2.2.2.1 Algebraic Flux Model (AFM)	26
2.2.2.2 Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH)	29
2.2.2.3 Simple Gradient Diffusion Hypothesis (SGDH)	30
2.2.3 Équation de transport de la variance de la température	30
2.3 Modélisation « en proche paroi » des flux thermiques turbulents	32

2.3.1	Loi logarithmique thermique	32
2.3.2	Modèle avec fonction d'amortissement	33
2.3.3	Équation de transport avec pondération elliptique (EB-DFM)	34
3	Développement de modèles pour les flux thermiques turbulents utilisant la pondération elliptique	38
3.1	Relaxation et pondération elliptique	38
3.2	Modèle de « proche paroi » pour les termes de brouillage et de dissipation .	41
3.3	Facteur de pondération thermique α_θ	44
3.3.1	Échelle de longueur	44
3.3.2	Puissance de α_θ	45
3.4	Échelle de temps thermique	48
3.5	Ratio des échelles de temps R	50
3.6	Équations de transport (modèle EB-DFM)	52
3.7	Modèles Algébriques (EB-AFM et EB-GGDH)	53
3.8	Conclusions de ces développements	55
4	Tests <i>a priori</i>	56
4.1	Présentation des DNS utilisées	56
4.1.1	Régime de convection Forcée	56
4.1.2	Régime de convection mixte	57
4.1.3	Régime de convection naturelle	58
4.2	Échelle de longueur thermique L_θ	59
4.2.1	Ratio des échelles thermo-mécanique R	59
4.2.2	Echelle de longueur thermique appliquée à $\varepsilon_{\theta\theta}$	62
4.3	Modélisation des termes de brouillage et de dissipation	64
4.3.1	Comparaison de modèles pour les termes de brouillage et de dissipation	64
4.3.2	Échelle de longueur thermique appliquée aux $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$	71
4.4	Modélisation algébrique des flux thermiques	75

4.4.1	Comparaison des modèles algébriques pour les flux thermiques . . .	75
4.4.2	Influence de l'échelle de L_θ dans les modèles algébriques	81
4.5	Conclusions des tests <i>a priori</i>	87
5	Récapitulatif des modèles utilisés dans la thèse	88
6	Applications académiques	92
6.1	Convection forcée	92
6.1.1	Dynamique	93
6.1.2	Echelle de longueur L_θ	97
6.1.3	Comparaison des modèles à équation de transport	98
6.1.4	Comparaison de différents modèles de $\overline{u'_i \theta'}$	100
6.2	Convection mixte	102
6.2.1	Échelles de longueur et de temps thermiques	102
6.2.2	Comparaison des modèles à équations de transport	105
6.2.3	Comparaison de différents modèles de $\overline{u'_i \theta'}$	106
6.3	Convection naturelle	112
6.3.1	Échelle de longueur et de temps thermique	112
6.3.2	Comparaison des modèles à équations de transport	114
6.3.3	Comparaison de différents modèles de $\overline{u'_i \theta'}$	119
6.4	Conclusion sur les cas académiques	122
7	Applications semi-académiques	125
7.1	Cavité 2D de Betts & Bokhari [10] à $Ra = 1,43.10^6$	125
7.2	Cavité 2D de rapport de longueurs 4 :1 à $Ra = 10^{11}$	136
8	Simulation d'un écoulement avec transfert de chaleur à travers une matrice de tubes fins confinés avec paroi inférieure chauffée (convection forcée)	148
8.1	Présentation du cas	148
8.2	Cas à $Re = 10000$	154
8.3	Conclusion du cas	166

Conclusions et Perspectives	167
A Développement 1D des R_{ij} et ε	179
B Développements asymptotiques avec conditions aux limites de type Neumann	181
C Différentes versions d'EB-RSM utilisées	183
D Canal en Convection forcée : Cas $Pr = 0,025$	186
D.1 Tests <i>a priori</i>	186
D.2 Tests <i>a posteriori</i>	189
D.2.1 Echelle de longueur	189
D.2.2 Comparatif de modèles à équations de transports	192
D.2.3 Comparatif de différents modèles de $\overline{u_i'\theta'}$	193
E Présentation de <i>Code_Saturne</i>	195
F Simulation d'un écoulement avec transfert de chaleur à travers une matrice de tubes fins confinés avec paroi inférieure chauffée à $Re = 30000$ (convection forcée)	198

Notations et symboles

Opérateurs mathématiques

$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_i v_i$	Produit scalaire entre les vecteurs u et v	$\frac{Df}{Dt}$	Dérivée particulaire de f
$\ u\ = \sqrt{u \cdot u}$	Norme du vecteur u	∇f	Gradient de f
$\frac{df}{dx_i}$	Dérivée totale de f par rapport à la variable d'espace x_i	$\nabla \cdot f$	Divergence de f
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	Dérivée partielle de f par rapport à la variable d'espace x_i	$\nabla^2 f$	Laplacien de f
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$	Dérivée partielle seconde de f par rapport à la variable d'espace x_i	$f = \mathcal{O}(g)$	f équivalent à g au voisinage de zéro ($\lim_{y \rightarrow 0} f/g = 1$)
		$f = \mathcal{o}(g)$	f équivalent à g au voisinage de zéro ($\lim_{y \rightarrow 0} f/g = 1$)
		$\underline{\underline{X}}$	Tenseur d'ordre 2 X_{ij}

Symboles latins

$A_i, A_{2\theta}$	Invariants	A_1, A_1^P, A_1^k	Constante du modèle EB-RSM apparaissant dans l'équation de la dissipation
--------------------	------------	---------------------	---

a_{ij}	Tenseur d'anisotropie $a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}$	$C'_{\varepsilon 1}$	Constante de l'équation de dissipation du modèle EB-RSM
C_i, C'_i	Constantes du modèle SSG	C_η	Constante du modèle EB-RSM
$C_{i\theta}, C'_{i\theta}$	Constantes du modèle homogène des flux thermiques turbulents	C_λ	Constante du modèle d'Abe-Kondoh-Nagano
C_L	Constante du modèle EB-RSM	C_μ	Constante du modèle $k-\varepsilon$
C'_L et C''_L	Constante du modèle de l'échelle de longueur thermique	C_θ	Constante du modèle de diffusion turbulente des flux thermiques turbulents pour les modèles DFM et EB-DFM
C'_L	Coefficient de portance <i>rms</i> au paragraphe 8	C_θ, C'_θ	Constante des modèles GGDH, AFM, EB-GGDH et EB-AFM
C_p	Chaleur spécifique du fluide à pression constante sauf au paragraphe 8 où c'est le coefficient de pression	C_θ^*	Constante des modèles EB-GGDH et EB-AFM
C_S	Constante du modèle de diffusion turbulente	$C_{\theta\theta}$	Constante du modèle de diffusion turbulente de la la variance de la température
C_S^ε	Constante du modèle de diffusion turbulente pour la dissipation	$C_{w\theta}^\varepsilon$	Constante du coefficient variable de la dissipation à la paroi des flux thermiques turbulents
C_T	Constante du modèle EB-RSM	$C_{w\theta}^\phi$	Constante du coefficient variable du terme de brouillage à la paroi des flux thermiques turbulents
$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$	Constante de l'équation de dissipation		

D	Profondeur de la cavité au chapitre 7 ou Diamètre d'un tube au paragraphe 8	$D_{\theta\theta}$	Tenseur de diffusion de la variance de la température
d_{ij}	Tenseur de diffusion des tensions de Reynolds	$D_{\theta\theta}^{\kappa}$	Tenseur de diffusion moléculaire de la variance de la température
d_{ij}^p	Tenseur de diffusion par la pression des tensions de Reynolds	$D_{\theta\theta}^t$	Tenseur de diffusion turbulente de la variance de la température
d_{ij}^t	Tenseur de diffusion turbulente des tensions de Reynolds	f	coefficient de perte de charge
d_{ij}^{ν}	Tenseur de diffusion moléculaire des tensions de Reynolds	F_{ij}	Variable de la théorie de la relaxation elliptique
$D_{i\theta}$	Tenseur de diffusion des flux thermiques turbulents	f_{ij}	Variable de la théorie de la relaxation elliptique
$D_{i\theta}^p$	Tenseur de diffusion par la pression des flux thermiques turbulents	f_{λ}	Fonction du modèle d'Abe-Kondoh-Nagano
$D_{i\theta}^t$	Tenseur de diffusion turbulente des flux thermiques turbulents	g	Accélération de la pesanteur
$D_{i\theta}^{\nu}$	Tenseur de diffusion moléculaire des flux thermiques turbulents	G_{ij}	Production de turbulence due aux forces volumiques des tensions de Reynolds
D_k	Tenseur de diffusion de l'énergie cinétique turbulente	$G_{i\theta}$	Production due aux forces volumiques des flux thermiques turbulents
		$G_k = \frac{1}{2}G_{jj}$	Demi-trace du tenseur de production due aux forces volumiques

G_ε	Production due aux forces volumiques dans l'équation de la dissipation	L_U	Longueur de du domaine en amont du centre de la première rangée dans un faisceau de tubes
Gr	Nombre de Grashof		
h	hauteur du canal ou demi-hauteur	\underline{n}	Vecteur unitaire normal à la paroi
H	Hauteur de la cavité au chapitre 7 ou Hauteur d'un tube au paragraphe 8	Nu	Nombre de Nusselt
N	Nombre de rangée	p^*	écart à la pression hydrostatique calculé avec la masse volumique de référence ρ_0
Id	Matrice identité	P	Espacement entre les rangées de tubes dans un faisceau de tubes
K	Constante de Von Kármán		
$k = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i}$	Énergie cinétique turbulente	Pe_t	Nombre de Peclet turbulent
L	Échelle de longueur caractéristique de la turbulence ou Largeur de la cavité au chapitre 7	P_{ij}	Tenseur de production des tensions de Reynolds
L_θ	Échelle de longueur caractéristique de la thermique	$P_{i\theta}$	Production des flux thermiques turbulents
L_D	Longueur de du domaine en aval du centre de la dernière rangée dans un faisceau de tubes	$P_{i\theta}^U$	Production due aux gradients de vitesse des flux thermiques turbulents
		$P_{i\theta}^T$	Production due aux gradients de température des flux thermiques turbulents
		$P_k = \frac{1}{2}P_{jj}$	Demi-trace du tenseur de production

P_ε	Production de la dissipation	$Re_T = \frac{\sqrt{k}k^{3/2}}{\nu\varepsilon}$	Nombre de Reynolds turbulent
$P_{\theta\theta}$	Production de la variance de la température	R_{ij}	Tenseur de Reynolds
Pr	Nombre de Prandtl	S_{ij}	Tenseur des taux de déformation
Pr_t	Nombre de Prandtl turbulent	St	Nombre de Strouhal
q_y	flux thermique suivant y	t	Variable temps
q_w, \dot{q}_w	flux thermique pariétal	u_i	Composante i de la vitesse
$R = \frac{\overline{\theta'^2} \varepsilon}{\varepsilon_{\theta\theta} k}$	Ratio d'échelle de temps thermo-mécanique	$\overline{u_i' \theta'}$	Composante i du flux thermique turbulent
R^h	Ratio d'échelle de temps thermo-mécanique dans la zone homogène	u_τ	Vitesse de frottement
		V_0	Vitesse d'entrée
Ra	Nombre de Rayleigh	V_{BG}	Vitesse débitante intertube dans un faisceau de tubes
Re	Nombre de Reynolds	$\underline{x} = (x, y, z)$	Vecteur position
Re_τ	Nombre de Reynolds adimensionné par les variables de paroi		

Symboles grecs

α	Coefficient de pondération elliptique du modèle EB-RSM	α_θ	Coefficient de pondération elliptique utilisé en thermique
		β	Coefficient de dilatation à pression constante

γ	Variable des modèles EB-GGDH et EB-AFM	θ_h	Température de la paroi chaude
δ	demi-hauteur du canal	θ_c	Température de la paroi froide
δ_{ij}	Symbole de Kronecker		
Δ^+	Epaisseur adimensionnelle de la couche limite thermique	θ_w	Température à la paroi au paragraphe 8
$\Delta\theta$	Différentiel de température	θ_τ	Equivalent de u_τ pour la température
ε_{ij}	Tenseur de dissipation des tensions de Reynolds	$\overline{\theta'^2}$	Variance de la température
$\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{kk}$	Dissipation turbulente	κ	Diffusivité de la température
ε_{ij}^h	Modèle quasi-homogène du tenseur de dissipation	κ_t	Diffusivité turbulente de la température
ε_{ij}^w	Modèle en proche paroi du tenseur de dissipation	λ	Conductivité thermique de la température dans le fluide ou Echelle de Taylor dynamique dans la partie 3.4
$\varepsilon_{i\theta}$	Dissipation des flux thermiques turbulents		
$\varepsilon_{\theta\theta}$	Dissipation de la variance de la température	λ_θ	Echelle de Taylor thermique
η	Coefficients constants des modèles AFM et NL-AFM et coefficient variable du modèle EB-AFM	$\lambda_{u_i\theta'}$	Echelle de Taylor des flux thermiques turbulents
θ	Température	μ	Viscosité dynamique du fluide
θ_0, θ_{ref}	Température de référence	$\nu = \mu/\rho$	Viscosité cinématique du fluide
		ν_t	Viscosité turbulente cinématique

ρ	Masse volumique du fluide	ϕ_{ij}^w	Modèle en proche paroi de corrélation vitesse-gradient de pression
ρ_0	Masse volumique de référence du fluide		
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$	Constantes du modèle $k-\varepsilon$	$\phi_{i\theta}$	Corrélation pression-gradient de température
τ	Échelle de temps caractéristique		
τ_m	Échelle de temps caractéristique hybride	$\phi_{i\theta}^*$	Corrélation température-gradient de pression
τ_u	Échelle de temps caractéristique d'une structure turbulente dynamique	$\phi_{i\theta}^h$	Modèle de corrélation température-gradient de pression en zone quasi-homogène
τ_θ	Échelle de temps caractéristique d'une structure turbulente thermique	$\phi_{i\theta}^w$	Modèle en proche paroi de corrélation température-gradient de pression
$\Psi_{i\theta}$	Corrélation en deux points entre la température et le Laplacien du gradient de pression	ω	variable du modèle $k-\omega$ SST
		Ω_{ij}	Tenseur des taux de rotation
		ξ	Constante des modèles AFM, NL-AFM et EB-AFM
ϕ_{ij}	Corrélation pression-déformation		
		χ	Constante du modèle NL-AFM
ϕ_{ij}^*	Corrélation vitesse-gradient de pression		
		ζ	Constante du modèle NL-AFM
ϕ_{ij}^h	Modèle de corrélation vitesse-gradient de pression en zone quasi-homogène		

Acronymes

AFM	Algebraic Flux Model	GGDH	Generalized Gradient Diffusion Hypothesis
DFM	Differential Flux Model		
DNS	Direct Numerical Simulation	LES	Large Eddy Simulation
		LRR	Launder, Reece, Rodi
DSP	Density Spectra Power	NL-AFM	Non Linear-Algebraic Flux model
EB-AFM	Elliptic Blending-Algebraic Flux Model	RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes
EB-DFM	Elliptic Blending-Differential Flux Model	rms	Root mean square ou écart-type
EB-DFM Choi	EB-DFM originel de Choi et al [15]	RSM	Reynolds Stress Model
EB-DFM Choi modifié	EB-DFM de Choi et al [15] utilisant l'EB-RSM modifié par Choi et al [15]	SGDH	Simple Gradient Diffusion Hypothesis
		SSG	Speziale, Sarkar, Gatski
EB-DFM Shin	EB-DFM de Shin et al [78]	UMIST	University of Manchester Institute of Science and Technology
EB-GGDH	Elliptic Blending-Generalized Gradient Diffusion Hypothesis	URANS	Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes
EB-RSM	Elliptic Blending Reynolds-Stress Model		

Autres

\cdot_h	Grandeur calculée dans la zone homogène	\cdot_w	Grandeur calculée à la paroi
-----------	--	-----------	------------------------------

Introduction générale

Les transferts thermiques dans les écoulements sont d'une importance capitale dans plusieurs applications industrielles qui intéressent EDF, en particulier dans le domaine nucléaire. Par exemple, les problématiques thermiques dans le circuit primaire des réacteurs sont nombreuses (fatigue thermique dans les zones de mélange, chocs thermiques sur des organes de robinetterie, distribution de température dans les branches chaudes, etc. . .) et concernent aussi bien la sûreté que les performances industrielles. La maîtrise des transferts thermiques est également cruciale pour le stockage et l'entreposage des déchets radioactifs (la thermo-hydraulique conditionne la température des matériaux). Enfin, les phénomènes de convection naturelle présentent un grand intérêt pour les systèmes dits "passifs" (sans utilisation de pompe secondaire) par exemple pour l'évacuation de puissance résiduelle du cœur lors d'un arrêt dans les réacteurs nucléaires de génération 4 (l'intérêt de tels systèmes étant naturellement la sûreté).

Les mouvements de fluides par des effets de gravité sont engendrés par des gradients de densité qui peuvent être dus à des différences élevées de température. La compréhension et la maîtrise de tels phénomènes restent aujourd'hui un grand défi en particulier quand les écoulements sont turbulents, que ce soit dans le domaine expérimental ou dans celui du numérique. Les limites rencontrées pour la compréhension des phénomènes de convection mixte et naturelle sont accentuées par la rareté des données expérimentales (en effet, les expériences sont difficiles à mener et coûtent cher) ou numériques, issues de simulations directes (DNS, Direct Numerical Simulation). Alors que les approches de type RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) et LES (Large Eddy Simulation) ont atteint une certaine maturité pour la prédiction de la dynamique du fluide sans effets thermiques (vitesse/pression), de nombreux efforts d'investigations restent à mener pour la modélisation des flux thermiques turbulents (modélisation du mélange thermique) et du comportement des fluides en proche paroi, en particulier lorsque les écoulements sont dominés partiellement (convection mixte) ou totalement (convection naturelle) par des effets de gravité.

L'objectif général de la thèse est d'améliorer la modélisation numérique RANS des flux

thermiques turbulents et de valider des formulations retenues à l'aide de l'outil de CFD (Computational Fluid Dynamic) d'EDF *Code_Saturne* sur des configurations académiques, semi-industrielles et industrielles pour un fluide usuel : l'air. On se fixe comme objectif particulier de prédire de façon satisfaisante, ce qui n'est pas le cas aujourd'hui comme ceci sera exposé par la suite, les écoulements dans lesquels la convection naturelle joue un rôle prépondérant. On considérera que cet objectif est atteint sur les cas de Versteegh & Nieuwstadt [89] et Valida [26] si on améliore considérablement la prédiction du champ de vitesse, de température ainsi que des échanges thermiques à la paroi.

Les équations de Navier-Stokes, du nom de Claude-Louis Navier (1785-1836) et George Gabriel Stokes (1819-1903), démontrées au XIX^{ème} siècle, permettent de décrire la physique d'un écoulement de fluide. La résolution de ces équations est très complexe dans le cas des écoulements turbulents de part leur caractère chaotique et les petites échelles d'espace et de temps qu'elles mettent en jeu (échelles de Kolmogorov (1903-1987)). Cependant, il existe aujourd'hui des simulations numériques prenant en compte toutes les échelles de la turbulence. Cette approche est appelée DNS (Direct Numerical Simulation). La puissance de calcul nécessaire pour réaliser de telles simulations à des nombres de Reynolds faibles ou raisonnables est cependant conséquente voire indisponible aujourd'hui. Ceci est d'autant plus vrai pour les applications industrielles dans lesquels les nombres de Reynolds turbulents sont très élevés. On rappelle que le rapport de l'échelle intégrale à l'échelle de Kolmogorov est proportionnel à $(Re_T)^{3/4}$, où Re_T est le nombre de Reynolds turbulent basé sur l'échelle intégrale, et que le nombre de nœud nécessaire à la résolution complète de l'équation de Navier-Stokes est environ égal à $N = Re_T^{9/4}$. Cette méthode devient vite impossible à utiliser dès que le nombre de Reynolds est important. Une méthode moins coûteuse mais moins complète et précise que la DNS, est la simulation des grandes échelles ou LES (Large Eddy Simulation). La LES consiste à calculer seulement les grandes structures de l'écoulement et à modéliser les plus petites. La résolution des écoulements turbulents par LES coûte encore trop cher pour des calculs industriels à très fort nombre de Reynolds, notamment à cause des raffinements nécessaires en paroi (on ne peut prétendre utiliser convenablement la LES avec des nombres de Reynolds qui dépassent quelques dizaines de milliers). Si la connaissance du champ dynamique fluctuant à grande échelle n'est pas requise, on peut avoir recours à des approches statistiques permettant de prédire la moyenne statistique des variables en jeu ainsi que leur variance et certaines corrélations en un point, cette méthode consiste en la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées (ou RANS).

On s'intéressera dans la présente thèse à la modélisation du comportement de la température au sein des fluides et plus particulièrement des flux thermiques turbulents. Après une brève

bibliographie de la modélisation de la dynamique du fluide conduisant au choix du modèle "bas Reynolds" utilisant la pondération elliptique EB-RSM (Elliptic Blending – Reynolds Stress Model), on traitera d'un point de vue bibliographique les principaux modèles existant dans la littérature, algébrique ou à équation de transport, pour traiter les flux thermiques turbulents. Ensuite, on s'intéressera à la modélisation en proche paroi de ces flux thermiques turbulents et plus particulièrement à l'application du principe de la pondération elliptique (elliptic blending) à l'obtention de ces flux. Puis, on analysera différentes modifications visant à améliorer la modélisation des flux thermiques turbulents, notamment au niveau des échelles de longueur et de temps à utiliser avec ceux-ci. Un modèle à équation de transport pour ces flux reprenant ces modifications est également développé. Ensuite, des tests *a priori* puis *a posteriori* (simulations numériques) seront réalisés avec *Code_Saturne* v1.3.3 dans les trois régimes principaux : convection forcée, mixte et naturelle, permettant de comparer les différents types de modélisation dans un canal. Pour finir, des simulations numériques seront réalisées pour confronter les modèles sur des cas semi-académiques et industriels.

Chapitre 1

Bibliographie - Modélisation RANS de la dynamique de l'écoulement

On va spécifier dans cette section les équations que l'on résout ainsi que les différents modèles pour chaque terme des équations des tensions de Reynolds comme la diffusion turbulente, la dissipation ou encore la corrélation pression-déformation qui permettent d'aboutir au modèle EB-RSM (Elliptic Blending Reynolds Stress Model) qui sera considéré comme le modèle de dynamique de référence dans la présente thèse.

1.1 Équations générales

La résolution des équations de Navier-Stokes moyennées (Reynolds Averaged Navier-Stokes ou RANS) reste l'approche la plus largement répandue pour modéliser la turbulence dans les cas industriels. C'est une méthode statistique, qui consiste à décomposer les variables principales de l'écoulement (vitesse, pression, température) en la somme d'une moyenne statistique (moyenne de Reynolds) et de la fluctuation associée :

$$\varphi(\underline{x},t) = \overline{\varphi}(\underline{x},t) + \varphi'(\underline{x},t) \quad (1.1)$$

où $\varphi(\underline{x},t)$ est une variable quelconque et \underline{x} est le vecteur de coordonnées égal à (x,y,z) .

Pour l'écriture des équations suivantes, on se place dans le cas d'un fluide incompressible combiné à une approximation de Boussinesq. Ceci induit que les propriétés physiques du fluide sont considérées constantes sauf dans les termes de flottabilité où la masse volumique ρ varie linéairement avec la température θ tel que : $\rho(\theta) = \rho_0 (1 - \beta (\overline{\theta} - \theta_0))$ où ρ_0 est la masse volumique à la température de référence θ_0 et β est le coefficient de dilatation à

pression constante. En appliquant la décomposition (1.1) aux équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement nous obtenons alors le système d'équations suivant (appelé équations de Reynolds) :

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} - \beta (\bar{\theta} - \theta_0) g_i \quad (1.3)$$

où u_i sont les composantes du vecteur vitesse, θ la température, ν la viscosité cinématique, g_i les composantes de l'accélération de la pesanteur et p^* l'écart à la pression hydrostatique calculé avec la masse volumique de référence ρ_0 .

$R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$ sont appelées les tensions de Reynolds et ont besoin d'être modélisées. Contrairement aux modèles de turbulence avec fermeture d'ordre 0 ou d'ordre 1 qui modélisent les tensions de Reynolds *via* une hypothèse de viscosité turbulente par exemple (modèle de Boussinesq), les modèles avec fermeture du second ordre permettent de résoudre des équations pour les tensions de Reynolds. On ne s'intéresse ici qu'à ces approches, en particulier celles dans lesquelles les tensions de Reynolds sont résolues à l'aide d'une équation de transport (on ne s'intéressera donc pas aux modèles algébriques ou non linéaires) car pour des mécanismes complexes, comme par exemple, lorsque la thermique modifie l'écoulement par l'intermédiaire des phénomènes de flottabilité, elle le fait de façon anisotrope et c'est à partir de ce niveau de modélisation que l'anisotropie est captée.

Des manipulations élémentaires des équations de Navier-Stokes permettent d'obtenir les équations de transport suivantes pour les tensions de Reynolds :

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial R_{ij} \bar{u}_k}{\partial x_k} = P_{ij} + d_{ij} + \phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij} + G_{ij} \quad (1.4)$$

P_{ij} , d_{ij} , ϕ_{ij}^* , ε_{ij} et G_{ij} représentent respectivement les termes de production, de diffusion, de corrélation vitesse-gradient de pression, de dissipation et de production due aux forces volumiques (ici les forces de flottabilité). Les expressions mathématiques de ces différents termes sont données ci-dessous :

$$P_{ij} = - \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) = - \left(R_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + R_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)$$

$$d_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\underbrace{-\overline{u'_i u'_j u'_k}}_{d_{ij}^t} + \nu \underbrace{\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k}}_{d_{ij}^m} \right)$$

où d_{ij}^t et d_{ij}^m sont respectivement les diffusions turbulente et moléculaire.

$$\phi_{ij}^* = -\frac{1}{\rho} \left(\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_j}}{\partial x_k}$$

$$G_{ij} = -g_i \beta \overline{u'_j \theta'} - g_j \beta \overline{u'_i \theta'}$$

Le terme de production n'a pas à être modélisé et peut être calculé avec les données du problème. On présente ci-dessous la modélisation choisie pour les autres termes. A noter que la modélisation des flux thermiques turbulents $\overline{u'_i \theta'}$ est détaillée au chapitre 2.

1.2 Modélisation quasi-homogène des équations de transport des tensions de Reynolds

On s'intéresse dans cette partie à la modélisation des différents termes des équations des tensions de Reynolds quand l'écoulement est loin d'une paroi. Il existe un nombre très élevé de modèles. On ne donne ici que ceux qui sont liés au modèle que l'on utilisera *in fine* (cf. 1.4). Pour une revue plus complète de la modélisation au second ordre, on pourra se reporter par exemple à Hanjalić & Launder [36].

1.2.1 Modélisation du terme de corrélation vitesse-gradient de pression

Ce terme est très important dans la répartition d'énergie turbulente entre les tensions de Reynolds. Pour une meilleure compréhension, ce terme est décomposé de la manière suivante :

$$\phi_{ij}^* = \phi_{ij} + d_{ij}^p$$

1.1.2 Modélisation quasi-homogène des équations de transport des tensions de Reynolds

où ϕ_{ij} est le terme de corrélation pression-déformation et d_{ij}^p est le terme de diffusion de pression, tels que :

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\rho'} \overline{p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}$$

$$d_{ij}^p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{p' u'_i \delta_{jk}} + \overline{p' u'_j \delta_{ik}} \right)$$

On peut remarquer que ϕ_{ij} est à trace nulle ce qui implique que ce terme sert exclusivement à redistribuer l'énergie entre les tensions de Reynolds. d_{ij}^p participe quand à lui à l'effort de diffusion globale. C'est pourquoi, il sera modélisé avec la diffusion turbulente (voir paragraphe 1.2.3).

L'analyse de l'équation de Poisson sur la pression fluctuante suggère de la séparer en trois termes, un terme dit « lent » ne dépendant pas de la vitesse moyenne, un terme dit « rapide » dépendant de la vitesse moyenne et un terme dû aux forces volumiques :

$$p' = p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)}$$

Les différents termes sont solution des équations de Poisson suivantes :

$$\nabla^2 p^{(1)} = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j})$$

$$\nabla^2 p^{(2)} = -2 \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}$$

$$\nabla^2 p^{(3)} = -\beta g_i \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}$$

En appliquant le formalisme de Green à ces équations (la dépendance au temps est enlevée par souci de clarté), on obtient la solution suivante :

$$p'(x) = \int \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j}) + 2 \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \beta g_i \frac{\partial \theta'}{\partial x_i} \right) (\underline{x}') \frac{dV(\underline{x}')}{4\pi \|\underline{x}' - \underline{x}\|} \quad (1.5)$$

En multipliant par $\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)$ puis en moyennant, il en résulte en posant $\underline{r} = \underline{x}' - \underline{x}$:

CHAPITRE 1. BIBLIOGRAPHIE - MODÉLISATION RANS DE LA DYNAMIQUE DE L'ÉCOULEMENT

$$\begin{aligned}
\phi_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int \overline{\nabla^2 p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} \frac{dV(\underline{x}')}{\|\underline{r}\|} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int \underbrace{\frac{\partial^2 u'_k u'_l}{\partial x_k \partial x_l}(\underline{x}') \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}(\underline{x}) + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}(\underline{x}) \right)}_{\phi_{ij}^{(1)}} \frac{dV(\underline{x}')}{\|\underline{r}\|} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int \underbrace{2 \frac{\partial \overline{u}_k}{\partial x_l}(\underline{x}') \frac{\partial u'_l}{\partial x_k}(\underline{x}') \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}(\underline{x}) + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}(\underline{x}) \right)}_{\phi_{ij}^{(2)}} \frac{dV(\underline{x}')}{\|\underline{r}\|} \\
&\quad - \frac{1}{4\pi} \int \underbrace{\beta g_l \frac{\partial \theta'}{\partial x_l}(\underline{x}') \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}(\underline{x}) + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}(\underline{x}) \right)}_{\phi_{ij}^{(3)}} \frac{dV(\underline{x}')}{\|\underline{r}\|}
\end{aligned}$$

La corrélation de pression-déformation peut donc être séparée en plusieurs contributions telles que :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^{(1)} + \phi_{ij}^{(2)} + \phi_{ij}^{(3)}$$

Elles représentent chacune un processus physique qui peut être modélisé séparément. Ainsi, $\phi_{ij}^{(1)}$ symbolise le retour à l'isotropie de la turbulence non-isotrope, il est aussi appelé terme lent car il ne dépend pas de la vitesse moyenne. $\phi_{ij}^{(2)}$ reproduit le processus d'isotropisation de la production, il est aussi appelé terme rapide car il dépend du gradient de vitesse moyenne. $\phi_{ij}^{(3)}$ exprime le processus d'« isotropisation de la production » due aux forces volumiques (ici les forces de flottabilité).

Ces trois termes doivent être modélisés. L'équation du terme lent montre que seul l'état de turbulence y intervient. En expérience de turbulence homogène anisotrope, il a été identifié que son rôle est essentiellement de faire tendre la turbulence vers un état isotrope en redistribuant l'énergie entre les composantes. Si on cherche à exprimer $\phi_{ij}^{(1)}$ en fonction des tensions de Reynolds au même point (hypothèse de localité), on peut montrer (voir par ex. Lumley [57]) que la relation la plus générale pour le terme lent s'écrit :

$$\phi_{ij}^{(1)} = \beta_1(A_2, A_3) \varepsilon a_{ij} + \gamma(A_2, A_3) \varepsilon \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \quad (1.6)$$

où β_1 et γ sont des fonctions dépendant de A_2 et A_3 , les invariants principaux du tenseur d'anisotropie définis par $A_2 = a_{ik} a_{ki}$ et $A_3 = a_{ik} a_{kj} a_{ji}$ tel que $a_{ij} = \frac{u'_i u'_j}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}$.

La modélisation du terme rapide repose sur une hypothèse supplémentaire qui est l'hypothèse de quasi-homogénéité, c'est-à-dire que l'on suppose que les gradients de vitesse

CHAPITRE 1. BIBLIOGRAPHIE - MODÉLISATION RANS DE LA DYNAMIQUE DE L'ÉCOULEMENT

La constante C_6 est classiquement comprise entre 0,5 et 0,6. Les valeurs des différentes constantes utilisées dans la suite sont répertoriées dans le tableau 1.1

C_1	C'_1	C'_2	C_3	C'_3	C_4	C_5	C_6
1,7	-1,05	0,9	0,8	0,65	0,625	0,2	0,55

TAB. 1.1 – Valeur des constantes utilisées ici avec le SSG

Par souci de stabilité numérique, la non-linéarité du terme lent est souvent supprimée ce qui n'est pas le cas dans *Code_Saturne*.

1.2.2 Modélisation du tenseur de dissipation turbulente

Pour le tenseur de dissipation ε_{ij} , sa contribution vient des plus petites échelles de tourbillons où les gradients de la fluctuation de la vitesse sont les plus grands et celles-ci peuvent être considérées comme isotropes. Un modèle isotrope peut alors être considéré dans les zones quasi-homogènes :

$$\varepsilon_{ij}^h = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}$$

Pour la dissipation ε , il est possible de dériver une « équation exacte » :

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & \underbrace{-2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{P_{\varepsilon 1} + P_{\varepsilon 2}} - \underbrace{2\nu u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l}}_{P_{\varepsilon 3}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}}_{P_{\varepsilon 4}} \\ & \underbrace{-2\nu \beta g_i \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial \theta}{\partial x_l}}_{G_\varepsilon} - \underbrace{2 \left(\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} \right)}_{Y_\varepsilon} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\underbrace{-2 \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}}_{D_\varepsilon^p} - \underbrace{\nu u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right)^2}_{D_\varepsilon^t} + \underbrace{\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}}_{D_\varepsilon^\nu} \right)}_{D_\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.9)$$

où $P_\varepsilon = P_{\varepsilon 1} + P_{\varepsilon 2} + P_{\varepsilon 3} + P_{\varepsilon 4}$ représente la production dynamique, G_ε la production par flottabilité, D_ε la diffusion et Y_ε la dissipation visqueuse. L'équation (1.9) reste cependant inexploitable avec les variables que l'on résout puisqu'elle fait massivement intervenir des produits doubles et triples de gradient de fluctuations de vitesse. Plusieurs tentatives ont été effectuées mais ce sont révélées infructueuses (voir par exemple Hanjalić & Launder [36]). Pour modéliser la dissipation, on sait qu'elle est liée à l'énergie cinétique turbulente *via* l'échelle de temps caractéristique de la turbulence T , l'idée est alors de relier la production

1.1.2 Modélisation quasi-homogène des équations de transport des tensions de Reynolds

de k à la production de la dissipation ε via cette échelle. On peut alors construire une équation de transport pour la dissipation en mimant celle de l'énergie cinétique turbulente. Cette idée est à la base de la construction du modèle $k - \varepsilon$ standard par exemple. On obtient alors :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon u_j}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_S^\varepsilon \tau R_{km} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right)}_{D_\varepsilon^t} + \frac{C_{\varepsilon 1} P_k + C_{\varepsilon 3} G_k}{\tau} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (1.10)$$

avec $C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 3} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,83$, $C_s^\varepsilon = 0,18$, $\sigma_\varepsilon = 1,15$, $P_k = \frac{1}{2} P_{jj}$ et $G_k = \frac{1}{2} G_{jj}$. On prend généralement pour les modèles « haut Reynolds » $\tau = \frac{k}{\varepsilon}$.

1.2.3 Modélisation de la diffusion turbulente

Le terme de diffusion peut être séparé en une partie turbulente d_{ij}^t , une partie due à la pression d_{ij}^p et une partie purement visqueuse d_{ij}^ν tel que :

$$d_{ij}^t = - \frac{\partial (\overline{\rho u'_i u'_j u'_k})}{\partial x_k}$$

$$d_{ij}^p = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \overline{p' u'_j} \delta_{ik})$$

$$d_{ij}^\nu = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} \right)$$

Le terme de diffusion par la viscosité cinématique d_{ij}^ν peut être directement calculé. La diffusion turbulente contenant la corrélation triple $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ doit quant à elle être modélisée. Le terme de diffusion par la pression est souvent, voir par exemple les travaux de Lumley [57], contenu dans le terme de diffusion turbulente des tensions de Reynolds car il participe à l'effort de diffusion globale, ce qui est le cas ici. Pour la diffusion turbulente, Daly et Harlow [17] proposent un modèle simple à partir de l'hypothèse généralisée de diffusion par gradient (GGDH, Generalized Gradient Diffusion Hypothesis) :

$$d_{ij}^t = -C_S \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\tau R_{km} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right)$$

τ correspond à l'échelle de temps de la turbulence soit,

$$\tau = \frac{k}{\varepsilon}$$

CHAPITRE 1. BIBLIOGRAPHIE - MODÉLISATION RANS DE LA DYNAMIQUE DE L'ÉCOULEMENT

k et ε sont respectivement l'énergie turbulente et la dissipation :

$$k = \frac{1}{2} R_{ii}$$

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$$

On a donc,

$$d_{ij}^t = -C_S \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{k}{\varepsilon} R_{km} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right)$$

Une valeur classique de la constante C_S est 0,22. Toutefois l'expression précédente ne respecte pas les propriétés de symétries de $\overline{u'_i u'_j u'_k}$, mais conserve celles sur d_{ij}^t . Pour palier à ce problème, Hanjalić & Launder [35] définissent le modèle suivant :

$$d_{ij}^t = -C_S \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\tau \left(R_{im} \frac{\partial R_{jk}}{\partial x_m} + R_{jm} \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_m} + R_{km} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right) \right)$$

Ce modèle donne des résultats légèrement meilleurs que ceux de Daly-Harlow, mais il contient 27 termes par tension de Reynolds contre 9, il est donc souvent considéré que le gain en prédiction ne vaut pas l'effort numérique. De plus, ce modèle ne prédit pas de bons niveaux d'anisotropie au voisinage d'une frontière libre, cf Cazalbou & Chassaing [13] contrairement au modèle de Daly-Harlow. C'est pourquoi le modèle de Daly-Harlow [17] est retenu pour la modélisation de la diffusion turbulente des tensions de Reynolds. A noter que l'échelle de temps T peut-être modifiée comme on verra par la suite (1.4) en prenant en compte son comportement à la paroi.

1.3 Modélisation en proche paroi des tensions de Reynolds à l'aide de l'« elliptic blending »

Les modèles présentés précédemment sont des modèles Haut Reynolds, c'est-à-dire que les hypothèses qui permettent de les établir sont valables loin de la paroi. On s'intéresse dans cette thèse à une catégorie de modèles Bas-Reynolds (pour la zone de proche paroi) du second ordre. Bien entendu, d'autres modèles, basés entre autre sur des fonctions d'amortissement fonction de la distance à la paroi ou d'un nombre de Reynolds de frottement ou turbulent local existent dans la littérature. Outre l'utilisation de la distance à la paroi qui reste sujette à caution pour les géométries complexes, toutes ces approches ne prennent en compte que des effets locaux pour le terme de redistribution (corrélation vitesse-gradient de pression ϕ_{ij}^*). L'approche que l'on utilise dans la présente thèse introduit des effets non-locaux

1.1.3 Modélisation en proche paroi des tensions de Reynolds à l'aide de l'« elliptic blending »

à l'aide d'une méthode appelée « elliptic blending » (ou pondération elliptique), elle-même simplifiant l'approche dite de relaxation elliptique ou « elliptic relaxation ». Durbin [25] est parti du constat que le problème de modélisation en proche paroi provenait des hypothèses de quasi-homogénéité et de localité de Chou [16]. Il a ainsi proposé un nouveau modèle. Sous forme intégrale, la corrélation vitesse-gradient de pression s'écrit :

$$\phi_{ij}^* = - \int_{\mathbf{R}^3} \overline{u'_i(\underline{x}) \frac{\partial \nabla^2 p'}{\partial x_j}(\underline{x}') + u'_j(\underline{x}) \frac{\partial \nabla^2 p'}{\partial x_i}(\underline{x}')} \frac{dV(\underline{x}')}{4\pi \|\underline{x}' - \underline{x}\|}$$

L'hypothèse de base de Durbin est que les corrélations en deux points ont une décroissance exponentielle avec la distance $r = \|\underline{x}' - \underline{x}\|$ entre les deux points :

$$\overline{u'_i(\underline{x}) \frac{\partial \nabla^2 p'}{\partial x_j}(\underline{x}') + u'_j(\underline{x}) \frac{\partial \nabla^2 p'}{\partial x_i}(\underline{x}')} = \overline{u'_i(\underline{x}') \frac{\partial \nabla^2 p'}{\partial x_j}(\underline{x}') + u'_j(\underline{x}') \frac{\partial \nabla^2 p'}{\partial x_i}(\underline{x}')} \exp\left(-\frac{r}{L}\right)$$

où L est une échelle de longueur caractéristique de la corrélation en deux points gradient de vitesse-laplacien de pression. En combinant cette équation avec la précédente on obtient :

$$\phi_{ij}^* = - \int_{\mathbf{R}^3} \overline{u'_i(\underline{x}') \frac{\partial \nabla^2 p'}{\partial x_j}(\underline{x}') + u'_j(\underline{x}') \frac{\partial \nabla^2 p'}{\partial x_i}(\underline{x}')} \frac{\exp\left(-\frac{r}{L}\right)}{4\pi.r} dV(\underline{x}')$$

La fonction $\frac{\exp\left(-\frac{r}{L}\right)}{4\pi.r}$ est la fonction de Green de l'espace \mathbf{R}^3 associée à l'opérateur $-\nabla^2 + 1/L^2$. Avec cette hypothèse, on peut montrer que l'équation précédente peut être inversée et que ϕ_{ij}^* est solution de l'équation suivante (cf [59]) :

$$\phi_{ij}^* - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^* = - \frac{L^2}{\rho} \overline{u'_i(\underline{x}) \frac{\partial \nabla^2 p'}{\partial x_j}(\underline{x}) + u'_j(\underline{x}) \frac{\partial \nabla^2 p'}{\partial x_i}(\underline{x})}$$

Loin des parois, $L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^*$ tend vers zéro (cf [59]), l'équation se réduit donc à :

$$\phi_{ij}^* = - \frac{L^2}{\rho} \overline{u'_i(\underline{x}) \frac{\partial \nabla^2 p'}{\partial x_j}(\underline{x}) + u'_j(\underline{x}) \frac{\partial \nabla^2 p'}{\partial x_i}(\underline{x})}$$

Comme les hypothèses de Chou s'appliquent loin des parois, les modèles « haut Reynolds » classiques (LRR, SSG ...) peuvent s'appliquer. Le second membre de cette équation peut donc être modélisé par un modèle classique noté ϕ_{ij}^h (h pour zone quasi homogène i.e. loin de la paroi).

$$\phi_{ij}^* - L^2 \nabla^2 \phi_{ij}^* = \phi_{ij}^h \quad (1.11)$$

La nouveauté dans ce modèle vient du fait que le terme de pression est solution d'une équation différentielle elliptique qui prend en compte l'effet non-local et ainsi « sentir » à distance

CHAPITRE 1. BIBLIOGRAPHIE - MODÉLISATION RANS DE LA DYNAMIQUE DE L'ÉCOULEMENT

l'effet de la paroi. Le caractère elliptique de l'équation (1.11) permet de faire le lien entre la zone de proche paroi *via* les conditions aux limites à la zone quasi-homogène *via* le modèle ϕ_{ij}^h . On notera que contrairement à la modélisation en zone quasi-homogène, le terme de diffusion par la pression est inclus dans le terme de redistribution en proche paroi et plus dans la diffusion turbulente.

Par ailleurs, Durbin propose de résoudre une équation elliptique pour la dissipation ε_{ij} mais sans justification théorique. L'approximation isotrope présentée précédemment pour la zone quasi-homogène est suffisamment correcte pour être conservée, soit $\varepsilon_{ij}^h = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}$. En proche paroi, cette hypothèse n'est plus valide car les petites échelles sont du même ordre que les grandes. Afin de prendre en compte l'anisotropie, on retiendra le modèle de Rotta [74] qui a l'avantage de ne pas avoir de dépendance géométrique :

$$\varepsilon_{ij}^w = \frac{R_{ij}}{k}\varepsilon \quad (1.12)$$

L'exposant w se rapporte aux zones de proche paroi. Le tenseur de dissipation peut être décomposé de la manière suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^w + (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^w) \quad (1.13)$$

En proche paroi, ε_{ij} doit tendre vers ε_{ij}^w , soit en considérant y comme la distance à la paroi :

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^w) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \quad (1.14)$$

tandis que loin de celle-ci, ε_{ij} doit tendre vers ε_{ij}^h , soit :

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^w) \xrightarrow{y \rightarrow 0} \varepsilon_{ij}^h - \varepsilon_{ij}^w \quad (1.15)$$

De la même manière que pour ϕ_{ij}^* , on peut calculer $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^w)$ avec une équation de relaxation elliptique où le terme source est la valeur que l'on veut obtenir dans la zone homogène :

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^w) - L^2 \nabla^2 (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^w) = \varepsilon_{ij}^h - \varepsilon_{ij}^w \quad (1.16)$$

avec comme conditions aux limites imposées à la paroi $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^w) = 0$. On retrouve bien les deux comportements asymptotiques précédents.

Par linéarité de l'opérateur, on peut utiliser une équation elliptique pour ϕ_{ij}^* et $(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^w)$ en même temps. Il suffit alors de résoudre $F_{ij} = \phi_{ij}^* - (\varepsilon_{ij}^h - \varepsilon_{ij}^w)$ qui doit respecter à la paroi les conditions aux limites $F_{ij} = 0$, ce qui donne :

$$F_{ij} - L^2 \nabla^2 F_{ij} = \phi_{ij}^h - \varepsilon_{ij}^h + \varepsilon_{ij}^w$$

1.1.3 Modélisation en proche paroi des tensions de Reynolds à l'aide de l'« elliptic blending »

En écrivant F_{22} , on peut montrer que sa solution en proche paroi ne satisfait pas $\overline{v'^2} = \mathcal{O}(y^4)$. Pour y remédier, Manceau [59] préconise et justifie l'utilisation de l'inconnue $f_{ij} = \frac{F_{ij}}{k}$ à la place de F_{ij} . Le système d'équations à résoudre est alors :

$$f_{ij} - L^2 \nabla^2 f_{ij} = \frac{1}{k} (\phi_{ij}^h - \varepsilon_{ij}^h + \varepsilon_{ij}^w)$$

C'est cette équation qui sera résolue avec l'équation de transport de R_{ij} où $\phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij}$ est modélisé par $k f_{ij} - \varepsilon_{ij}^w$. Les conditions aux limites en paroi associées peuvent donc être retrouvées de la manière suivante :

Pour toutes les composantes du tenseur de Reynolds, le bilan à la paroi se réduit à :

$$\phi_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - d_{ij}^\nu$$

soit avec la valeur de $\phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij}$ à la paroi :

$$k f_{ij} = \varepsilon_{ij}^w - d_{ij}^\nu$$

soit :

$$\nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial y^2} - \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon = -k f_{ij}$$

On a $\overline{u'_i u'_j} = 0$ à la paroi, donc, la solution de cette équation différentielle portant sur $\overline{u'_i u'_j}$ où on utilisera la valeur de ε à la paroi $\frac{2\nu k}{y^2}$ est :

$$\overline{u'_i u'_j} = A y^2 - \frac{\varepsilon}{20\nu'^2} f_{ij} y^4 \quad (1.17)$$

Connaissant le comportement asymptotique des $\overline{u'_i u'_j}$, on peut retrouver les conditions aux limites des f_{ij} :

- $f_{22} : \overline{v'^2}$ est en $\mathcal{O}(y^4)$ donc $A = 0$. On obtient alors comme condition aux limites $f_{22}|_w = \frac{-20\nu'^2}{\varepsilon} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overline{v'^2}}{y^4}$
- f_{11}, f_{33} et $f_{13} : \overline{u'^2}, \overline{w'^2}$ et $\overline{u'w'}$ sont en $\mathcal{O}(y^2)$. Si A n'est pas annulée, les conditions aux limites de f_{11}, f_{33} et f_{13} importe peu car $\overline{u'_i u'_j}$ est alors obligatoirement en $\mathcal{O}(y^2)$. Pour plus de simplicité, on choisira $f_{11}|_w = f_{33}|_w = f_{13}|_w = 0$
- f_{12} et $f_{23} : \overline{u'v'}$ et $\overline{v'w'}$ se comportent en $\mathcal{O}(y^3)$, le problème est qu'il n'y a pas de terme en y^3 dans l'équation (1.17). Par conséquent il n'existe pas de condition de type Dirichlet pour ces f_{ij} pour être en $\mathcal{O}(y^3)$. Si on suppose dans l'équation différentielle précédente que $\overline{u'v'} = \gamma y^3$ (ce raisonnement est aussi valable pour $\overline{v'w'}$), on arrive à montrer que

CHAPITRE 1. BIBLIOGRAPHIE - MODÉLISATION RANS DE LA DYNAMIQUE DE L'ÉCOULEMENT

la seule condition aux limites permettant d'avoir $\overline{u'v'}$ en $\mathcal{O}(y^3)$ est $f_{12} = -\frac{8\nu^2}{\varepsilon} \frac{\overline{u'v'}}{y^4}$. Cette condition étant singulière en 0, elle ne peut s'appliquer qu'au premier point à l'intérieur du domaine et donc introduire des instabilités numériques. C'est pourquoi on préfère utiliser la condition aux limites qui annule A : $f_{12}|_w = \frac{-20\nu^2}{\varepsilon} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overline{u'v'}}{y^4}$ et $f_{23}|_w = \frac{-20\nu^2}{\varepsilon} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\overline{v'w'}}{y^4}$ car la singularité en 0 est éliminée comme le montre 1.17. Ce choix d'ordre plus élevé entraîne une sous-estimation de $\overline{u'v'}$ et $\overline{v'w'}$ à la paroi, ce qui est préférable à une sur-estimation dans cette zone, car l'objectif est de tendre plus rapidement vers zéro à la paroi.

L'inconvénient majeur du modèle à relaxation elliptique est qu'il nécessite la résolution d'un système à 13 équations ; 6 pour la corrélation vitesse-gradient de pression, 1 pour la dissipation et 6 pour les tensions de Reynolds. La résolution numérique des composantes f_{ij} pose des problèmes de stabilité numérique. Il est en effet nécessaire de les coupler aux tensions de Reynolds pour pouvoir imposer implicitement les conditions aux limites sur f_{22} , f_{12} et f_{23} , ce qui rend l'implémentation dans un code industriel non-triviale.

Afin de palier à ces problèmes, Manceau et al. [62] proposent le modèle à pondération elliptique (EB-RSM : Elliptic Blending-Reynolds Stress Model). Ils s'inspirent de la relaxation elliptique et a l'avantage d'être plus robuste numériquement et de ne résoudre qu'une seule équation elliptique au lieu de six. L'idée est de reproduire l'effet de blocage en ne résolvant qu'une seule équation différentielle portant sur un coefficient de pondération α compris entre 0 et 1.

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1 \quad (1.18)$$

avec comme condition aux limites en paroi :

$$\alpha|_w = 0$$

L est l'échelle de longueur caractéristique de la turbulence. Elle est constituée de l'échelle intégrale $\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$ et de l'échelle de Kolmogorov $\frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}$ qui permet d'éviter une singularité de l'équation car l'échelle intégrale s'annule à la paroi. Manceau et al. [63] ont vérifié avec la base de données DNS de Moser et al. [67] (en canal) que cette échelle peut être modélisée par :

$$L = C_L \max \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \right)$$

Les valeurs de C_L et de C_η varient suivant les auteurs, on donnera celles qui sont utilisées dans la présente thèse au paragraphe (1.4). On remarquera que si L était constant et si on ne

1.1.3 Modélisation en proche paroi des tensions de Reynolds à l'aide de l'« elliptic blending »

résolvait l'équation (1.18) uniquement suivant la direction normale à la paroi y , la solution exacte de cette équation s'écrivait :

$$\alpha = 1 - e^{-\frac{y}{L}}$$

En utilisant l'équation (1.18), le terme de corrélations ϕ_{ij} s'écrit : $\phi_{ij} = (1 - \alpha^3) \phi_{ij}^w + \alpha^3 \phi_{ij}^h$ (l'exposant 3 est obtenu par analyse asymptotique du comportement de $\phi_{ij} - \varepsilon_{ij}$, voir Manceau [61]).

Le modèle actif en proche paroi pour ϕ_{ij}^w est choisi de manière à rester cohérent avec le modèle à relaxation elliptique. En posant $\phi_{ij}^w = k f_{ij}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi_{11}^w &= \frac{5}{2} \frac{\varepsilon}{k} \overline{v'^2}; \phi_{22}^w = -5 \frac{\varepsilon}{k} \overline{v'^2}; \phi_{33}^w = \frac{5}{2} \frac{\varepsilon}{k} \overline{v'^2} \\ \phi_{12}^w &= -5 \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'v'}; \phi_{13}^w = 0; \phi_{23}^w = -5 \frac{\varepsilon}{k} \overline{v'w'} \end{aligned}$$

En paroi, ϕ_{22}^w est exacte à l'instar de f_{22} . Cette condition assure la prise en compte de l'effet de blocage de la paroi sur la composante $\overline{v'^2}$. Toutes les autres sont arbitraires et ont été testées avec succès [29], [56] sur des cas de marche descendante ou encore de canal avec et sans thermique. On peut montrer que le terme ϕ_{ij}^w est obtenu par la relation générale suivante :

$$\phi_{ij}^w = -5 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{ik} n_j n_k + R_{jk} n_i n_k - \frac{1}{2} R_{kl} n_k n_l (n_i n_j + \delta_{ij}) \right)$$

où n_i sont les composantes du vecteur unitaire normal à la paroi. On peut utiliser le paramètre de blending α pour calculer la normale unitaire :

$$\underline{n} = \frac{\underline{\nabla} \alpha}{\|\underline{\nabla} \alpha\|}$$

Cette propriété de calcul de la normale à la paroi en utilisant le gradient de α rend ce modèle très attractif. Pour le terme de corrélation pression-déformation en zone quasi-homogène, on conserve le modèle SSG mais en imposant C'_1 nulle afin de conserver la linéarité du modèle à pondération elliptique :

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^h &= - \left(C_1 \varepsilon + C'_2 P_k \right) a_{ij} + \left(C_3 - C'_3 a_{kl} a_{kl} \right) k S_{ij} + C_4 k \left(a_{ik} S_{jk} + a_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) \\ &+ C_5 k \left(a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik} \right) - C_6 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \quad (1.19) \end{aligned}$$

CHAPITRE 1. BIBLIOGRAPHIE - MODÉLISATION RANS DE LA DYNAMIQUE DE L'ÉCOULEMENT

On remplace également la constante C_{ε_1} dans l'équation de la dissipation exposée plus haut par une constante variable C'_{ε_1} . Celle-ci permet de prendre en compte le pic de production de dissipation dans la zone tampon dû au terme P_{ε_3} (voir Eq. (1.9)). On trouve par exemple dans la littérature la forme suivante (voir par exemple Manceau [60]) :

$$C'_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1} \left(1 + A_1^k (1 - \alpha^3) \sqrt{\frac{k}{R_{ij} n_i n_j}} \right)$$

avec $A_1^k = 0,028$. Cette forme peut parfois poser problème. En effet, le ratio $\frac{k}{R_{ij} n_i n_j}$ tend vers l'infini à la paroi, ce qui peut créer des instabilités numériques dans des écoulements complexes. C'est pourquoi, on lui préférera une alternative utilisant le paramètre $\frac{P_k}{\varepsilon}$:

$$C'_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1} \left(1 + A_1^P (1 - \alpha^3) \frac{P_k}{\varepsilon} \right)$$

avec $A_1^P = 0,1$. Cette variante ne change pas le résultat final mais permet une meilleure stabilité numérique, par exemple avec cette modification, la simulation autour d'un cylindre fini n'explose plus. Cette version sera utilisée dans ce qui suit.

1.4 Récapitulatif du Modèle EB-RSM

Le modèle EB-RSM (Elliptic Blending-Reynolds Stress Model) utilisé par la suite est celui introduit en partie dans *Code_Saturne* par Y. Lecocq [56],[55]. Même si quelques modifications et améliorations pourront être apportées dans la présente thèse, en particulier lors du traitement des régimes de convection mixte et naturelle, le modèle EB-RSM qui servira par la suite utilise :

- la pondération elliptique pour le terme de corrélation pression-déformation et pour la dissipation,
- le modèle SSG, sans le terme non-linéaire du terme lent de corrélation pression-déformation, pour la modélisation du terme de redistribution loin de la paroi,
- le modèle de Daly-Harlow pour la diffusion turbulente des tensions de Reynolds et de la dissipation turbulente.

On donne ci-dessous les équations traduisant ces choix :

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1 \quad (1.20)$$

$$\text{avec } L = C_L \max \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \right).$$

1.1.4 Récapitulatif du Modèle EB-RSM

$$\phi_{ij} = (1 - \alpha^3) \phi_{ij}^w + \alpha^3 \phi_{ij}^h$$

avec :

$$\phi_{ij}^w = -5 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{ik} n_j n_k + R_{jk} n_i n_k - \frac{1}{2} R_{kl} n_k n_l (n_i n_j + \delta_{ij}) \right)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^h = & - \left(C_1 \varepsilon + C_2' P_k \right) a_{ij} + \left(C_3 - C_3' (a_{kl} a_{kl})^{0,5} \right) k S_{ij} \\ & + C_4 k \left(a_{ik} S_{jk} + a_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) + C_5 k (a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik}) \\ & - C_6 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \end{aligned}$$

$$\underline{n} = \frac{\underline{\nabla} \alpha}{\|\underline{\nabla} \alpha\|}$$

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \alpha^3) \varepsilon_{ij}^w + \alpha^3 \varepsilon_{ij}^h$$

avec,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^w &= \frac{R_{ij}}{k} \varepsilon \\ \varepsilon_{ij}^h &= \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \end{aligned}$$

L'échelle de temps caractéristique est utilisée dans l'équation de la dissipation et est en général égale à l'échelle de temps de la turbulence $\tau = \frac{k}{\varepsilon}$. Ce rapport tendant vers zéro à la paroi et du fait que l'on divise par cette échelle de temps, Durbin [24] propose de la borner par l'échelle de Kolmogorov $\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}$, on utilisera alors :

$$\tau = \max \left(\frac{k}{\varepsilon}, C_T \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right)$$

Les différentes constantes utilisées sont :

$$C_1 = 1,7; C_2' = 0,9; C_3 = 0,8; C_3' = 0,65; C_4 = 0,625; C_5 = 0,2;$$

$$C_6 = 0,55; C_L = 0,122; C_\eta = 80; C_T = 6;$$

CHAPITRE 1. BIBLIOGRAPHIE - MODÉLISATION RANS DE LA DYNAMIQUE DE L'ÉCOULEMENT

$$C'_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1} \left(1 + A_1^P (1 - \alpha^3) \frac{P}{\varepsilon} \right); C_{\varepsilon_1} = 1,44; A_1^P = 0,1;$$

La valeur de C_6 est une valeur classique, voir par exemple Hanjalić & Jakirlić [49].

Les conditions aux limites en paroi s'écrivent :

$$\overline{u_i} = 0; \overline{u'_i u'_i} = 0; \varepsilon = 2\nu \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{k}{y^2} \right); \alpha = 0.$$

Chapitre 2

Bibliographie - Modélisation RANS de la thermique fluide

Cette partie est consacrée à la modélisation de la thermique avec une approche RANS et aux différents modèles de fermeture pour les flux thermiques turbulents $\overline{u_i'\theta'}$ qui apparaissent dans l'équation de la température moyenne et dans les termes de flottabilité des tensions de Reynolds. On s'intéressera tout d'abord aux modèles dit « quasi-homogènes » à équations de transport puis en simplifiant cette équation, on retrouvera les modèles algébriques les plus couramment utilisés comme le SGDH (Simple Gradient Diffusion Hypothesis) et le GGDH (Generalized Gradient Diffusion Hypothesis) mais également à l'AFM (Algebraic Flux Model) qui est plus complet. Enfin on étudiera des modèles dit de « proche paroi », en commençant par un modèle basé sur une loi logarithmique appliquée à la thermique jusqu'à un modèle à équations de transport utilisant la pondération elliptique.

2.1 Équation de transport de la température

Dans un fluide supposé incompressible mais faiblement dilatable, l'équation de la conservation de l'énergie où la contribution d'énergie due à la dissipation visqueuse ainsi que les phénomènes de rayonnement sont négligés, s'écrit :

$$\rho C_p \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho C_p \frac{\partial \theta u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right) \quad (2.1)$$

où u_i , θ , ρ , λ et C_p sont respectivement la vitesse et la température instantanée, la masse volumique, la conductivité thermique et la chaleur spécifique à pression constante. On en-

tend par faiblement dilatable que la masse volumique peut varier avec une faible amplitude en fonction de la température et qu'elle est indépendante de la pression. Cette variation va permettre de prendre en compte le couplage entre la thermique et la dynamique. Il existe deux méthodes pour les coupler :

- la première s'appelle l'approximation de Boussinesq et consiste à faire varier ρ linéairement seulement dans les termes de flottabilité et de considérer constantes les autres propriétés physiques (μ , λ , C_p);
- la seconde est de considérer toutes les propriétés physiques variables. Dans ce cas, ρ varie dans toutes les équations et est choisie indépendante de la pression $\rho = \rho(\theta)$. Pour les trois autres propriétés, une possibilité est d'utiliser les lois de Sutherland [81].

En appliquant la décomposition de la température en la somme de sa moyenne statistique (moyenne de Reynolds) et de sa fluctuation, l'équation de transport de la température moyenne s'écrit pour un fluide incompressible faiblement dilatable (à noter que l'on néglige le terme source dû à la dissipation par la contrainte visqueuse) :

$$\rho C_p \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \rho C_p \frac{\partial \overline{\theta u_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} - \rho C_p \overline{u_j \theta'} \right)$$

Cette équation de transport ajoute 3 inconnues, les flux thermiques turbulents $\overline{u_j \theta'}$. Il existe plusieurs méthodes pour modéliser ces termes, soit avec une équation de transport, soit avec une expression algébrique. Cette dernière est la plus couramment utilisée. Ces deux approches sont présentées dans les deux sous-chapitres suivants. Les équations qui suivent utilisent l'approximation de Boussinesq car cette hypothèse est utilisée pour la majorité des cas étudiés ici.

2.2 Modélisation « quasi-homogène » des flux thermiques turbulents

Cette partie est consacrée à la modélisation des flux thermiques turbulents dite « classiques ». Les méthodes utilisant une équation de transport et celles utilisant les modèles algébriques vont être présentées.

2.2.1 Équations de transport des flux thermiques turbulents

L'équation de transport du vecteur de flux thermique turbulent moyenné est :

2.2.2 Modélisation « quasi-homogène » des flux thermiques turbulents

$$\begin{aligned}
 \frac{D\overline{u'_i\theta'}}{Dt} = & \underbrace{-\overline{u'_j\theta'}\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}}_{P_{i\theta}^U} \underbrace{-\overline{u'_i u'_j}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial x_j}}_{P_{i\theta}^T} \underbrace{-\beta g_i\overline{\theta'^2}}_{G_{i\theta}} \underbrace{-\frac{\overline{p'}\partial\theta'}{\rho\partial x_i}}_{\phi_{i\theta}} - \underbrace{(\kappa + \nu)\frac{\partial\theta'}{\partial x_j}\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}_{\varepsilon_{i\theta}} \\
 & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{\theta' u'_i u'_j}\right)}_{D_{i\theta}^t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\kappa\frac{\partial\theta'}{\partial x_j}u'_i + \nu\theta'\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)}_{D_{i\theta}^\nu} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\overline{\theta' p'}}{\rho}\delta_{ij}\right)}_{D_{i\theta}^p}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

On retrouve des termes de production dus au gradient de vitesse $P_{i\theta}^U$, au gradient de température $P_{i\theta}^T$ et à la flottabilité $G_{i\theta}$, de corrélation pression/gradient de température $\phi_{i\theta}$ (également appelé « terme de brouillage » ou « scrambling term » en anglais), de dissipation $\varepsilon_{i\theta}$, de diffusion turbulente $D_{i\theta}^t$, moléculaire $D_{i\theta}^\nu$ et par la pression $D_{i\theta}^p$. En résolvant cette équation, on peut à la fois alimenter l'équation de transport de la température moyenne et le terme G_{ij} dans les équations de transport des tensions de Reynolds. Il est évident que les termes de production sont exacts et n'ont pas besoin d'être modélisés. En revanche les termes de brouillages, de diffusion, de dissipation et de production par flottabilité nécessitent de l'être. Dans la suite, deux méthodes vont être exposées pour la modélisation des flux thermiques turbulents. La première consiste à les résoudre à l'aide d'équations de transport et la seconde à l'aide de modèles dits « algébriques », les plus classiques étant l'AFM, le GGDH et le SGDH définis ultérieurement.

Comme le terme de redistribution en dynamique, le terme de brouillage $\phi_{i\theta}$ est important à modéliser. Une analyse analogue à celle de Chou [16] pour le terme de redistribution donne pour le terme de brouillage :

$$\rho\phi_{i\theta} = \int \overline{-\nabla^2 p'(\underline{x}')\frac{\partial\theta'}{\partial x_k}(\underline{x})} \frac{dV(\underline{x}')}{4\pi\|\underline{x}-\underline{x}'\|}$$

En prenant $\|\underline{x}-\underline{x}'\| = \underline{r}$ et l'équation de p' (Eq. (1.5)) :

$$\begin{aligned}
 \phi_{i\theta} = & \underbrace{\int_V \frac{\partial^2 u'_k u'_l}{\partial x_k \partial x_l}(\underline{x}') \frac{\partial\theta'}{\partial x_i}(\underline{x}) \frac{dV(\underline{x}')}{4\pi\underline{r}}}_{\phi_{i\theta,1}} + \underbrace{\int_V 2\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial x_l}(\underline{x}') \frac{\partial u'_l}{\partial x_k}(\underline{x}') \frac{\partial\theta'}{\partial x_i}(\underline{x}) \frac{dV(\underline{x}')}{4\pi\underline{r}}}_{\phi_{i\theta,2}} \\
 & - \underbrace{\int_V g_l \frac{\partial\rho'}{\partial x_l}(\underline{x}') \frac{\partial\theta'}{\partial x_i}(\underline{x}) \frac{dV(\underline{x}')}{4\pi\underline{r}}}_{\phi_{i\theta,3}}
 \end{aligned}$$

On peut donc séparer le terme de brouillage $\phi_{i\theta}$ en trois termes :

CHAPITRE 2. BIBLIOGRAPHIE - MODÉLISATION RANS DE LA THERMIQUE FLUIDE

- le terme lent $\phi_{i\theta,1}$
- le terme rapide $\phi_{i\theta,2}$
- le terme de flottabilité $\phi_{i\theta,3}$.

Une méthode simple pour modéliser le terme lent $\phi_{i\theta,1}$ consiste à utiliser l'hypothèse similaire de retour linéaire à l'isotropie de Rotta [74], ce que fit Monin [66] :

$$\phi_{i\theta,1} = -C_{1\theta} \frac{1}{\tau} \overline{u_i' \theta'}$$

où $C_{1\theta} = 3$ et τ représente une échelle de temps. D'autres auteurs utilisent des valeurs différentes pour $C_{1\theta}$, par exemple Peeters et al. [70] préfèrent choisir 3.75 alors que Durbin [25] utilise 2.5. Le tableau 2.1 répertorie de façon non exhaustive des valeurs des constantes $C_{i\theta}$ choisies par quelques auteurs. Le choix de l'échelle de temps caractéristique n'est pas une évidence pour la convection thermique. Monin [66], comme la majorité des auteurs, utilise comme échelle de temps caractéristique l'échelle de temps dynamique $\tau = \tau_u = \frac{k}{\varepsilon}$ alors que Elghobashi et Launder [28] utilisent une échelle mixte ou composite $\tau = \sqrt{\tau_u \tau_\theta}$. Le choix de l'échelle sera discuté ultérieurement au paragraphe 3.4.

Pour le terme rapide $\phi_{i\theta,2}$, le modèle le plus largement utilisé est celui provenant de l'isotropisation de la production due au gradient de vitesse, Owen [69] :

$$\phi_{i\theta,2} = C_{2\theta} \overline{u_j' \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$

(pour des valeurs de $C_{2\theta}$ se référer au tableau 2.1).

Certains auteurs, comme Durbin [25], utilisent un terme provenant de l'isotropisation de la production due au gradient de température tel que :

$$\phi_{i\theta,2'} = C'_{2\theta} \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j}$$

(pour des valeurs de $C'_{2\theta}$ se référer au tableau 2.1).

Ce terme peut paraître logique comme le gradient de température intervient dans l'équation de transport des $\overline{u_i' \theta'}$, mais ce terme ne peut pas exister dans les équations des $\phi_{i\theta}^h$ (cf Launder [51]), car formellement, l'équation de transport de $\overline{u_i' \theta'}$ est obtenue à partir de :

$$\frac{D \overline{u_i' \theta'}}{Dt} = \overline{u_i' D \theta'} + \overline{\theta' D u_i'}$$

Or la fluctuation de la pression se trouve seulement dans l'équation de transport de u_i' et pas dans celle de θ' , cela implique que $C'_{2\theta} = 0$.

2.2.2 Modélisation « quasi-homogène » des flux thermiques turbulents

Pour le terme dû à la flottabilité $\phi_{i\theta,3}$, comme pour la dynamique, on utilise le plus souvent un modèle d'isotropisation de la production par flottabilité (Owen [69]) :

$$\phi_{i\theta,3} = C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2}$$

(pour les valeurs de $C_{3\theta}$ se référer au tableau 2.1).

En rassemblant ces termes, un modèle « linéaire » est obtenu :

$$\phi_{i\theta} = -C_{1\theta} \frac{1}{\tau} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} + C'_{2\theta} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} \quad (2.3)$$

Auteurs		$C_{1\theta}$	$C_{2\theta}$	$C_{3\theta}$	$C'_{2\theta}$
Launder	1975 [51]	3.2	0.5	0.5	/
Gibson & Launder	1978 [31]	3	0.33	0.33	/
Launder (Rodi's book)	1980 [73]	3.2	0.5	0.5	/
Launder	1988 [52]	3	0.4	0.33	/
Lai & So	1990 [47]	3	0.4	/	/
Peeters & Henkes	1992 [70]	3.75	0.5	0.5	0
Durbin	1993 [25]	2.5	0	/	0.45
Dol Hanjalić & Kenjereš	1997 [22]	3.75	0.5	0.5	/
Kenjereš	1998 [44]	5	0.4	0.4	0
Dol, Hanjalić & Versteegh	1999 [23]	3.75	0.5	0.5	/
Dol & Hanjalić	2001 [21]	3.75	0.5	0.5	/
Shin Choi	2005 [77]	2.5	0	/	0.45
Shin et al.	2008 [78]	3	0.4	0.33	0
Choi & Kim	2008 [15]	3.75	0.5	0.5	/

TAB. 2.1 – Etat de l'art non exhaustif des Coefficients de $\phi_{i\theta}$. Le « / » signifie que la valeur de la constante n'a pas été précisée dans l'article ou que le terme n'a pas été utilisé.

La contribution majeure à $\varepsilon_{i\theta}$ vient des plus petites échelles de tourbillons où les gradients de la fluctuation de la vitesse et de la fluctuation de la température sont les plus grands et celle-ci peut être négligée dans la zone homogène du fait de l'hypothèse d'isotropie de la turbulence et des fluctuations thermiques. Ainsi la dissipation $\varepsilon_{i\theta}$ peut être négligée : $\varepsilon_{i\theta} = 0$ car un vecteur isotrope est forcément nul.

Comme pour les tensions de Reynolds, un modèle de type Daly Harlow est adopté pour représenter les corrélations triples $\overline{u'_i u'_j \theta'}$ et la diffusion par la pression (Wyngaard et Coté

[90])

$$D_{i\theta}^t + D_{i\theta}^p = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\theta\tau} R_{km} \overline{\frac{\partial u_i' \theta'}{\partial x_m}} \right)$$

Par ailleurs, une valeur classique de la constante C_{θ} est 0,22 (voir par exemple Hanjalić [33]).

Contrairement à la modélisation des tensions de Reynolds, la diffusion moléculaire $D_{i\theta}^{\nu}$ nécessite d'être modélisée. Peeters et Henkes [70] proposent le modèle suivant :

$$D_{i\theta}^{\nu} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i' \theta'}}{\partial x_k^2} + (\kappa - \nu) \overline{u_i' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_k^2}} + (\kappa - \nu) \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}}$$

Le premier terme est dominant et les deux derniers ont besoin d'être réarrangés pour que le modèle soit utilisable. Peeters et Henkes [70] proposent de réarranger le modèle pour faire intervenir $\nu + \kappa$ au lieu de ν seul. Dol et al. [22] ont suivi ce raisonnement et recombina ce modèle en choisissant $\frac{\nu + \kappa}{2}$:

$$D_{i\theta}^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu + \kappa}{2} \overline{\frac{\partial u_i' \theta'}{\partial x_k}} \right) - \frac{1}{2} (\kappa - \nu) \overline{\theta \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k^2}} + \frac{1}{2} (\kappa - \nu) \overline{u_i' \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k^2}}$$

Les deux derniers termes sont négligeables en proche paroi car le premier à lui seul permet d'obtenir le bon comportement asymptotique à l'ordre 0. En retenant seulement le premier terme, le modèle de la diffusion moléculaire des flux devient :

$$D_{i\theta}^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu + \kappa}{2} \overline{\frac{\partial u_i' \theta'}{\partial x_k}} \right)$$

Ce modèle est le plus utilisé car simple à mettre en œuvre et a le mérite de redonner le terme exact quand $Pr = 1$.

2.2.2 Modèles algébriques des flux thermiques turbulents

Bien que modéliser les flux avec une équation de transport est la façon la plus appropriée pour représenter les mécanismes physiques conduisant aux flux thermiques turbulents, des modèles simplifiés sont utilisés dans l'industrie. Cette partie permet de rappeler comment sont obtenus les modèles algébriques standards : AFM, GGDH et SGDH.

2.2.2.1 Algebraic Flux Model (AFM)

Launder [51] propose une ébauche du modèle AFM (Algebraic Flux Model) qui prend en compte les trois termes de production de l'équation de $\overline{u_i' \theta'}$, puis Hanjalić et al. [33], [34] la

2.2.2 Modélisation « quasi-homogène » des flux thermiques turbulents

finalisent. Dol et al. [22] ont apporté le fondement théorique permettant de justifier l'utilisation de l'AFM. Les différentes étapes d'obtention de ce modèle sont reproduites ici. Pour plus de simplicité, on va considérer que les écarts de température sont faibles et donc appliquer une approximation de Boussinesq à l'équation de transport des flux thermiques. Pour rappel, cette hypothèse induit que les propriétés physique de l'écoulement sont considérées constantes sauf la masse volumique qui varie linéairement avec la température dans le terme de flottabilité : $\rho(\theta) = \rho_0(1 - \beta\Delta\theta)$ où $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ et $\rho(\theta_0) = \rho_0$.

L'équation (2.2) peut s'écrire symboliquement :

$$\frac{D\overline{u'_i\theta'}}{Dt} = P_{i\theta} + \phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} + \mathcal{D}_{i\theta} \quad (2.4)$$

où $P_{i\theta} = P_{i\theta}^U + P_{i\theta}^T + G_{i\theta}$ et $\mathcal{D}_{i\theta} = \mathcal{D}_{i\theta}^\nu + \mathcal{D}_{i\theta}^t$.

En suivant les travaux de Rodi [72] pour le tenseur d'anisotropie, on construit un vecteur adimensionné équivalent mais appliqué au flux thermiques turbulents :

$$\zeta_i = \frac{\overline{u'_i\theta'}}{\sqrt{k}\sqrt{\overline{\theta'^2}}} \quad (2.5)$$

On peut ensuite définir une équation de transport pour ζ_i :

$$\frac{D\zeta_i}{Dt} = \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{\overline{\theta'^2}}} \frac{D\overline{u'_i\theta'}}{Dt} - \frac{\overline{u'_i\theta'}}{2k^{3/2}\overline{\theta'^2}^{1/2}} \frac{Dk}{Dt} - \frac{\overline{u'_i\theta'}}{2k^{1/2}\overline{\theta'^2}^{3/2}} \frac{D\overline{\theta'^2}}{Dt} \quad (2.6)$$

En appliquant une hypothèse d'équilibre faible qui suppose que le vecteur flux thermique est constant le long d'une trajectoire, ce qui se traduit par $\frac{D\overline{u'_i\theta'}}{Dt} = 0$, puis une hypothèse d'équilibre entre les termes de diffusion des tensions de Reynolds et d'énergie cinétique turbulente, c'est-à-dire : $\frac{1}{\overline{u'_i u'_j}} \mathcal{D}_{u'_i u'_j} = \frac{1}{k} \mathcal{D}_k$, on obtient :

$$\frac{D\zeta_i}{Dt} = 0 \quad (2.7)$$

ce qui correspond à la relation :

$$\frac{1}{\overline{u'_i\theta'}} \frac{D\overline{u'_i\theta'}}{Dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \frac{Dk}{Dt} + \frac{1}{\overline{\theta'^2}} \frac{D\overline{\theta'^2}}{Dt} \right) \quad (2.8)$$

et pour les termes de diffusion :

$$\mathcal{D}_{i\theta} = \frac{1}{2} \overline{u'_i\theta'} \left(\frac{1}{k} \mathcal{D}_k + \frac{1}{\overline{\theta'^2}} \mathcal{D}_{\theta\theta} \right) \quad (2.9)$$

CHAPITRE 2. BIBLIOGRAPHIE - MODÉLISATION RANS DE LA THERMIQUE FLUIDE

ce qui donne pour l'équation de transport des flux thermiques turbulents :

$$P_{i\theta} + \mathcal{D}_{i\theta} + \phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} - \frac{\overline{u'_i \theta'}}{2k} (P_k + G_k + \mathcal{D}_k - \varepsilon) - \frac{\overline{u'_i \theta'}}{2\theta'^2} (P_{\theta\theta} + \mathcal{D}_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}) = 0$$

où $\mathcal{D}_{i\theta}$, \mathcal{D}_k et $\mathcal{D}_{\theta\theta}$ représentent respectivement la diffusion totale de $\overline{u'_i \theta'}$, k et θ'^2 ; $P_{i\theta}$, $P_k + G_k$ et $P_{\theta\theta}$ leurs termes de production et $\varepsilon_{i\theta}$, ε et $\varepsilon_{\theta\theta}$ leurs termes de dissipation.

En reprenant le modèle « linéaire » pour le terme de brouillage défini à l'équation (2.3), on a :

$$\phi_{i\theta} = -C_{1\theta} \frac{1}{\tau} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (2.10)$$

On a vu précédemment en 2.2.1 que la dissipation des flux thermiques $\varepsilon_{i\theta}$ peut être négligée. On obtient alors en appliquant cette hypothèse et en utilisant le modèle linéaire pour $\phi_{i\theta}^*$ dans l'équation (2.10) :

$$\overline{u'_i \theta'} = \frac{P_{i\theta}^T + (1 - C_{2\theta}) P_{i\theta}^U + (1 - C_{3\theta}) G_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}}{C_{1\theta} \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2k} (P_k + G_k - \varepsilon) + \frac{1}{2\theta'^2} (P_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta})} \quad (2.11)$$

Si les termes de production et de dissipation de k et θ'^2 sont supposés être localement égaux, i.e. , la turbulence est supposée être en équilibre,

$$P_k + G_k = \varepsilon \quad (2.12)$$

$$P_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta} \quad (2.13)$$

Cela mène à un modèle algébrique linéaire pour les flux thermiques turbulents, appelé modèle AFM pour Algebraic Flux Model.

$$\overline{u'_i \theta'} = -C_\theta \tau \left[\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} + \xi \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \eta \beta g_i \overline{\theta'^2} \right] \quad (2.14)$$

avec $C_\theta = C'_\theta / C_{1\theta}$; $\xi = 1 - C_{2\theta}$; $\eta = 1 - C_{3\theta}$. Des valeurs de $C_{1\theta}$, $C_{2\theta}$ et $C_{3\theta}$ son données dans le tableau 2.1

On peut remarquer que la constante C_θ utilise une constante de re-calibration C'_θ qui devrait être égale à 1 d'après l'équation 2.10. Du fait des hypothèses utilisées pour passer de l'équation de transport (2.2) au modèle AFM (2.14) (équilibre faible et équilibre de la turbulence dynamique et thermique), cette re-calibration est nécessaire pour s'assurer la bonne reproduction du flux normal en convection forcée. Si on utilise la valeur de $C_{1\theta} = 3$ tirée des

2.2.2 Modélisation « quasi-homogène » des flux thermiques turbulents

travaux de Launder [52], la valeur de C'_θ calibrée sur le cas du canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ est de 0,68. Dans la littérature, Hanjalić et al. [34] proposent : $C_\theta = 0,2$, soit $C'_\theta = 0,6$ et Kenjereš et al. [45] : $C_\theta = 0,15$, soit $C'_\theta = 0,45$.

Par ailleurs, Kenjereš et al. [45] proposent une évolution de l'AFM, le modèle NL-AFM (Non Linear-Algebraic Flux Model) dans lequel un terme additionnel complète la modélisation du terme lent de la corrélation température-gradient de pression :

$$\overline{u'_i \theta'} = -C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\zeta \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \xi \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \eta \beta g_i \bar{\theta}'^2 - \chi \frac{\varepsilon}{k} a_{ij} \overline{u'_j \theta'} \right]$$

avec $C_\theta = C'_\theta / C_{1\theta} = 0.15$; $\zeta = 1 - C'_{2\theta} = 0,6$; $\xi = 1 - C_{2\theta} = 0,6$; $\eta = 1 - C_{\theta 3} = 0,6$;
 $\chi = C'_{1\theta} / C_\theta = 1.5 / C_\theta$

Ces deux derniers modèles (AFM et NL-AFM) donnent de bons résultats en convection naturelle, mais restent des modèles haut Reynolds, par conséquent, ils ne tiennent pas compte de l'impact de la paroi sur la turbulence. A noter que l'on n'utilisera pas le modèle NL-AFM car il donne des résultats erronés, d'après Lecocq [55], en terme de comportement et de signe sur le cas du canal en convection mixte à $Re_\tau = 150$ (Kasagi & Nishimura [43]) avec des estimations *a priori*.

2.2.2.2 Generalized Gradient Diffusion Hypothesis (GGDH)

Bien que le modèle AFM semble une bonne alternative au modèle à équation de transport, il n'est pas utilisé dans les codes industriels. Une raison probable est qu'il nécessite de calculer la variance de la fluctuation de la température $\overline{\theta'^2}$. Le terme prépondérant dans l'AFM est celui qui représente la production due au gradient de température en régime de convection forcée. Si on supprime les termes de production dus au gradient de vitesse et de flottabilité, cela revient alors à utiliser un modèle de type Daly-Harlow [17] appliqué au flux thermique turbulent, c'est l'idée de Ince et Launder [40] (ou Shir [79]). On obtient ainsi le modèle GGDH (Generalized Gradient Diffusion Hypothesis) :

$$\overline{u'_i \theta'} = -C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \right)$$

avec $C_\theta = 0,3$

Le modèle GGDH présente de bons résultats en convection forcée (sans flottabilité) comme le montrent par exemple Thielen et al. [84], [83]. Choi & Kim [15] l'ont comparé à des modèles algébriques plus élaborés en convection naturelle et ont ainsi montré qu'il n'est pas du tout adapté à des écoulements qui présentent une forte stratification.

2.2.2.3 Simple Gradient Diffusion Hypothesis (SGDH)

Même si le modèle GGDH paraît simple à mettre en œuvre, il est encore très peu utilisé dans l'industrie. Une des principales raisons est qu'il nécessite la résolution des tensions de Reynolds, une autre raison est qu'il est rarement disponible dans les codes de CFD industriels. C'est pourquoi une modélisation plus ancienne lui est préférée, le modèle à gradient simple ou encore SGDH (Boussinesq [12]). Ce modèle utilise une hypothèse de diffusivité turbulente qui permet d'imiter le comportement d'un fluide de Fourier isotrope. Ce modèle s'écrit :

$$\overline{u'_i \theta'} = -\kappa_t \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \quad (2.15)$$

avec $\kappa_t = \frac{\nu_t}{\text{Pr}_t}$

Pr_t est le nombre de Prandtl turbulent et est généralement compris entre 0.9 et 1. Ce nombre représente une hypothèse selon laquelle la turbulence thermique mélange jusqu'à 10% de fois plus que la turbulence dynamique. La viscosité turbulente dépend du modèle de turbulence choisi, par exemple, pour un modèle de type $k-\varepsilon$:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

où $C_\mu = 0,09$.

Le défaut majeur de ce modèle est que, dans un canal plan, la composante longitudinale (dans le sens de l'écoulement) est nulle par définition contrairement aux modèles précédents. En régime de convection forcée, cela n'a pas d'importance mais en régime de convection mixte et naturelle, cette composante est importante car elle apparaît dans les termes de flottabilité des tensions de Reynolds et de la dissipation turbulente (voir annexe A).

2.2.3 Équation de transport de la variance de la température

Le calcul de la variance de la fluctuation de la température est nécessaire pour les modèles de type AFM ou à équation de transport quand les forces dues à la flottabilité existent. Son équation de transport s'écrit rigoureusement :

$$\frac{\partial \overline{\rho \theta'^2}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho u_j \theta'^2}}{\partial x_j} = \underbrace{-2 \overline{\rho u'_j \theta'}}_{P_{\theta\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \rho \kappa}_{D_{\theta\theta}^\nu} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} - \underbrace{\frac{\partial \overline{\rho \theta' \theta' u'_j}}{\partial x_j}}_{D_{\theta\theta}^t} - \underbrace{2 \rho \kappa \frac{\partial \theta'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}}_{\varepsilon_{\theta\theta}}$$

2.2.2 Modélisation « quasi-homogène » des flux thermiques turbulents

où $P_{\theta\theta}$, $D_{\theta\theta}^\nu$, $D_{\theta\theta}^t$ et $\varepsilon_{\theta\theta}$ sont respectivement les termes de production, de diffusion moléculaire, de diffusion turbulente et de dissipation de la variance de la fluctuation de la température. Les termes de production et de diffusion moléculaire sont exacts, seules la diffusion turbulente ainsi que la dissipation ont besoin d'être modélisées. Une hypothèse de gradient généralisé de type Daly Harlow [17] est la plus souvent utilisée, lorsque les tensions de Reynolds sont résolues, pour la diffusion turbulente $D_{\theta\theta}^t$. L'équation de transport de $\overline{\theta'^2}$ devient :

$$\frac{\partial \rho \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \overline{u_j \theta'^2})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\rho \kappa \delta_{kl} + C_{\theta\theta} \rho \overline{u'_k u'_l} \tau_u) \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_l} \right] + P_{\theta\theta} - \rho \varepsilon_{\theta\theta} \quad (2.16)$$

Il existe 2 méthodes pour la modélisation de $\varepsilon_{\theta\theta}$; soit *via* une équation de transport, soit *via* le ratio des échelles de temps thermique et dynamique R , tel que :

$$R = \frac{\tau_\theta}{\tau_u} = \frac{\overline{\theta'^2} \varepsilon}{\varepsilon_{\theta\theta} k}$$

ainsi,

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\overline{\theta'^2} \varepsilon}{R k} \quad (2.17)$$

L'équation de transport de $\varepsilon_{\theta\theta}$ est difficile à modéliser car elle comporte 2 fois plus de paramètres que celle de la dissipation ε , ce qui engendre une augmentation du risque d'erreur. De plus pour calibrer chaque terme, il faudrait les bilans de cette équation qui ne sont pas disponibles ou rares [44, 45]. Pour ces raisons, elle ne sera pas développée dans cette thèse et l'on se contentera de la modélisation précédente Eq. (2.17)

Pour des nombres de Péclet turbulents suffisamment élevés, loin des parois, supposer le ratio d'échelle de temps thermique/dynamique R constant est une pratique usuelle [33]. Pour des fluides ayant un nombre de Prandtl proche de l'unité, $R = 0.5$ est souvent adopté. En zone quasi-homogène, cette valeur est suffisante, même en convection naturelle (Kenjereš [44], Hanjalić [34]).

Les modèles présentés ci-dessus pour les flux thermiques turbulents $\overline{u'_i \theta'}$, pour la variance $\overline{\theta'^2}$ ainsi que pour le ratio d'échelle de temps R donnent de bons résultats loin de la paroi, ils restent cependant des modèles quasi-homogènes. Par conséquent, ils ne tiennent pas compte de l'impact de la paroi sur la turbulence. C'est pourquoi, dans la partie suivante, la modélisation en proche paroi des flux thermiques turbulents va être abordée.

2.3 Modélisation « en proche paroi » des flux thermiques turbulents

2.3.1 Loi logarithmique thermique

Comme pour la vitesse, le profil de la température moyenne $\bar{\theta}$ peut être décrit par une loi logarithmique pour les écoulements le long d'une paroi chauffée. Les premiers à l'avoir proposée d'après Lumley & Yaglom [58] sont Landau & Lifshitz en 1944 [48] et l'obtention par la méthode d'Izakson-Millikan de la loi de transfert thermique pour les écoulements turbulents de paroi a été effectuée par Kader et Yaglom [42].

Si un modèle à diffusivité turbulente de type SGDH est utilisé pour représenter les flux thermiques turbulents $\overline{u_i'\theta'}$, le flux total q (incluant les diffusion moléculaire et turbulente), est représenté dans un écoulement plan par :

$$\begin{aligned} q_y &= -\rho c_p \kappa \frac{d\bar{\theta}}{dy} - \rho c_p \overline{v'\theta'} \\ &= -\rho c_p (\kappa + \kappa_t) \frac{d\bar{\theta}}{dy} \end{aligned} \quad (2.18)$$

avec $\kappa_t = \frac{\nu_t}{Pr_t}$.

La conservation de l'énergie thermique donnée pour l'Eq. (2.18) avec $q_y = -q_w = cst$, peut être réécrite tel que :

$$1 = \left(\frac{\kappa}{\nu} + \frac{\kappa_t}{\nu_t} \right) \frac{d\bar{\theta}^+}{dy^+}$$

avec :

$$\bar{\theta}^+ = \frac{\bar{\theta} - \theta_w}{\theta_\tau}, \quad \theta_\tau = \frac{q_w}{\rho c_p u_\tau}, \quad y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

où θ_τ est l'équivalent de la vitesse de frottement u_τ pour la température.

En considérant $Pr \approx 1$ et $Pr_t \approx 1$, on peut s'attendre à ce que la diffusion thermique soit dominée par sa contribution moléculaire dans la couche limite ($\nu_t = 0$) et par sa contribution turbulente dans la zone homogène.

En suivant un raisonnement similaire à celui de la longueur de mélange (voir par exemple Prandtl [71]) mais pour la thermique, on peut obtenir une distribution de la température telle

2.2.3 Modélisation « en proche paroi » des flux thermiques turbulents

que :

$$\text{pour } 0 \leq y^+ < \Delta^+ : \quad \overline{\theta^+} = Pr \cdot y^+ \quad (2.19)$$

$$\text{et pour } \Delta^+ < y^+ : \quad \overline{\theta^+} = \frac{Pr_t}{K} \ln(y^+) + \beta_a \quad (2.20)$$

Δ^+ étant l'épaisseur adimensionnelle de la couche limite thermique. Lorsque $Pr \approx 1$, $\Delta^+ \approx \delta^+$ où δ^+ est l'épaisseur adimensionnelle de la couche limite dynamique.

Kader et Yaglom proposent [42] pour des $Pr \gtrsim 1$:

$$K = 0,41$$

$$Pr_t = 0,85$$

$$\beta_a = 12,5 \cdot Pr^{2/3} + \frac{Pr_t}{K} \cdot \ln(Pr) - 5,3 \quad (2.21)$$

Pour des modèles plus complets et plus récents, notamment ceux appelés tri-couches, on pourra se reporter à Arpaci & Larsen [75], Kader [41] ou encore Howard [39].

2.3.2 Modèle avec fonction d'amortissement

Pour modéliser la thermique en proche paroi, il existe des modèles bas-Reynolds qui se basent sur des fonctions d'amortissement à la paroi. La méthode consiste à résoudre les flux thermiques turbulents avec un modèle de type SGDh mais avec une diffusivité turbulente « améliorée ». Par exemple, Nagano et al. [50] proposent ce modèle :

$$\overline{u'_i \theta'} = -\kappa_t \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_i}$$

où κ_t est cette fois représentée par :

$$\kappa_t = C_\lambda f_\lambda k \tau_m$$

avec C_λ une constante et f_λ une fonction de y^+ , la distance adimensionnelle à la paroi basée sur la vitesse de frottement. τ_m est une échelle de temps mixte ou hybride entre l'échelle de temps thermique et dynamique, elle est fonction du ratio des échelles de temps thermomécanique R . On rappelle que

$$R = \frac{\tau_\theta}{\tau_u}$$

avec $\tau_u = \frac{k}{\varepsilon}$ et $\tau_\theta = \frac{k_\theta}{\varepsilon_\theta}$; $\left(k_\theta = \frac{\overline{\theta'^2}}{2} \right)$.

CHAPITRE 2. BIBLIOGRAPHIE - MODÉLISATION RANS DE LA THERMIQUE FLUIDE

Par exemple, si on considère le modèle de Abe-Kondoh-Nagano (1995) [2], C_λ , f_λ et τ_m sont donnés par :

$$C_\lambda = 0.1$$

$$f_\lambda = [1 - \exp(-y^+/A_\mu)] \cdot [1 - \exp(-y^+/A_\lambda)]$$

où $A_\mu = 14$ et $A_\lambda = \frac{A_\mu}{\sqrt{\text{Pr}}}$

$$\tau_m = \left(\frac{k}{\varepsilon}\right) \left\{ f_R + \left[\frac{3(2R)^{1/2}}{(R_t^{3/4} \text{Pr})} \right] f_d \right\}$$

telle que $f_R = \frac{2R}{0.5 + R}$, $f_d = \exp\left[\left(\frac{-R_t}{200}\right)^2\right]$ et $R_t = \frac{k^2}{\nu\varepsilon}$

Comme cela a été préconisé pour la modélisation de la dynamique de l'écoulement, on ne s'intéresse pas ici aux modèles qui utilisent la distance à la paroi et/ou des fonctions d'amortissement à cause de la difficulté de définir la notion de distance à la paroi dans une géométrie non-triviale. Pour remédier à ce problème, des modèles reprenant l'idée de la pondération elliptique ont été construits pour les flux thermiques turbulents.

2.3.3 Équation de transport avec pondération elliptique (EB-DFM)

Dans cette partie, les flux thermiques turbulents sont calculés à partir d'une équation de transport associée à la pondération elliptique (EB-DFM :Elliptic Blending-Differential Flux Model). Cette méthode va permettre comme en dynamique de passer d'un modèle valable à la paroi à un autre valable dans la zone homogène et inversement. On rappelle l'équation de transport des flux thermiques turbulents :

$$\frac{D\rho\overline{u'_i\theta'}}{Dt} = \rho (P_{i\theta} + G_{i\theta} + \phi_{i\theta}^* - \varepsilon_{i\theta} + D_{i\theta}^\nu + D_{i\theta}^t) \quad (2.22)$$

Dans cette équation, seuls les termes de production ($P_{i\theta}$ et $G_{i\theta}$) sont exacts, le terme de brouillage ($\phi_{i\theta}^*$), de dissipation ($\varepsilon_{i\theta}$) et des diffusions turbulente ($D_{i\theta}^t$) et moléculaire ($D_{i\theta}^\nu$) ont besoin d'être modélisés. On peut remarquer que comme en dynamique la diffusion par la pression $D_{i\theta}^p$ est inclus dans le terme de brouillage $\phi_{i\theta}^*$ pour les modèles de proche paroi. La pondération elliptique ne sera appliquée qu'au termes de brouillage et de dissipation.

2.2.3 Modélisation « en proche paroi » des flux thermiques turbulents

$$\phi_{i\theta}^* = (1 - \alpha^n) \phi_{i\theta}^w + \alpha^n \phi_{i\theta}^h \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = (1 - \alpha^n) \varepsilon_{i\theta}^w + \alpha^n \varepsilon_{i\theta}^h \quad (2.24)$$

où α est le coefficient de pondération de ϕ_{ij} et ε_{ij} .

Shin et al. [78] proposent les premiers un modèle à équation de transport utilisant la pondération elliptique pour les flux thermiques. Elle est appliquée originellement (voir [77]) comme pour la dynamique au terme de brouillage $\phi_{i\theta}^h$ et à la dissipation $\varepsilon_{i\theta}$ qui sont les termes dominant dans l'analyse asymptotique des différents termes à la paroi (voir tab. 3.1). Ces deux termes puits doivent être manipulés avec attention. Dans cette version finalisée ([78]), la pondération n'est appliquée qu'au terme de brouillage car ils estiment que le modèle de paroi pour la dissipation $\varepsilon_{i\theta}$, la représente suffisamment bien dans la zone quasi-homogène. Pour calibrer leur modèle, ils ont utilisé pour la dynamique le modèle EB-RSM de Thielen et al. [83] qui utilise $n = 2$ (voir annexe C) et pour la thermique, ils ont choisi le modèle homogène $\phi_{i\theta}^h$ classique de Launder [52] :

$$\phi_{i\theta}^h = -C_{1\theta} \frac{1}{\tau} \overline{u_i' \theta'} + C_{2\theta} \overline{u_j' \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (2.25)$$

avec les constantes et l'échelle de temps suivantes :

$$\tau = \frac{k}{\varepsilon}, \quad C_{1\theta} = 3 \quad C_{2\theta} = 0,4 \quad C_{3\theta} = 0,33 \quad (2.26)$$

Pour le modèle de proche paroi $\phi_{i\theta}^w$, ils choisissent :

$$\phi_{i\theta}^w = - \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \right] \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_k' \theta'} n_k n_i \quad (2.27)$$

Pour la dissipation $\varepsilon_{i\theta}$, ils prennent :

$$\varepsilon_{i\theta} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{1}{\tau} \overline{u_i' \theta'} \quad (2.28)$$

Ils ont aussi utilisé $n = 2$ pour la thermique. Si on additionne ces 2 termes, la valeur asymptotique correcte est retrouvée. En revanche, si on regarde individuellement chaque modèle, ils ne donnent pas la bonne valeur asymptotique. De plus généralement, la dissipation thermique est supposée nulle dans la zone homogène en lien avec l'isotropie de la turbulence, or avec ce modèle, la dissipation thermique ne l'est pas obligatoirement dans cette zone.

Pour le terme de diffusion turbulente, un modèle classique de Wyngaard & Coté [90] est utilisé :

$$D_{i\theta}^t = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\theta} \overline{u_k' u_l' \tau} \frac{\partial \overline{u_i' \theta'}}{\partial x_l} \right) \quad (2.29)$$

CHAPITRE 2. BIBLIOGRAPHIE - MODÉLISATION RANS DE LA THERMIQUE FLUIDE

et la diffusion moléculaire est représentée avec le modèle de Sikazono & Kasagi [76] :

$$D_{i\theta}^\nu = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\kappa + \nu}{2} \frac{\overline{\partial u_i' \theta'}}{\partial x_k} + n_i n_j \frac{\nu - \kappa}{6} \frac{\overline{\partial u_j' \theta'}}{\partial x_k} \right) \quad (2.30)$$

où les n_i sont calculés à partir du facteur de pondération α tel que : $\underline{n} = \frac{\nabla \alpha}{\|\alpha\|}$. Le ratio d'échelle thermo/mécanique R permettant de calculer ε_θ est ici supposé constant et égal à 0,625. Un changement important est à signaler au niveau de la constante C_6 qui concerne le terme de flottabilité du modèle de la corrélation vitesse/gradient de pression ϕ_{ij} , car elle est choisie égale à 1,5 au lieu d'une valeur traditionnellement choisie entre 0,5 et 0,6. Le fait qu'elle soit supérieure à 1 revient à changer le signe de la gravité dans le terme de flottabilité des tensions de Reynolds.

Ce modèle est évalué par rapport à des cas de DNS de canal tournant ou non à $Re_\tau = 150$ et 300 en régime de convection forcée à température imposée aux parois. Il est également comparé à des résultats LES dans un cylindre à base carré tournant ou non, toujours en régime de convection forcée. Il est ensuite analysé sur un cas de DNS de canal en régime de convection mixte. Lors de ces cas tests, il est comparé avec un modèle à équation de transport utilisant la relaxation elliptique ainsi qu'à un autre utilisant un modèle du groupe UMIST [52] & [53] qui contient un terme de correction du terme de brouillage dépendant de la distance à la paroi. Du fait de cette dépendance géométrique, ce type de modèle n'est pas détaillé dans cette thèse. Les résultats obtenus avec l'EB-DFM sont jugés satisfaisant par rapport aux données de DNS et LES employées. Ils sont du même ordre de grandeur que ceux utilisant le modèle à relaxation elliptique et meilleurs que ceux trouvés avec le modèle du groupe UMIST.

Choi & Kim [15] ont repris cette idée mais ont utilisé :

- la pondération elliptique pour $\phi_{i\theta}$ et $\varepsilon_{i\theta}$ où la dissipation thermique est négligée loin de la paroi, c'est-à-dire $\varepsilon_{i\theta}^h = 0$
- un autre modèle homogène pour $\phi_{i\theta}^h$, celui de Peeters & Henkes [70]

$$\phi_{i\theta}^h = -\frac{1}{\tau} C_{1\theta} \overline{u_i' \theta'} + C_{2\theta} \overline{u_j' \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (2.31)$$

avec les constantes et l'échelle de temps suivantes :

$$\tau = \frac{k}{\varepsilon}, \quad C_{1\theta} = 3.75 \quad C_{2\theta} = 0,5 \quad C_{3\theta} = 0,5 \quad (2.32)$$

- un modèle plus simple pour la diffusion moléculaire :

$$D_{i\theta}^\nu = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\kappa + \nu}{2} \delta_{kl} \frac{\overline{\partial u_i' \theta'}}{\partial x_l} \right) \quad (2.33)$$

2.2.3 Modélisation « en proche paroi » des flux thermiques turbulents

A noter que la dissipation de la variance de la fluctuation de la température (ε_θ) est calculée à l'aide du ratio d'échelle thermo/mécanique R . Ce ratio est ici supposé constant et égal à 0,5. Ce modèle a été testé en convection naturelle sur deux cavités différentiellement chauffées, celle de l'expérience de King [46] et Cheesewright et al. [14] ainsi que celle de Ampofo et al. [7]. Les résultats avec ce modèle EB-DFM sont comparés à ceux obtenus avec des modèles algébriques plus classiques tels que le GGDH et l'AFM ; ils sont jugés satisfaisants.

On remarquera que des modifications notables ont été effectuées pour la partie dynamique, lorsque les modèles AFM et EB-DFM sont utilisés. L'EB-RSM de Thielen et al. [83] a été remanié au niveau des constantes $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ de l'équation de la dissipation turbulente ε et au niveau de la constante de l'échelle de longueur de Kolmogorov C_η . La constante C_L qui est utilisée pour l'échelle de longueur, nécessaire au calcul du facteur de pondération α , est adaptée à chaque cas et à chaque modèle de thermique utilisé. Ainsi Choi et Kim [15] se sont servis de :

$$C'_{\varepsilon 1} = 1,44 \left(1 + 0,1 \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right) \text{ au lieu de } C'_{\varepsilon 1} = 1,44 \left(1 + 0,03(1 - \alpha^2) \sqrt{\frac{k}{u'_i u'_j n_i n_j}} \right) \quad (2.34)$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1,92 \text{ au lieu de } 1,83 \quad (2.35)$$

$$C_\eta = 50 \text{ au lieu de } 80 \quad (2.36)$$

$$C_L \text{ dépendant du cas et compris entre } 0,13 \text{ et } 0,18 \text{ au lieu de } 0,161 \quad (2.37)$$

Ces modifications, même si elles améliorent les résultats en convection naturelle, dégradent fortement ceux de convection forcée comme cela sera exposé dans le chapitre 3.

Chapitre 3

Développement de modèles pour les flux thermiques turbulents utilisant la pondération elliptique

3.1 Relaxation et pondération elliptique

A partir de l'équation totale des flux thermiques turbulents 2.2, le tableau 3.1 donnant les comportements asymptotiques à la paroi des différents termes du second membre peut se retrouver, y étant la distance à la paroi. On a considéré ici que la fluctuation de la température s'écrit $\theta' = d_1(x,z,t)y + \mathcal{O}(y^2)$ ($\theta' = 0$ à la paroi), ce qui est communément fait dans la littérature. A l'ordre dominant, le bilan en proche paroi du flux thermique normal à la paroi ($\overline{v'\theta'}$ ici) se réduit de la même manière que pour les tensions de Reynolds à un équilibre entre les termes de brouillage, de dissipation et de diffusion moléculaire $\phi_{2\theta}^* - \varepsilon_{2\theta} + D_{2\theta}^\nu = 0$.

Comme c'est le cas pour le terme de redistribution dans les équations de transport du tenseur

	$P_{i\theta}^U + P_{i\theta}^T$	$G_{i\theta}$	$\phi_{i\theta}^*$	$D_{i\theta}^\nu$	$-\varepsilon_{i\theta}$	$D_{i\theta}^t$
$\overline{u'\theta'}$	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y^3)$
$\overline{v'\theta'}$	$\mathcal{O}(y^4)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^4)$
$\overline{w'\theta'}$	$\mathcal{O}(y^3)$	$\mathcal{O}(y^2)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(y^3)$

TAB. 3.1 – Comportement asymptotique des termes de l'équation de bilan des flux thermiques turbulents (Shin et al., [78]).

3.3.1 Relaxation et pondération elliptique

de Reynolds, un modèle pour le terme de brouillage dans les équations de transport des flux thermiques turbulents peut être dérivé à partir d'une équation de Poisson de la pression fluctuante obtenue depuis l'équation de conservation de quantité de mouvement.

$$\nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_k} = -\rho \frac{\partial}{\partial x_k} \left(2 \frac{\overline{\partial u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} - \frac{\overline{\partial u'_i}}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} g'_l \frac{\partial \theta'}{\partial x_l} \right) \quad (3.1)$$

En utilisant la fonction de Green du domaine et en supposant que $\frac{\partial p'}{\partial x_k}$ respecte une condition à la limite de type Neumann (cf Manceau et al. [63]), une solution de Eq. (3.1) peut être obtenue dans sa forme intégrale

$$\frac{\partial p'}{\partial x_k}(\underline{x}) = \int \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_k}(\underline{x}') G(\underline{x}, \underline{x}') dV$$

Le terme de brouillage (corrélation en un point de la température et du gradient de pression) qui intervient dans l'équation de transport des flux thermiques turbulents est

$$\phi_{i\theta}^* = -\frac{1}{\rho} \overline{\theta' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \quad (3.2)$$

de telle sorte que

$$\rho \phi_{i\theta}^* = \int \Psi_{i\theta}(\underline{x}, \underline{x}') G(\underline{x}, \underline{x}') dV$$

où $\Psi_{i\theta}$ est la corrélation en deux points entre la température et le Laplacien du gradient de pression :

$$\Psi_{i\theta}(\underline{x}, \underline{x}') = \overline{-\theta'(\underline{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_k}(\underline{x}')}$$

De la même façon que ce qui fut proposé par Durbin [24] et justifié par Manceau et al. [63] pour la corrélation en deux points de la vitesse/gradient de pression, une décroissance exponentielle est supposée :

$$\Psi_{i\theta}(\underline{x}, \underline{x}') = \Psi_{i\theta}(\underline{x}', \underline{x}') e^{-\frac{r}{L_\theta}} \quad (3.3)$$

où $r = \|\underline{x} - \underline{x}'\|$, et l'échelle de longueur L_θ reste à être déterminée. En utilisant cette hypothèse, le terme de brouillage devient :

$$\rho \phi_{i\theta}^* = \frac{1}{4\pi} \int \Psi_{i\theta}(\underline{x}', \underline{x}') \frac{\exp(-r/L_\theta)}{r} dV$$

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT DE MODÈLES POUR LES FLUX THERMIQUES TURBULENTS UTILISANT LA PONDÉRATION ELLIPTIQUE

Puisque $\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-r/L_\theta)}{r}$ est la fonction de Green associée à l'opérateur $-\nabla^2 + \frac{1}{L_\theta^2} Id$, une équation de relaxation elliptique est obtenue pour $\phi_{i\theta}^*$

$$\phi_{i\theta}^* - L_\theta^2 \nabla^2 \phi_{i\theta}^* = -\frac{L_\theta^2}{\rho} \overline{\theta'(\underline{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_i}(\underline{x})}.$$

Dans un écoulement homogène, cette équation se réduit à :

$$\phi_{i\theta}^* = -\frac{L_\theta^2}{\rho} \overline{\theta'(\underline{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_i}(\underline{x})}.$$

Par conséquent, le second membre de l'équation peut être modélisé par n'importe quel modèle quasi-homogène $\phi_{i\theta}^h$, de telle sorte que la relaxation elliptique donne le comportement approprié à la paroi pour des modèles haut Reynolds standard

$$\phi_{i\theta}^* - L_\theta^2 \nabla^2 \phi_{i\theta}^* = \phi_{i\theta}^h. \quad (3.4)$$

Le raisonnement ci-dessus justifie l'utilisation de la relaxation elliptique pour les flux thermiques turbulents, comme proposé par Shin et al. [77] qui s'étaient basés sur une simple analogie avec les tensions de Reynolds. Au lieu de résoudre trois équations pour chaque composante des flux thermiques turbulent et en suivant l'idée de Manceau et Hanjalić [62], Shin et al. [77] ont étendu l'approche par pondération elliptique aux flux thermiques turbulent :

$$\phi_{i\theta}^* - \varepsilon_{i\theta} = (1 - \alpha_\theta^n) (\phi_{i\theta}^w - \varepsilon_{i\theta}^w) + \alpha_\theta^n (\phi_{i\theta}^h - \varepsilon_{i\theta}^h) . \quad (3.5)$$

où h désigne un modèle défini en zone homogène et w un modèle défini en proche paroi. Le paramètre α_θ , utilisé pour pondérer le modèle de proche paroi et celui loin de la paroi des flux thermiques turbulent, est obtenu à partir de l'équation de pondération elliptique

$$\alpha_\theta - L_\theta^2 \nabla^2 \alpha_\theta = 1 \quad (3.6)$$

avec $\alpha_\theta = 0$ à la paroi. Cette équation assure par ailleurs que $\alpha_\theta \rightarrow 1$ loin de la paroi. Shin et al. [77] ont supposé que la puissance n de α utilisée dans l'équation Eq. (3.5) était la même que celle de la dynamique, soit 2 dans leur cas. Ils ont également choisi que l'échelle de longueur L_θ était égale à l'échelle de longueur dynamique L utilisée dans Eq. (3.6), qui est, en suivant Durbin[24], représentée par :

$$L = C_L \max \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \right) \quad (3.7)$$

Prendre $n = 2$ et $L_\theta = L$ n'est pas trivial comme on le montrera par la suite. Dans ce qui suit, les constantes employées pour l'échelle de longueur seront telles que $C_L = 0.122$ et $C_\eta = 80$.

3.2 Modèle de « proche paroi » pour les termes de brouillage et de dissipation

Afin d'assurer le bon comportement asymptotique à la paroi de $\phi_{i\theta}^w - \varepsilon_{i\theta}^w$, Choi & Kim [15] ont utilisé les termes de proche paroi suivant :

$$\phi_{i\theta}^w = -\frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \quad (3.8)$$

et

$$\varepsilon_{i\theta}^w = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right) \quad (3.9)$$

alors que Shin et al. [78] ont choisi :

$$\phi_{i\theta}^w = - \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \right] \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^w = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i \theta'} \quad (3.11)$$

Afin de lever l'incertitude sur quel modèle asymptotique choisir, la méthode pour les obtenir est développée dans la suite :

Pour trouver la valeur asymptotique de $\varepsilon_{i\theta}^w$, la condition aux limites à la paroi de la dissipation ε est utilisée :

$$\varepsilon = \lim_{y \rightarrow 0} 2\nu \frac{k}{y^2}$$

De plus, les valeurs asymptotiques de u' , v' , w' et θ' sont utilisées, associées à leurs dérivés dans le cas où une condition de type Dirichlet ($\bar{\theta} = cste$ soit $d_0(x,z,t) = 0$) est imposée à la température :

$$u' = a_1(x,z,t)y + o(y^2) \implies \frac{\partial u'}{\partial y} = a_1(x,z,t) + o(y)$$

$$v' = b_2(x,z,t)y^2 + o(y^3) \implies \frac{\partial v'}{\partial y} = 2b_2(x,z,t)y + o(y^2)$$

$$w' = c_1(x,z,t)y + o(y^2) \implies \frac{\partial w'}{\partial y} = c_1(x,z,t) + o(y)$$

$$\theta' = d_1(x,z,t)y + o(y^2) \implies \frac{\partial \theta'}{\partial y} = d_1(x,z,t) + o(y)$$

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT DE MODÈLES POUR LES FLUX THERMIQUES TURBULENTS UTILISANT LA PONDÉRATION ELLIPTIQUE

On remplace dans l'équation suivante (en gardant le terme dominant) :

$$\varepsilon_{i\theta} = (\nu + \kappa) \frac{\overline{\partial u_i \partial \theta}}{\partial y \partial y}$$

ce qui donne pour $\overline{u'\theta'}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1\theta}^w &= (\nu + \kappa) \frac{\overline{a_1 d_1}}{\overline{u'\theta'}} \\ &= (\nu + \kappa) \frac{y^2}{2\nu k} \varepsilon_{\overline{u'\theta'}} \\ \varepsilon_{1\theta}^w &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon_{\overline{u'\theta'}}}{k} \end{aligned}$$

pour $\overline{v'\theta'}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2\theta}^w &= (\nu + \kappa) \frac{2\overline{b_2 d_1} y}{\overline{v'\theta'}} \\ &= 2(\nu + \kappa) \frac{y^2}{2\nu k} \varepsilon_{\overline{v'\theta'}} \\ \varepsilon_{2\theta}^w &= \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon_{\overline{v'\theta'}}}{k} \end{aligned}$$

et pour $\overline{w'\theta'}$ (la preuve est la même que celle de $\overline{u'\theta'}$) qui se retrouve de la même manière que $\overline{u'\theta'}$:

$$\varepsilon_{3\theta}^w = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon_{\overline{w'\theta'}}}{k}$$

La valeur asymptotique de $\varepsilon_{i\theta}^w$ correspond donc à l'équation Eq. (3.9).

Pour retrouver le modèle asymptotique du terme de brouillage $\phi_{i\theta}^w$, la valeur asymptotique de la diffusion moléculaire du modèle de Shikazono & Kasagi [76] (voir Eq. (2.30)) doit être calculée, car d'après le tableau 3.1,

$$\phi_{2\theta}^w = -D_{2\theta}^{\nu w} + \varepsilon_{2\theta}^w$$

Pour plus de simplicité, on va étendre cette égalité aux deux autres composantes comme Shin et al. [] l'ont fait, tel que :

$$\phi_{i\theta}^w = -D_{i\theta}^{\nu w} + \varepsilon_{i\theta}^w$$

3.3.2 Modèle de « proche paroi » pour les termes de brouillage et de dissipation

On calcule alors le comportement asymptotique de $D_{i\theta}^\nu$ à partir de l'équation suivante :

$$D_{i\theta}^{\nu w} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu + \kappa}{2} \frac{\overline{\partial u'_i \theta'}}{\partial y} + \frac{\nu - \kappa}{6} \frac{\overline{\partial u'_j \theta'}}{\partial y} n_i n_j \right)$$

ce qui donne pour $\overline{u' \theta'}$:

$$\begin{aligned} D_{1\theta}^{\nu w} &= (\nu + \kappa) \overline{a_1 d_1} \\ &= (\nu + \kappa) \frac{\overline{u' \theta'}}{y^2} \\ &= \frac{(\nu + \kappa)}{2\nu} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u' \theta'} \\ D_{1\theta}^{\nu w} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u' \theta'} \end{aligned}$$

de la même façon pour $\overline{w' \theta'}$:

$$\begin{aligned} D_{3\theta}^{\nu w} &= (\nu + \kappa) \overline{c_1 d_1} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon}{k} \overline{w' \theta'} \end{aligned}$$

et pour $\overline{v' \theta'}$:

$$\begin{aligned} D_{2\theta}^{\nu w} &= (4\nu + 2\kappa) \overline{b_2 d_1 y} \\ &= 2(2\nu + \kappa) \frac{\overline{v' \theta'}}{y^2} \\ &= 2 \frac{(2\nu + \kappa)}{2\nu} \frac{\varepsilon}{k} \overline{v' \theta'} \\ D_{2\theta}^{\nu w} &= \left(2 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon}{k} \overline{v' \theta'} \end{aligned}$$

En réarrangeant les termes, on obtient alors :

$$D_{i\theta}^{\nu w} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right) + \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \quad (3.12)$$

donc le terme de brouillage peut s'écrire à la paroi :

$$\begin{aligned} \phi_{i\theta}^w &= - \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right) + \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right] + \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right) \right] \\ &= - \overline{u'_j \theta'} \frac{\varepsilon}{k} n_i n_j \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ce modèle correspond donc à l'équation (3.8) et est celui utilisé par Choi & Kim [15]. C'est ce modèle de proche paroi que l'on prendra par la suite.

3.3 Facteur de pondération thermique α_θ

Les auteurs utilisant la pondération elliptique pour les flux thermiques turbulents ([77, 15, 78]) ont choisi un facteur de pondération thermique égal au facteur de pondération dynamique α . Pourtant rien ne justifie d'utiliser la même puissance ou encore la même échelle de longueur dans les équations (3.5) et (3.6).

3.3.1 Échelle de longueur

Habituellement une hypothèse forte est appliquée à la pondération elliptique utilisée en thermique et en particulier à l'échelle de longueur thermique L_θ qui est supposée égale à celle de la dynamique L . En fait, L_θ provient de l'approximation de la corrélation en deux points par une fonction exponentielle dans l'équation (3.3), or cette échelle de longueur de corrélation n'a aucune raison d'être la même pour la corrélation température-pression que pour la corrélation vitesse-pression.

Pour des nombres de Péclet turbulent élevés ($Pe_t = Re_t Pr$), les grandes échelles des fluctuations de la température sont simplement convectées, ce qui conduit à dire que L_θ peut être entièrement guidée par le champ de vitesse. Ainsi, supposer le rapport $\frac{L_\theta}{L}$ constant, est convenable mais cela n'implique pas que cette constante soit égale à un. Afin de couvrir un large éventail de régimes, il est habituel de supposer que l'échelle de temps utilisée pour les modèles des flux thermiques turbulent est une fonction de k , ε , k_θ et ε_θ , c'est-à-dire un hybride des échelles de temps mécanique et thermique (voir par exemple Abe et al. [2]). En étendant cette hypothèse à L_θ , une analyse dimensionnelle suivante peut être effectuée (voir Tennekes & Lumley [82] pour l'obtention de L) :

$$L_\theta = f(k, \varepsilon, k_\theta, \varepsilon_\theta)$$

soit 5 paramètres et 3 unités, on construit alors 2 nombres adimensionnels :

$$R_1 = \frac{L_\theta \varepsilon}{k^{3/2}} \text{ et } R_2 = R$$

On peut alors écrire :

$$R_1 = g(R_2) \tag{3.14}$$

Le calcul suivant va permettre d'estimer $g(R_2)$:

$$\text{Tout d'abord, pour la dynamique on a : } \varepsilon \approx u'^2 \frac{u'}{L} \approx \frac{u'^3}{L} \text{ avec } u' = \sqrt{\frac{2}{3}k}$$

3.3.3 Facteur de pondération thermique α_θ

$$\text{d'où, } L \approx \frac{u'^3}{\varepsilon} \approx \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$$

$$\text{et pour la thermique, } \varepsilon_\theta \approx \overline{\theta'^2} \frac{u'}{L_\theta}$$

$$\text{d'où, } L_\theta \approx \frac{\overline{\theta'^2} u'}{\varepsilon_\theta} \approx \frac{2k_\theta}{\varepsilon_\theta} \sqrt{\frac{2}{3}} k$$

$$\text{Alors, } L_\theta \approx 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \frac{k_\theta}{\varepsilon_\theta} \frac{\varepsilon}{k}$$

Cette analyse des ordres de grandeurs suggère que, afin de prendre en compte d'une manière simple les variations de R dans la région de proche paroi, l'équation 3.14 peut être approximée par une relation linéaire :

$$L_\theta = C'_L R L \quad (3.15)$$

De plus, comme mentionné précédemment, le ratio des échelles de temps thermique et mécanique est souvent supposé constant (loin de la paroi, il vaut par exemple 0,5) avec des nombres de Péclet turbulent élevés. Cette hypothèse implique un ratio des échelles de longueur L_θ/L constant, soit :

$$L_\theta = C''_L L \quad (3.16)$$

Plusieurs tests seront effectués afin de déterminer quelle approche adopter Eq. (3.15) ou Eq. (3.16).

3.3.2 Puissance de α_θ

La puissance du facteur de pondération peut se retrouver grâce au développement asymptotique des composantes de la vitesse, de la pression et de la température (y est la distance à

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT DE MODÈLES POUR LES FLUX THERMIQUES TURBULENTS UTILISANT LA PONDÉRATION ELLIPTIQUE

la paroi) :

$$\begin{aligned} u &= a_1(x,z,t)y + a_2(x,z,t)y^2 + \mathcal{O}(y^3) \\ v &= b_2(x,z,t)y^2 + b_3(x,z,t)y^3 + \mathcal{O}(y^4) \\ w &= c_1(x,z,t)y + c_2(x,z,t)y^2 + \mathcal{O}(y^3) \\ p &= p_0(x,z,t) + p_1(x,z,t)y + p_2(x,z,t)y^2 + \mathcal{O}(y^3) \\ \theta &= d_1(x,z,t)y + \mathcal{O}(y^2) \end{aligned}$$

A partir des équations de quantité de mouvement, on peut retrouver :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial x} &= 2\nu a_2 \\ \frac{\partial p_0}{\partial z} &= 2\nu c_2 \\ p_1 &= 2\nu b_2 \\ p_2 &= 3\nu b_3 \end{aligned}$$

Le facteur n peut être retrouvé grâce aux équations suivantes :

$$\phi_{i\theta} = (1 - \alpha_\theta^n) \phi_{i\theta}^w + \alpha_\theta^n \phi_{i\theta}^h \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = (1 - \alpha_\theta^n) \varepsilon_{i\theta}^w + \alpha_\theta^n \varepsilon_{i\theta}^h \quad (3.18)$$

Ainsi, si l'on soustrait ces 2 équations, on obtient après réarrangement :

$$\alpha_\theta^n = \frac{\phi_{2\theta}^w - \varepsilon_{2\theta} - (\phi_{2\theta}^w - \varepsilon_{2\theta}^w)}{\phi_{2\theta}^h - \varepsilon_{2\theta}^h - (\phi_{2\theta}^w - \varepsilon_{2\theta}^w)} \quad (3.19)$$

Il nous reste à définir chaque terme asymptotiquement. Les modèles de proche paroi ainsi que les modèles homogènes, des termes de dissipation et de brouillage des flux thermiques turbulents s'écrivent :

$$\phi_{i\theta}^w = -\overline{u_j' \theta'} \frac{\varepsilon}{k} n_i n_j \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^w = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i' \theta'} + \overline{u_j' \theta'} n_i n_j \right) \quad (3.21)$$

$$\phi_{i\theta}^h = -C_{1\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i' \theta'} + C_{2\theta} \overline{u_j' \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^h = 0 \quad (3.23)$$

3.3.3 Facteur de pondération thermique α_θ

Selon le tableau 3.1, le flux normal à la paroi est dominant. A partir de l'équation exacte, on obtient :

$$\begin{aligned}\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta} &= -\overline{\theta' \frac{\partial p'}{\partial y}} - (\kappa + \nu) \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial y} \frac{\partial v'}{\partial y}} \\ &= -\overline{d_1 y (6\nu b_3 y + 2\nu b_2)} - (\kappa + \nu) \overline{2b_2 d_1 y} \\ &= -6\nu \overline{b_3 d_1} y^2 - (2\kappa + 4\nu) \overline{b_2 d_1} y\end{aligned}\quad (3.24)$$

Pour les modèles de proche paroi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\phi_{2\theta}^w - \varepsilon_{2\theta}^w &= -\frac{\varepsilon}{k} \overline{v' \theta'} - \left(1 + \frac{1}{Pr}\right) \frac{\varepsilon}{k} \overline{v' \theta'} \\ &= -\left(2 + \frac{1}{Pr}\right) \frac{2\nu}{y^2} \overline{b_2 d_1} y^3 \\ &= -(4\nu + 2\kappa) \overline{b_2 d_1} y + \mathcal{O}(y^2)\end{aligned}\quad (3.25)$$

Et enfin pour les modèles homogènes :

$$\begin{aligned}\phi_{2\theta}^h - \varepsilon_{2\theta}^h &= -\frac{\varepsilon}{k} C_{1\theta} \overline{v' \theta'} - 0 \\ &= -\frac{2\nu}{y^2} C_{1\theta} \overline{b_2 d_1} y^3 \\ &= -2\nu C_{1\theta} \overline{b_2 d_1} y + \mathcal{O}(y^2)\end{aligned}\quad (3.26)$$

Maintenant que tous les termes sont définis, la puissance du facteur de pondération elliptique peut être retrouvée :

$$\alpha_\theta^n = \frac{\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta} - (\phi_{2\theta}^w - \varepsilon_{2\theta}^w)}{\phi_{2\theta}^h - \varepsilon_{2\theta}^h - (\phi_{2\theta}^w - \varepsilon_{2\theta}^w)}\quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}\alpha_\theta^n &= \frac{\mathcal{O}(y^2)}{-(4\nu - 2C_{1\theta}\nu + 2\kappa) \overline{b_2 d_1} y} \\ &= \mathcal{O}(y)\end{aligned}\quad (3.28)$$

Ainsi, α_θ^n est proportionnelle à Ay . La puissance du facteur de pondération thermique est donc $n = 1$.

La même raisonement est reproduit pour le terme longitudinal (idem pour $\phi_{3\theta}$) pour confirmer la puissance de ce terme. De la même manière, chaque terme est recalculé :

Les termes exacts donnent :

$$\begin{aligned}\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta} &= -\overline{\theta' \frac{\partial p'}{\partial x}} - (\kappa + \nu) \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial y} \frac{\partial u'}{\partial y}} \\ &= -2\nu a_2 \overline{d_1} y - (\kappa + \nu) \overline{a_1 d_1} y\end{aligned}\quad (3.29)$$

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT DE MODÈLES POUR LES FLUX THERMIQUES TURBULENTS UTILISANT LA PONDÉRATION ELLIPTIQUE

Le modèle de proche paroi tend vers :

$$\begin{aligned}\phi_{1\theta}^w - \varepsilon_{1\theta}^w &= 0 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon \overline{u'\theta'}}{k} \\ &= -(\nu + \kappa) \overline{a_1 d_1 y}\end{aligned}\quad (3.30)$$

Et enfin le modèle homogène donne :

$$\begin{aligned}\phi_{1\theta}^h - \varepsilon_{1\theta}^h &= -\frac{\varepsilon}{k} C_{1\theta} \overline{u'\theta'} + C_{2\theta} \overline{v'\theta'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - 0 \\ &= C_{2\theta} \overline{b_2 d_1} A_1 y^3 - 2\nu C_{1\theta} \overline{a_1 d_1}\end{aligned}\quad (3.31)$$

La puissance du facteur de pondération elliptique thermique peut être calculée :

$$\begin{aligned}\alpha_\theta^n &= \frac{\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta} - (\phi_{1\theta}^w - \varepsilon_{1\theta}^w)}{\phi_{1\theta}^h - \varepsilon_{1\theta}^h - (\phi_{1\theta}^w - \varepsilon_{1\theta}^w)} \\ &= \frac{-2\nu \overline{a_2 d_1 y}}{C_{2\theta} \overline{b_2 d_1} A_1 y^3 - 2\nu C_{1\theta} \overline{a_1 d_1}} \\ &= \mathcal{O}(y)\end{aligned}\quad (3.32)$$

Ce résultat confirme celui obtenu avec le flux normal. La puissance n de α_θ est donc égale à 1.

3.4 Échelle de temps thermique

Comme pour l'échelle de longueur thermique, une hypothèse d'égalité des échelles de temps thermique et dynamique est habituellement appliquée, ce qui au premier abord n'est pas une évidence. Si l'attention est portée sur les équations RANS de la dynamique et de la thermique au second ordre, l'échelle de temps thermique qui sera nommée par la suite τ_θ , est susceptible d'être utilisée dans seulement deux variables turbulentes, la dissipation ε et les flux thermiques $\overline{u'_i \theta'}$.

Dans l'équation de la dissipation ε , la modélisation du terme de production due à la flottabilité G_ε , fait intervenir une échelle de temps.

Le terme exact s'écrit :

$$G_\varepsilon = -2\nu\beta g_i \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \quad (3.33)$$

et il est habituellement modélisé de la même façon que la production P_ε , c'est-à-dire que la production par flottabilité de la dissipation est liée à la production par flottabilité de l'énergie

3.3.4 Échelle de temps thermique

cinétique turbulente *via* une échelle de temps caractéristique, soit :

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &= C_{\varepsilon 3} \frac{G_k}{\tau} \\ &= -C_{\varepsilon 3} \beta g_i \overline{u'_i \theta'} \frac{1}{\tau} \end{aligned} \quad (3.34)$$

où τ est habituellement pris égal à l'échelle de temps dynamique utilisée pour le modèle de la production dynamique de la dissipation P_ε . Or, rien ne justifie ce choix.

L'expression de G_ε Eq. (3.33) ressemble à un mixte des équations de la dissipation turbulente ε Eq. (3.35) et de la dissipation de la variance de la fluctuation de la température $\overline{\theta'^2}$ Eq. (3.36).

$$\varepsilon = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \quad (3.35)$$

$$\varepsilon_\theta = 2\kappa \overline{\frac{\partial \theta'}{\partial x_k} \frac{\partial \theta'}{\partial x_k}} \quad (3.36)$$

Si l'on approxime ces termes à l'aide de leurs échelles de Taylor respectives, leurs équations deviennent :

$$\varepsilon \approx 2\nu \frac{\overline{u'_i u'_i}}{\lambda^2} \quad (3.37)$$

$$\varepsilon_\theta \approx 2\kappa \frac{\overline{\theta'^2}}{\lambda_\theta^2} \quad (3.38)$$

De plus, on peut définir la corrélation en 2 points des flux thermiques turbulents à l'aide de leur échelle de Taylor :

$$\overline{u'_i(x) \theta'(x+r)} \simeq \overline{u'_i(x) \theta'(x)} \left(1 - \frac{r^2}{\lambda_{\frac{u'_i \theta'}}{2}} \right) \quad (3.39)$$

Cette échelle $\lambda_{\frac{u'_i \theta'}}^2$ dépend à la fois de l'échelle de la fluctuation de la vitesse u' et de l'échelle de la fluctuation de la température θ' . Si leur contribution est considérée comme étant la même dans l'échelle des flux thermiques, alors, il peut sembler raisonnable de supposer que l'échelle de Taylor de cette corrélation soit égale aux produits des échelles dynamique et thermique, ce qui donne :

$$\lambda_{\frac{u'_i \theta'}}^2 \approx \lambda \lambda_\theta \quad (3.40)$$

En appliquant cette hypothèse, la corrélation en deux points des flux thermiques turbulents devient :

$$\overline{u'_i(x) \theta'(x+r)} \simeq \overline{u'_i(x) \theta'(x)} \left(1 - \frac{r^2}{\lambda \lambda_\theta} \right) \quad (3.41)$$

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT DE MODÈLES POUR LES FLUX THERMIQUES TURBULENTS UTILISANT LA PONDÉRATION ELLIPTIQUE

De la même manière que ce qui a été fait pour la dissipation de k et celle de la variance de θ'^2 , la production de la dissipation de k due à la flottabilité G_ε , voir l'équation (3.33), peut alors s'écrire :

$$G_\varepsilon = 2\beta\nu g_i \frac{\overline{u'_i \theta'}}{\lambda \lambda_\theta} \quad (3.42)$$

où $\beta g_i \overline{u'_i \theta'}$ correspond à la production de k due à la flottabilité. L'équation devient :

$$G_\varepsilon = \frac{2\nu}{\lambda \lambda_\theta} G_k \quad (3.43)$$

En reprenant les expressions des échelles de Taylor dynamique et thermique,

$$\begin{aligned} \lambda^2 &\propto 2\nu \frac{k}{\varepsilon} \\ \lambda_\theta^2 &\propto 2\kappa \frac{\overline{\theta'^2}}{\varepsilon_\theta} \end{aligned}$$

le modèle de G_ε évolue en :

$$\begin{aligned} G_\varepsilon &\propto \frac{2\nu G_k}{\sqrt{2\nu} \sqrt{2\kappa} \sqrt{\tau \tau_\theta}} \\ &\propto \frac{\sqrt{Pr} G_k}{\sqrt{\tau \tau_\theta}} \end{aligned}$$

où τ et τ_θ correspondent respectivement aux échelles de temps dynamique et thermique. En utilisant le ratio des échelles de temps thermo-mécanique R , le modèle devient :

$$G_\varepsilon \propto \frac{\sqrt{Pr} G_k}{\sqrt{R} \tau} \quad (3.44)$$

On peut remarquer que si les échelles de temps sont considérées égales et que $Pr = 1$, le modèle usuel est retrouvé, $G_\varepsilon \propto \frac{G_k}{\tau}$. Cette modification du modèle peut donc être considérée comme une amélioration permettant de mieux prendre en compte les phénomènes de flottabilité dans l'équation de la dissipation ε .

3.5 Ratio des échelles de temps R

Comme présenté dans la partie 2.2.3, la résolution d'une équation de transport pour la variance de la fluctuation de la température $\overline{\theta'^2}$ (2.16) nécessite la résolution de sa dissipation $\varepsilon_{\theta\theta}$. Pour la modéliser, la méthode utilisant le ratio des échelles de temps R est utilisée :

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\overline{\theta'^2}}{R} \frac{\varepsilon}{k}$$

3.3.5 Ratio des échelles de temps R

Comme exposé au paragraphe 2.2.3, ce ratio est souvent pris constant et égal à 0,5. Cette valeur n'est valable qu'en zone quasi-homogène. Cependant proche de la paroi, en considérant les comportements asymptotiques de ε Eq. (3.35) et $\varepsilon_{\theta\theta}$ Eq. (3.36) :

$$\varepsilon = \frac{2\nu k}{y^2} \text{ et } \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{2\kappa \overline{\theta'^2}}{y^2}$$

on obtient,

$$\begin{aligned} R &= \frac{\overline{\theta'^2} \varepsilon}{\varepsilon_{\theta\theta} k} \\ &= \frac{y^2 2\nu}{2\kappa y^2} \\ &= Pr \end{aligned}$$

donc R tend vers le nombre de Prandtl à la paroi.

De plus l'équation de la variance (2.16) où R intervient pour la modélisation de $\varepsilon_{\theta\theta}$ peut se réécrire :

$$\frac{D\overline{\theta'^2}}{Dt} = P_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta} + D_{\theta\theta}^{\kappa} + D_{\theta\theta}^t$$

Si on s'intéresse au développement asymptotique de cette équation, à l'ordre dominant, elle se réduit à :

$$0 = -\varepsilon_{\theta\theta} + D_{\theta\theta}^{\kappa}$$

soit,

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \kappa \frac{\partial^2 \overline{\theta'^2}}{\partial y^2}$$

donc lorsque $y \rightarrow 0$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = 2\kappa \frac{\overline{\theta'^2}}{y^2} \tag{3.45}$$

Si on utilise le modèle faisant intervenir R pour $\varepsilon_{\theta\theta}$, on a :

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\overline{\theta'^2} \varepsilon}{R k}$$

en utilisant $\lim_{y \rightarrow 0} \varepsilon = 2 \frac{\nu k}{y^2}$:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\overline{\theta'^2} 2\nu}{R y^2} \tag{3.46}$$

Donc R doit être choisi égal à Pr à la paroi pour que le modèle $\varepsilon_{\theta\theta}$ ait le même comportement asymptotique que sa valeur exacte (ceci s'obtient en assurant (3.45)=(3.46)). De

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT DE MODÈLES POUR LES FLUX THERMIQUES TURBULENTS UTILISANT LA PONDÉRATION ELLIPTIQUE

manière à prendre en compte cette limite à la paroi tout en tendant vers une valeur classique loin de celle-ci que l'on nommera R^h et en restant dans le cadre de la pondération elliptique, R peut être modélisé par :

$$R = \alpha_\theta R^h + (1 - \alpha_\theta) Pr \quad (3.47)$$

Une valeur communément prise loin de la paroi pour des fluides ayant un Pr proche de 1 est $R^h = 0,5$ (voir par exemple Hanjalić [33]). La puissance de α_θ est choisie égale à celle utilisée pour des flux thermiques turbulents. Ce modèle respecte ainsi le comportement asymptotique de la variance $\overline{\theta'^2}$.

3.6 Équations de transport (modèle EB-DFM)

La pondération elliptique étant justifiée au début du chapitre 3.1, un modèle à équation de transport des flux thermiques turbulents peut être construit. Un modèle linéaire classique est utilisé pour la partie homogène du terme de brouillage :

$$\phi_{i\theta}^h = -\frac{1}{\tau} C_{1\theta} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (3.48)$$

avec $C_{1\theta}$, $C_{2\theta}$ et $C_{3\theta}$, les constantes du modèle, qui seront calibrées ultérieurement. τ représente l'échelle de temps du modèle. Précédemment, on a vu que cette échelle de temps était mixte pour le terme de flottabilité dans l'équation de la dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Afin d'être cohérent, une échelle mixte sera choisie dans la suite de la thèse pour les flux thermiques turbulents. De manière à retrouver le modèle classique en zone homogène, cette échelle sera divisée par la valeur homogène du ratio des échelle de temps thermo-mécanique R^h . Ce terme vaut Pr à la paroi, et environ 0,5 loin de la paroi lorsque $Pr \approx 1$ (voir paragraphe 3.5). Le modèle linéaire devient ainsi :

$$\phi_{i\theta}^h = -\frac{\sqrt{R^h}}{\sqrt{\tau \tau_\theta}} C_{1\theta} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (3.49)$$

Pour ce qui concerne la dissipation, comme il a été vu au paragraphe 2.2.1, elle est considérée nulle dans la zone homogène du fait de l'hypothèse d'isotropie des flux thermiques turbulents :

$$\varepsilon_{i\theta}^h = 0 \quad (3.50)$$

Les modèles asymptotiques pour la dissipation des flux et le terme de brouillage ont été retrouvés précédemment (§ 3.2). De la même façon que pour le modèle homogène, une

3.3.7 Modèles Algébriques (EB-AFM et EB-GGDH)

échelle de temps mixte est appliquée aux modèles. On obtient alors :

$$\phi_{i\theta}^w = -\frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{\tau\tau_\theta}} \overline{u_j'\theta'} n_i n_j \quad (3.51)$$

et

$$\varepsilon_{i\theta}^w = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{\tau\tau_\theta}} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr}\right) \left(\overline{u_i'\theta'} + \overline{u_j'\theta'} n_i n_j\right) \quad (3.52)$$

En appliquant la pondération elliptique aux termes de brouillage $\phi_{i\theta}$ et de dissipation $\varepsilon_{i\theta}$, les modèles donnent :

$$\phi_{i\theta} = (1 - \alpha_\theta) \phi_{i\theta}^w + \alpha_\theta \phi_{i\theta}^h \quad (3.53)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = (1 - \alpha_\theta) \varepsilon_{i\theta}^w + \alpha_\theta \varepsilon_{i\theta}^h \quad (3.54)$$

3.7 Modèles Algébriques (EB-AFM et EB-GGDH)

De la même manière que ce qui a été fait au chapitre 2.2.2.1 pour le modèle AFM à partir du modèle homogène DFM, un modèle algébrique que l'on nommera dans la suite EB-AFM (Elliptic Blending-Algebraic Flux Model) peut être dérivé du modèle de transport des flux thermiques turbulents utilisant la pondération elliptique (EB-DFM). En appliquant une hypothèse d'équilibre faible au flux thermiques turbulents (voir par exemple pour plus de détails Hanjalić [33]), la convection peut s'écrire :

$$\frac{D\overline{u_i'\theta'}}{Dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} \frac{Dk}{Dt} + \frac{1}{\theta'^2} \frac{D\theta'^2}{Dt} \right) \overline{u_i'\theta'} \quad (3.55)$$

et la diffusion :

$$\mathcal{D}_{i\theta} = \frac{1}{2} \overline{u_i'\theta'} \left(\frac{1}{k} \mathcal{D}_k + \frac{1}{\theta'^2} \mathcal{D}_{\theta\theta} \right) \quad (3.56)$$

où $\mathcal{D}_{i\theta}$, \mathcal{D}_k et $\mathcal{D}_{\theta\theta}$ sont respectivement les diffusions de $\overline{u_i'\theta'}$, k et θ'^2 . L'équation des flux thermiques turbulents devient alors en utilisant les modèles Eq. (3.53) et Eq. (3.54) pour $\phi_{i\theta}$ et $\varepsilon_{i\theta}$ respectivement :

CHAPITRE 3. DÉVELOPPEMENT DE MODÈLES POUR LES FLUX THERMIQUES TURBULENTS UTILISANT LA PONDÉRATION ELLIPTIQUE

$$\begin{aligned}
& P_{i\theta}^U + P_{i\theta}^T + G_{i\theta} - \frac{\overline{u_i'\theta'}}{2k} (P_k + G_k) - \frac{\overline{u_i'\theta'}}{2\theta'^2} P_{\theta\theta} \\
& - (1 - \alpha_\theta) \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_j'\theta'} n_i n_j - \alpha_\theta C_{1\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i'\theta'} + \alpha_\theta C_{1\theta} C'_{1\theta} \frac{\varepsilon}{k} a_{ij} \overline{u_j'\theta} - \alpha_\theta C_{2\theta} P_{i\theta}^U - \alpha_\theta C'_{2\theta} P_{i\theta}^T \\
& - \alpha_\theta C_{\theta 3} G_i - (1 - \alpha_\theta) C_\varepsilon \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i'\theta'} + \overline{u_j'\theta'} n_i n_j \right) - \alpha_\theta \varepsilon_{i\theta}^h + \overline{u_i'\theta'} \left(\frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{2\theta'^2} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

ou encore,

$$\overline{u_i'\theta'} = \frac{\xi P_{i\theta}^U + \zeta P_{i\theta}^T + \eta G_{i\theta} - \gamma \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_j'\theta'} n_i n_j - \alpha_\theta \varepsilon_{i\theta}^h}{\left[\frac{\varepsilon}{k} \alpha_\theta C_{1\theta} + (1 - \alpha_\theta) C_\varepsilon \right] \frac{\varepsilon}{k} + \frac{1}{2k} (P_k + G_k - \varepsilon) + \frac{1}{2\theta'^2} (P_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta})} \tag{3.58}$$

Ainsi si l'hypothèse locale d'équilibre entre la production et la dissipation de k et θ'^2 est appliquée (Eq. (2.12) et (2.13)), le modèle algébrique devient :

$$\overline{u_i'\theta'} = \frac{\xi P_{i\theta}^U + \zeta P_{i\theta}^T + \eta G_{i\theta} - \gamma \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_j'\theta'} n_i n_j - \alpha_\theta \varepsilon_{i\theta}^h}{\left[\frac{\varepsilon}{k} \alpha_\theta C_{1\theta} + (1 - \alpha_\theta) C_\varepsilon \right] \frac{\varepsilon}{k}} \tag{3.59}$$

où $\xi = (1 - \alpha_\theta C_{2\theta})$, $\zeta = (1 - \alpha_\theta C'_{2\theta})$, $\eta = (1 - \alpha_\theta C_{\theta 3})$, $\gamma = (1 - \alpha_\theta) (1 + C_\varepsilon)$, $C_\varepsilon = \frac{1}{2} (1 + 1/Pr)$. En supposant de plus que $\varepsilon_{i\theta}^h = 0$, cette équation se réduit à :

$$\overline{u_i'\theta'} = -C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\zeta \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} + \xi \overline{u_j'\theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \eta \beta g_i \overline{\theta'^2} + \gamma \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_j'\theta'} n_i n_j \right] \tag{3.60}$$

avec,

$$C_\theta = \frac{\sqrt{R} C'_{\theta}}{\alpha_\theta C_{1\theta} \sqrt{R^h} + (1 - \alpha_\theta) \sqrt{Pr} C_\varepsilon}. \tag{3.61}$$

Ce modèle diffère du modèle AFM Eq. (2.14) seulement par le terme additionnel $\gamma \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_j'\theta'} n_i n_j$, qui rend le modèle sensible à l'orientation de la paroi, et, surtout par le fait que les coefficients ξ , ζ , χ , η et C_θ sont à présent dépendants du facteur de pondération α_θ . Dans la zone homogène (i.e. loin de la paroi où $\alpha_\theta \rightarrow 1$), il est facile de remarquer que l'influence de la pondération elliptique disparaît et que le modèle AFM Eq. (2.14) est retrouvé. De plus, ce modèle peut être simplifié en utilisant $\zeta = 1$ et $\xi = \eta = 0$, ce qui amène à un modèle proche du GGDH mais bénéficiant de la pondération elliptique. Ce modèle sera nommé EB-GGDH :

$$\overline{u_i'\theta'} = -C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} + \gamma \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_j'\theta'} n_i n_j \right). \tag{3.62}$$

Les constantes du modèle seront déterminées dans la suite à l'aide des tests *a priori*.

3.8 Conclusions de ces développements

Ce chapitre a permis de définir la pondération elliptique appliquée aux flux thermiques turbulents. Il a été spécifié quelles échelles de temps et de longueur devaient être utilisées avec cette pondération elliptique et avec le modèle à équations de transport de la dissipation turbulente. De plus, un modèle à équations de transport utilisant la pondération elliptique y a été développé, puis des modèles algébriques en ont été déduits. Les prochains chapitres vont permettre de confronter ces modèles à des modèles plus classiques tels que les modèles algébriques GGDH et AFM. Cependant, des développements restent encore à être effectués car tous les développements asymptotiques pour les flux thermiques turbulents ont été trouvés précédemment à partir d'une condition à la limite de type Dirichlet. Si une condition à la limite de type Neumann est appliquée pour la température à l'équation de transport des $\overline{u_i'\theta'}$ (Eq 3.1), le bilan asymptotique des flux thermiques turbulents est modifié, en particulier en régime de convection naturelle.

Une première réponse est apportée en annexe B mais des investigations supplémentaires sont nécessaires.

Chapitre 4

Tests *a priori*

Dans cette partie, nous allons vérifier le comportement des différents modèles pour les termes $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$ et les flux thermiques turbulents $\overline{u_i'\theta'}$ issus des modèles algébriques sur des cas d'écoulement en canal 1D dans les 3 régimes de convection thermique (forcée, naturelle et mixte) pour lesquels des données de DNS sont disponibles. Le premier cas étudié est celui de Abe et al. [1] en convection forcée avec $Re_\tau = 640$, le second cas est celui de Kasagi & Nishimura [43] en convection mixte avec $Re_\tau = 150$ et $Ra = 6,82 \cdot 10^5$ et enfin le dernier cas est celui de Versteegh & Nieuwstadt [89] avec $Ra = 5 \cdot 10^6$. Toutes les simulations directes utilisent une hypothèse de Boussinesq (la masse volumique n'est considérée variable que dans le terme de gravité et les termes de production par gravité).

4.1 Présentation des DNS utilisées

4.1.1 Régime de convection Forcée

Le cas de convection forcée est celui de Abe et al. [1], la thermique y intervient de façon passive (elle ne joue pas sur la dynamique de l'écoulement et en particulier les termes de production par flottabilité sont nuls). L'écoulement s'effectue entre 2 plaques planes supposées infinies séparées d'une distance 2δ et est mû par un gradient de pression suivant la direction x . Un flux thermique pariétal constant \dot{q}_w est imposé (voir Fig 4.1). De plus, la fluctuation de la température θ' est imposée égale à 0 à la paroi ce qui en fait un cas d'« école » non réalisable expérimentalement. La température est traitée comme un scalaire passif. L'écoulement est alors paramétré à partir du nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = 640$ et du nombre de Prandtl. On dispose de données pour deux nombres de Prandtl, seul le cas à $Pr = 0,71$

sera étudié car dans la suite seuls des cas à ce nombre de Prandtl seront présentés. Le cas à $Pr = 0,025$ est étudié en annexe D . On note respectivement u, v, w et θ les composantes de la vitesse dans le sens de l'écoulement, dans la direction normale à la paroi, suivant z (direction transverse) et la température. Les moyennes seront notées « $\bar{\cdot}$ » et les variables fluctuantes « \cdot' ».

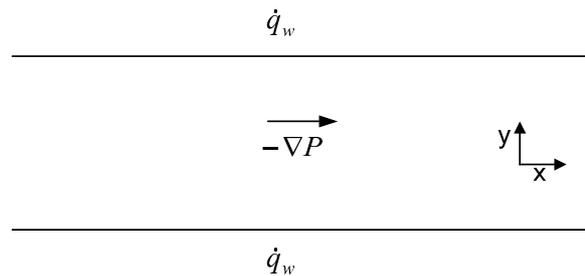


FIG. 4.1 – Schéma du canal en convection forcée de Abe et al. [1].

4.1.2 Régime de convection mixte

Le cas de convection mixte est celui de Kasagi & Nishimura [43]. La thermique n'y intervient plus de façon passive mais joue un rôle sur la dynamique de l'écoulement. Cette fois les termes de production par flottabilité ne sont plus nuls. L'écoulement s'effectue entre 2 plaques planes infinies verticales séparées d'une distance 2δ . Une différence de température constante ($\Delta\theta = \theta_h - \theta_c > 0$) est appliquée entre les 2 plaques (voir figure 4.2). L'écoulement est mû par un gradient de pression suivant la direction x et par les forces de flottabilité avec la gravité orientée dans le sens inverse de l'écoulement. L'écoulement est paramétré à partir du nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = 150$, du nombre de Prandtl $Pr = 0,71$ et du nombre de Rayleigh $Ra = 6,82 \cdot 10^5$. Le demi-canal du côté de la paroi chaude est désigné par côté « aidé » car la force de flottabilité est dans le même sens que la force due au gradient de pression. A l'inverse, le demi-canal du côté de la paroi froide est appelé côté « adverse ».

Remarque : Une erreur s'est introduite dans les résultats de la DNS. Il faut changer la plupart des signes de la base de données, c'est à dire $\overline{v'\theta'}$ en $-\overline{v'\theta'}$ et $\overline{u'\theta'}$ en $-\overline{u'\theta'}$ ainsi que tous les termes des bilans des $\overline{u_i'\theta'}$ sauf pour le terme de production par gravité dans $\overline{u'\theta'}$ qui a sans doute été changé préalablement lui-aussi.

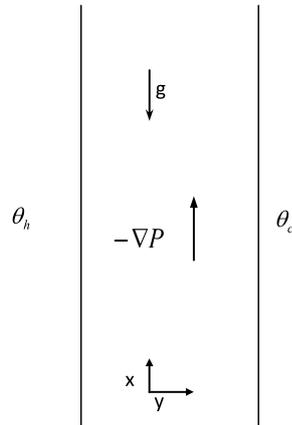


FIG. 4.2 – Schéma du canal en convection mixte, Kasagi & Nishimura [43].

4.1.3 Régime de convection naturelle

Le cas de convection naturelle est celui de Versteegh & Nieuwstadt [89], la thermique y intervient de façon active et joue un rôle moteur sur la dynamique de l'écoulement. Ainsi les termes de production par flottabilité ne sont pas négligeables. L'écoulement s'effectue entre 2 plaques planes infinies verticales séparées d'une distance δ . L'écoulement est mû par les forces de gravité résultant d'une différence de température constante ($\Delta\theta = \theta_h - \theta_c > 0$) entre les parois. L'écoulement est paramétré à partir du nombre de Prandtl $Pr = 0,71$ et du nombre de Rayleigh $Ra = 5.10^6$. La vitesse moyenne et la température moyenne sont antisymétriques.

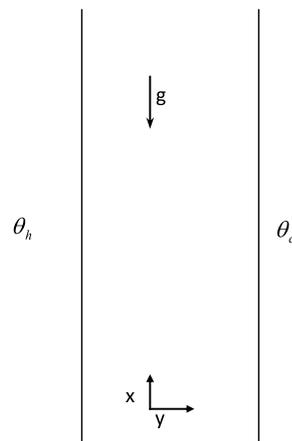


FIG. 4.3 – Schéma du canal en convection naturelle, Versteegh & Nieuwstadt [89].

4.2 Échelle de longueur thermique L_θ

Il a été proposé au paragraphe 3.3.1 que l'échelle de longueur thermique soit proportionnelle à l'échelle de longueur dynamique. La relation entre ces deux échelles est rappelée ici :

$$\frac{L_\theta}{L} = C'_L R \approx C''_L \quad (4.1)$$

Rien ne justifiant que ce rapport soit égal à 1, sa valeur sera discutée et choisie dans la suite.

4.2.1 Ratio des échelles thermo-mécanique R

D'après l'équation (4.1), le rapport $\frac{L_\theta}{L}$ est égal à une fonction faisant intervenir le ratio des échelles de temps thermique et dynamique R . La base de données de Abe et al. [1] dispose de ce ratio, les deux autres bases disposent des variables nécessaire au calcul de R (k , ε , θ'^2 et ε_θ).

Ce ratio est souvent pris égal à 0,5 mais on a choisi de le modéliser par l'équation (3.47), que l'on rappelle ici (α_θ est obtenu par volumes finis en interpolant L_θ calculée avec les données DNS) :

$$R = \alpha_\theta R^h + (1 - \alpha_\theta) Pr \quad (4.2)$$

Ce modèle simple peut donc être évalué facilement dans les 3 régimes de convection thermique. Plusieurs valeurs possibles de la constante C'_L seront comparées. En convection forcée, 1, 2, 3 et 2,5 sont testées pour C''_L et 3 et 4 pour C'_L . Comme le montre la figure 4.4, utiliser R variable dans le calcul de L_θ n'apporte rien de significatif. En effet, les courbes de $3R.L$ et $4R.L$ sont équivalentes à celles de $2L$ et $2,5L$ respectivement. Le ratio R sera donc choisi inclus dans la constante C''_L dans la suite. En convection mixte et naturelle, C''_L est testée avec les valeurs 1, 2, 3 et 2,5. La valeur de 0,5 habituellement utilisée pour R est également tracée pour les trois régimes de convection. Les figures 4.4, 4.5 et 4.6 montrent que la valeur usuelle de 0,5 n'est pas adaptée en proche paroi. Le fait de choisir $R = Pr$ à la paroi permet de reproduire la bonne condition à la limite de R en convection forcée et mixte. En revanche, en convection naturelle, la DNS donne un $R \neq Pr$ à la paroi, en effet on a dans ce cas $R \approx 0,57$. Une raison probable est que la DNS n'est pas assez fine en paroi car on a montré au paragraphe 3.5 que ce ratio tend vers le nombre de Prandtl à la paroi. On voit par exemple sur les figures 4.4 et 4.5 qu'en proche paroi R diminue fortement jusqu'à environ 0,65 puis en s'approchant de la paroi R augmente très fortement pour tendre vers le nombre de Prandtl. Ce phénomène ne se retrouve pas sur ce cas en convection naturelle (on

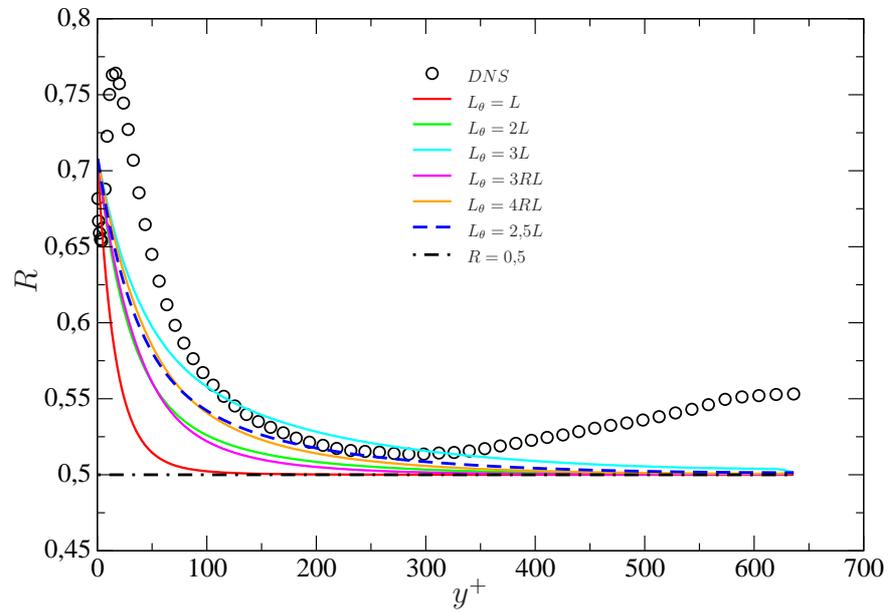


FIG. 4.4 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ et $Pr = 0,71$. Ratio des échelles de temps thermique et dynamique R en convection forcée suivant la valeur de L_θ utilisée.

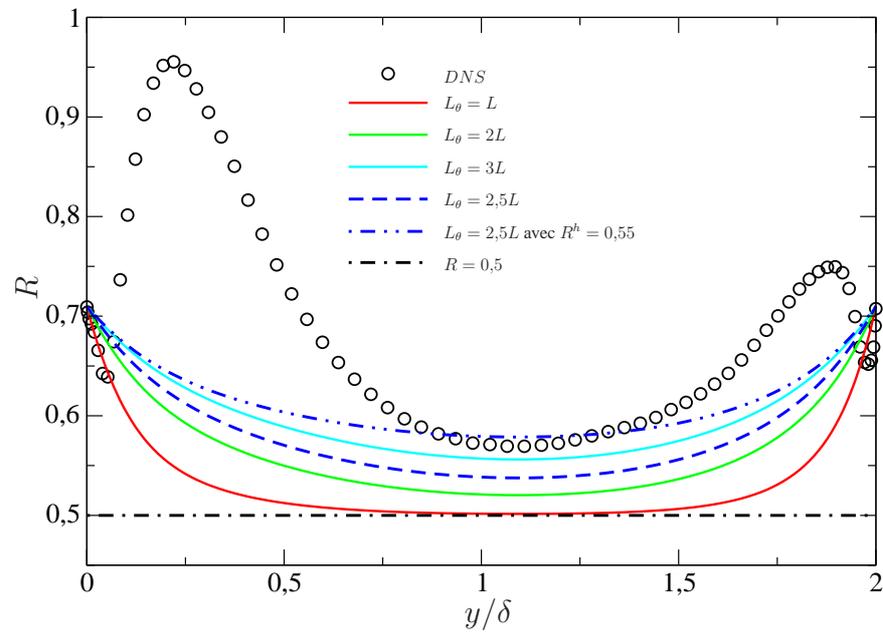


FIG. 4.5 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Pr = 0,71$ et $Ra = 6,82 \cdot 10^5$. Ratio des échelles de temps thermique et dynamique R en convection mixte.

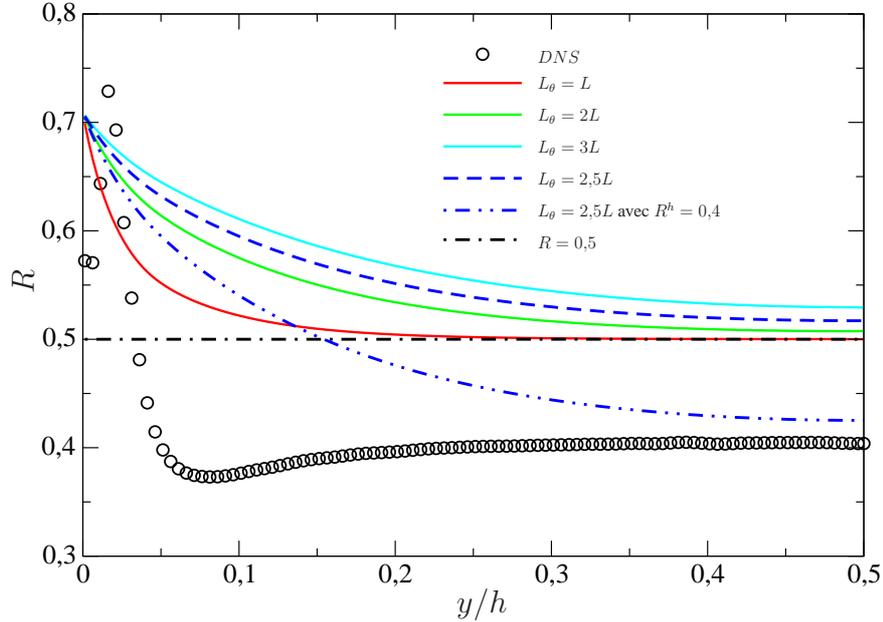


FIG. 4.6 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Ratio des échelles de temps thermique et dynamique R en convection naturelle.

a la baisse mais pas l'augmentation en très proche paroi). Un phénomène commun aux trois régimes de convection est observé dans la zone tampon, en effet dans cette zone le ratio R est maximal et le modèle de l'équation (4.2) ne peut pas reproduire ce maximum du fait de sa définition (puisque α est monotone). Les figures 4.5 et 4.6 montrent également que la valeur de $R = 0,5$, communément admise pour la zone homogène, n'est pas justifiée. En effet, la valeur se rapproche plus de 0,55 en convection mixte et de 0,4 en convection naturelle. Afin de ce rapprocher de ces valeurs, un test est effectué avec $L_\theta = 2,5L$ et R^h correspondant aux deux valeurs suivant le régime de convection. Ce test montre que ces valeurs sont plus appropriées dans cette configuration.

Afin de combler une partie des lacunes en proche paroi du ratio des échelles thermomécanique, l'expression (4.2) sera utilisé dans la suite pour les modèles utilisant la pondération elliptique. Pour rappel, R intervient dans la modélisation de la dissipation de la variance $\varepsilon_{\theta\theta}$. Cette partie montre également que l'utilisation d'un rapport $\frac{L_\theta}{L}$ compris entre 2 et 3 est un bon compromis. Dans le but de vérifier l'apport du modèle (4.2) et de l'utilisation de l'échelle de longueur thermique, on va comparer au paragraphe suivant différentes estimations de $\varepsilon_{\theta\theta}$.

4.2.2 Echelle de longueur thermique appliquée à $\varepsilon_{\theta\theta}$

Ce paragraphe va permettre de vérifier la validité du modèle de la dissipation de la variance $\varepsilon_{\theta\theta}$ qui utilise le ratio des échelles de temps thermo/mécaniques en convection forcée, mixte et naturelle. La dissipation s'écrit :

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\overline{\theta'^2}}{R} \frac{\varepsilon}{k} \quad (4.3)$$

Une autre méthode existe pour modéliser numériquement (en RANS) $\varepsilon_{\theta\theta}$ qui consiste à la calculer avec une équation de transport mais comme on l'a vu au chapitre 2.2.3, cette méthode n'est pas retenue. Le modèle de R utilise le facteur de pondération elliptique α_θ qui utilise une échelle de longueur thermique qui n'est pas forcément égale à l'échelle de longueur dynamique. On compare en convection forcée, mixte et naturelle, le modèle de $\varepsilon_{\theta\theta}$ utilisant R variable avec α_θ mais également avec $R = 0,5$ qui est couramment utilisée. α_θ utilisera respectivement $\frac{L_\theta}{L} = 1, 2, 3$ ou $2,5$. Les figures 4.7, 4.8 et 4.9 montrent cette comparaison.

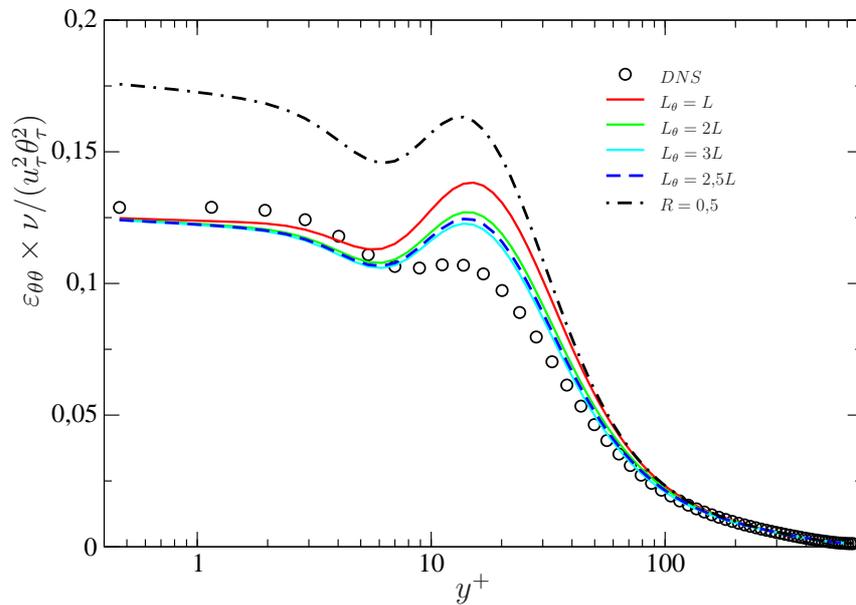


FIG. 4.7 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ et $Pr = 0,71$. Influence de l'échelle de longueur sur l'estimation de la dissipation de la variance $\varepsilon_{\theta\theta}$.

Avec les figures 4.7 et 4.8, on peut observer que si on utilise le modèle de R pondéré, on obtient la valeur exacte à la paroi de $\varepsilon_{\theta\theta}$ mais elle est légèrement surestimée dans la zone tampon en convection forcée et largement surestimée en convection mixte dans cette même zone de la partie « aidée ». En convection naturelle (fig 4.9), on n'atteint pas la valeur

4.4.2 Échelle de longueur thermique L_θ

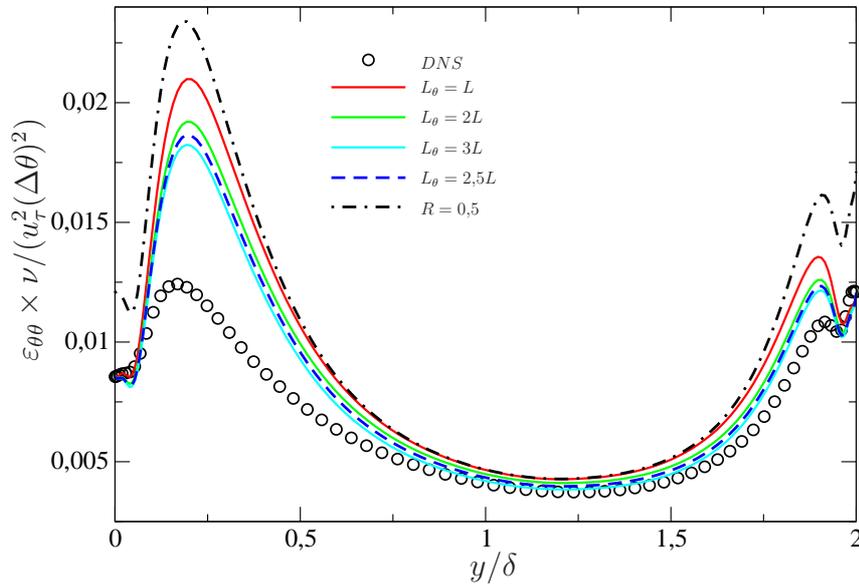


FIG. 4.8 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Pr = 0,71$ et $Ra = 6,82 \cdot 10^5$. Influence de l'échelle de longueur sur l'estimation de la dissipation de la variance $\varepsilon_{\theta\theta}$.

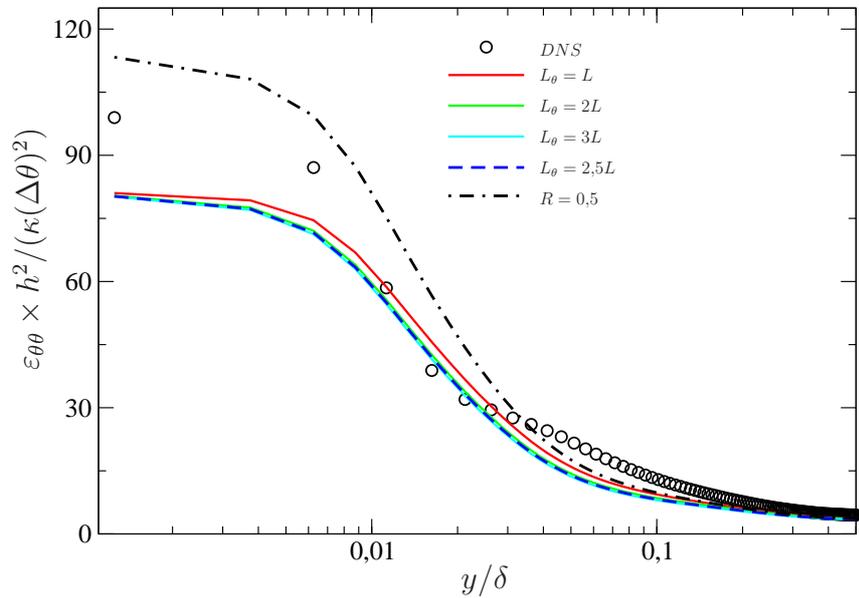


FIG. 4.9 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Re_\tau = 0$, $Ra = 5 \cdot 10^6$ et $Pr = 0,71$. Influence de l'échelle de longueur sur l'estimation de la dissipation de la variance $\varepsilon_{\theta\theta}$.

asymptotique. Comme il a été supposé au paragraphe précédent, la DNS n'est probablement pas assez fine en paroi, ce qui pourrait expliquer cette erreur. Si le modèle de $R = 0,5$ est choisi, on voit que $\varepsilon_{\theta\theta}$ est toujours surestimé en proche paroi et dans la zone tampon. Dans les trois régimes de convection, on modélise parfaitement $\varepsilon_{\theta\theta}$ dans la zone homogène. Ces courbes montrent également qu'une bonne calibration de l'échelle de longueur thermique permet de réduire la surestimation dans la zone tampon et donc de mieux modéliser cette dissipation.

En conclusion, le modèle pondéré de R permet de reproduire parfaitement le comportement de $\varepsilon_{\theta\theta}$ à la paroi et dans la zone homogène. Pour la zone tampon, l'utilisation d'une échelle de longueur thermique telle que $L_\theta > 2L$ permet de corriger un peu la surestimation observée.

A partir des tests *a priori* dans les 3 régimes de convection pour le ratio R et pour $\varepsilon_{\theta\theta}$, la valeur optimale du rapport $\frac{L_\theta}{L}$ est choisie comprise entre 2 et 3. Une valeur plus précise ainsi que le rôle de cette échelle de longueur sont investigués dans la suite avec les modèles de $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$.

4.3 Modélisation des termes de brouillage et de dissipation

4.3.1 Comparaison de modèles pour les termes de brouillage et de dissipation

Dans ce paragraphe, cinq modèles pour $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$ sont comparés afin de valider ou d'invalider des modifications apportées au modèle de base, pour ainsi déterminer lequel est le mieux adapté. Comme vu au paragraphe précédent, l'échelle de longueur thermique qui intervient dans la variable de pondération α_θ doit être choisie comprise entre $2L$ et $3L$. On va la supposer égale à $2,5L$. Cette valeur sera justifiée aux paragraphes 4.3.2 et 4.4.2. On énumère ci-dessous les modèles testés dans cette partie : (Remarque : les constantes $C_{i\theta}$ sont identiques pour chaque modèle afin de mieux distinguer les avantages et les inconvénients de chaque modèle)

- Le premier modèle, dit de « base », est le plus intuitif. Il regroupe les modèles asymptotiques retrouvés au chapitre 3.2 et le modèle homogène linéaire de Launder [51].

$$\phi_{i\theta}^* = (1 - \alpha_\theta) \phi_{i\theta}^w + \alpha_\theta \phi_{i\theta}^h \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = (1 - \alpha_\theta) \varepsilon_{i\theta}^w + \alpha_\theta \varepsilon_{i\theta}^h \quad (4.5)$$

4.4.3 Modélisation des termes de brouillage et de dissipation

$$\phi_{i\theta}^h = -\frac{1}{\tau_u} C_{1\theta} \overline{u_i' \theta'} + C_{2\theta} \overline{u_j' \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (4.6)$$

$$\phi_{i\theta}^w = -\frac{1}{\tau_u} \overline{u_j' \theta'} n_i n_j \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^w = \frac{1}{\tau_u} C_\varepsilon \left(\overline{u_i' \theta'} + \overline{u_j' \theta'} n_i n_j \right) \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^h = 0 \quad (4.9)$$

- Le deuxième reprend l'idée de Shin et al.[78] qui est d'utiliser la pondération elliptique seulement avec le terme de brouillage.

$$\phi_{i\theta}^* = (1 - \alpha_\theta) \phi_{i\theta}^w + \alpha_\theta \phi_{i\theta}^h \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = \varepsilon_{i\theta}^w \quad (4.11)$$

$$\phi_{i\theta}^h = -\frac{1}{\tau_u} C_{1\theta} \overline{u_i' \theta'} + C_{2\theta} \overline{u_j' \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (4.12)$$

$$\phi_{i\theta}^w = -\frac{1}{\tau_u} \overline{u_j' \theta'} n_i n_j \quad (4.13)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^w = \frac{1}{\tau_u} C_\varepsilon \left(\overline{u_i' \theta'} + \overline{u_j' \theta'} n_i n_j \right) \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

- Le troisième utilise une échelle de temps mixte $\sqrt{\tau_u \tau_\theta}$ avec le modèle de base. Cette échelle peut se réécrire $\sqrt{R} \tau_u$. Elle est utilisée pour être plus cohérent avec ce qui a été trouvé sur la production due à la flottabilité de la dissipation turbulente (cf paragraphe 3.4).

$$\phi_{i\theta}^* = (1 - \alpha_\theta) \phi_{i\theta}^w + \alpha_\theta \phi_{i\theta}^h \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = (1 - \alpha_\theta) \varepsilon_{i\theta}^w + \alpha_\theta \varepsilon_{i\theta}^h \quad (4.17)$$

$$\phi_{i\theta}^h = -\frac{\sqrt{R^h}}{\sqrt{R} \tau_u} C_{1\theta} \overline{u_i' \theta'} + C_{2\theta} \overline{u_j' \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (4.18)$$

$$\phi_{i\theta}^w = -\frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R} \tau_u} \overline{u_j' \theta'} n_i n_j \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^w = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R} \tau_u} C_\varepsilon \left(\overline{u_i' \theta'} + \overline{u_j' \theta'} n_i n_j \right) \quad (4.20)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^h = 0 \quad (4.21)$$

- Le quatrième modifie le modèle « wall » sans modifier le comportement asymptotique à la paroi avec une fonction qui est non nulle seulement dans la zone tampon (zone de transition entre la zone de proche paroi et la zone homogène). Pour ce faire, cette constante utilise le rapport de la production de k et de sa dissipation : $(P_k + G_k) / \varepsilon$ qui est nul à la paroi, multiplié par $(1 - \alpha_\theta)$ qui est nul loin de celle-ci. Ce modèle a été construit pour répondre au manque dans la zone tampon observé à la figure 4.10. On expliquera dans la suite les raisons de ces choix.

$$\phi_{i\theta}^* = (1 - \alpha_\theta) \phi_{i\theta}^w + \alpha_\theta \phi_{i\theta}^h \quad (4.22)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = (1 - \alpha_\theta) \varepsilon_{i\theta}^w + \alpha_\theta \varepsilon_{i\theta}^h \quad (4.23)$$

$$\phi_{i\theta}^h = -\frac{\sqrt{R^h}}{\sqrt{R\tau_u}} C_{1\theta} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (4.24)$$

$$\phi_{i\theta}^w = -\frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R\tau_u}} \left[1 + C_{w\theta}^\phi (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right] \overline{u'_j \theta' n_i n_j} \quad (4.25)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^w = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R\tau_u}} C_\varepsilon \left[1 + C_{w\theta}^\varepsilon (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right] \left(\overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_j \theta' n_i n_j} \right) \quad (4.26)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^h = 0 \quad (4.27)$$

- Le cinquième modèle reprend cette dernière idée mais avec le rapport de la production de la variance de la température et de sa dissipation : $P_{\theta\theta} / \varepsilon_{\theta\theta}$

$$\phi_{i\theta}^* = (1 - \alpha_\theta) \phi_{i\theta}^w + \alpha_\theta \phi_{i\theta}^h \quad (4.28)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = (1 - \alpha_\theta) \varepsilon_{i\theta}^w + \alpha_\theta \varepsilon_{i\theta}^h \quad (4.29)$$

$$\phi_{i\theta}^h = -\frac{\sqrt{R^h}}{\sqrt{R\tau_u}} C_{1\theta} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (4.30)$$

$$\phi_{i\theta}^w = -\frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R\tau_u}} \left[1 + C_{w\theta 2}^\phi (1 - \alpha_\theta) \frac{P_{\theta\theta}}{\varepsilon_{\theta\theta}} \right] \overline{u'_j \theta' n_i n_j} \quad (4.31)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^w = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R\tau_u}} C_\varepsilon \left[1 + C_{w\theta 2}^\varepsilon (1 - \alpha_\theta) \frac{P_{\theta\theta}}{\varepsilon_{\theta\theta}} \right] \left(\overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_j \theta' n_i n_j} \right) \quad (4.32)$$

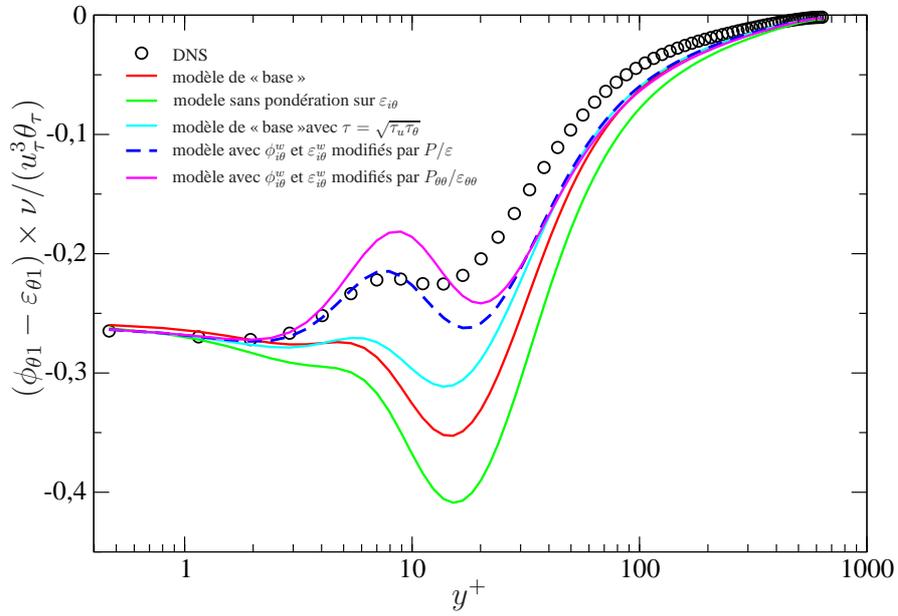
$$\varepsilon_{i\theta}^h = 0 \quad (4.33)$$

Les figures 4.10(a) à 4.12(b) permettent de confronter ces 5 modèles dans les 3 régimes de convection. Ces figures montrent que le modèle de base convient pour la composante normale $\phi_{\theta 2} - \varepsilon_{\theta 2}$ sauf en convection naturelle. Un défaut existe en convection forcée car le pic maximal est décalé par rapport à celui de la DNS. En revanche avec ce modèle, la

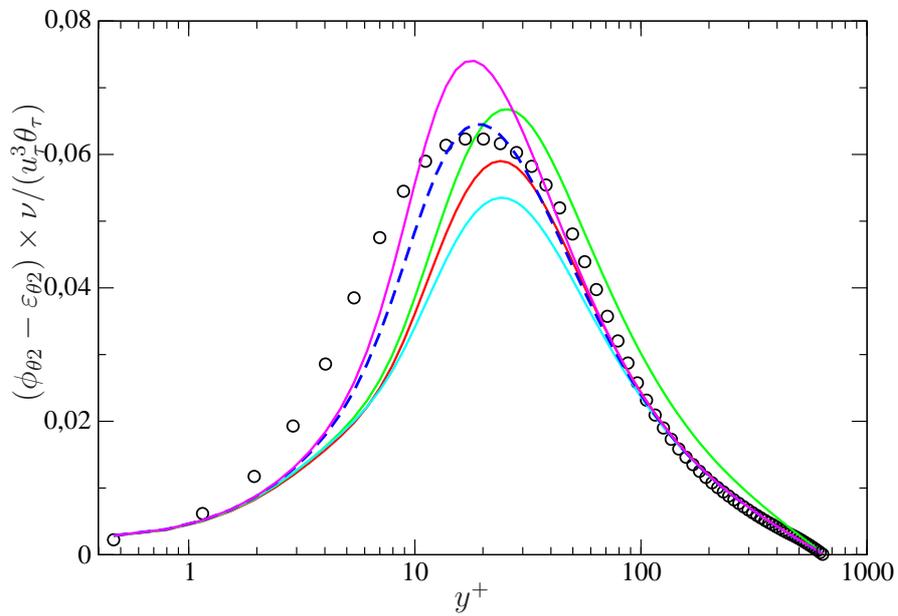
4.4.3 Modélisation des termes de brouillage et de dissipation

composante longitudinale surestime largement, en valeur absolue, la valeur de la DNS pour $3 < y^+$ en convection forcée, et il ne capte pas la variation de proche paroi en convection mixte. Afin de remédier à ces deux problèmes, une première piste a été de s'inspirer de Shin et al.[78] qui ont choisi de ne pas appliquer la pondération elliptique à la dissipation $\varepsilon_{i\theta}$: le deuxième modèle reprend cette idée. On peut voir que cela ne résout aucun des deux problèmes, pire, il les accentue car il surestime les pics et les décale. La deuxième piste a été d'utiliser l'échelle de temps mixte thermique et dynamique mais cette modification améliore très peu les résultats. Enfin, les constantes $C_{\theta w}^\phi$ et $C_{\theta w}^\varepsilon$ ont été introduites, elles interviennent uniquement dans les modèles « w » sans changer le comportement asymptotique car $C_{w\theta}(1 - \alpha_\theta) \frac{P_k + G_k}{\varepsilon}$ tend vers 0 à la paroi à cause de $\frac{P_k + G_k}{\varepsilon}$ puis vers 0 loin de la paroi grâce à $(1 - \alpha_\theta)$. Le but de ces constantes est de combler le manque dans la zone tampon sans changer la valeur asymptotique. L'apport de ces constantes dans les quatrième et cinquième modèles permet de résoudre en partie deux problèmes observés avec le modèle de base. Ainsi le pic maximal de la composante normale est au même endroit que celui de la DNS Fig 4.10(b), et les prédictions pour la composante longitudinale sont largement améliorées. De plus ces modifications permettent de capter la variation en proche paroi de la composante longitudinale Fig 4.10(a) et 4.11(a).

En ce qui concerne la convection naturelle, aucun modèle n'arrive à reproduire les profils des $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$. En effet, contrairement aux cas de convection forcée et mixte, la composante normale est très sous-estimée dans la zone tampon, seul le modèle utilisant $P_{\theta\theta}/\varepsilon_{\theta\theta}$ reproduit le pic de la composante normale mais le sous-estime (4.12(b)). De plus, seul ce modèle capte le « comportement non-monotone » de proche paroi mais trop faiblement pour la composante longitudinale (figure 4.12(a)). Ce modèle, même s'il paraît prometteur, nécessite des développements supplémentaires car il fait diverger des calculs en cavité fermée avec flottabilité (étudiée au chapitre 7). C'est pourquoi dans la suite, seul le quatrième modèle employant $\frac{P_k + G_k}{\varepsilon}$ sera utilisé.



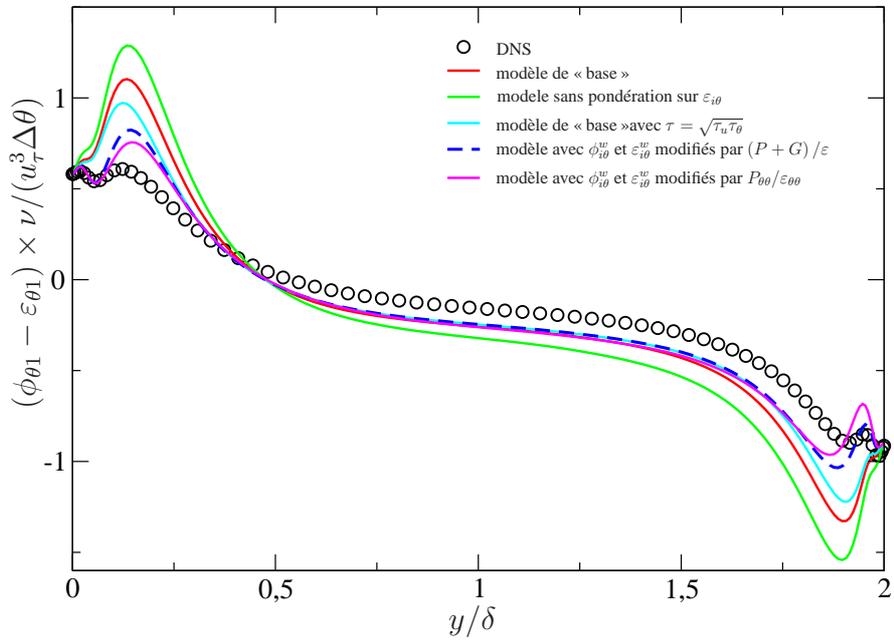
(a)



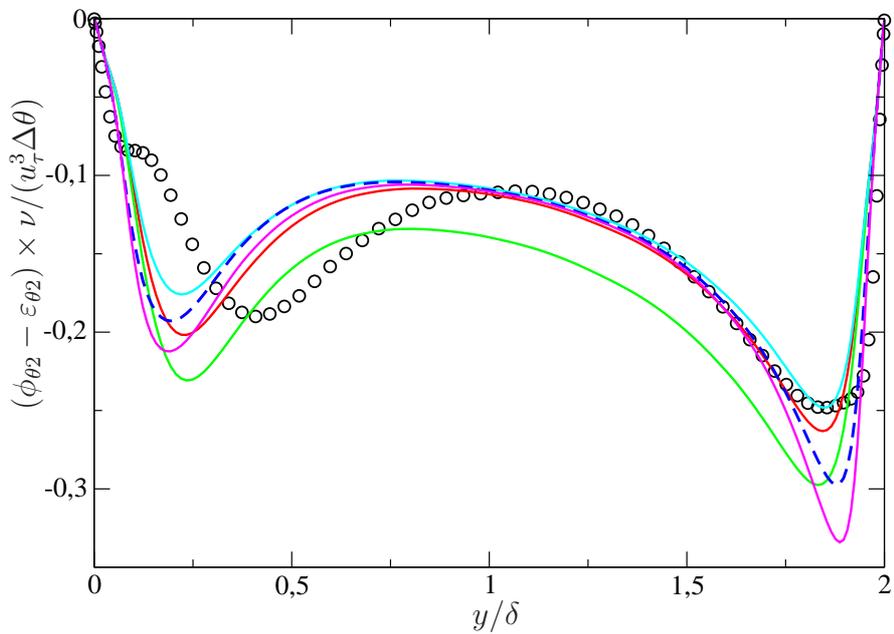
(b)

FIG. 4.10 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des modèles de $\phi_{\theta_1} - \varepsilon_{\theta_1}$ en (a) et de $\phi_{\theta_2} - \varepsilon_{\theta_2}$ en (b).

4.4.3 Modélisation des termes de brouillage et de dissipation

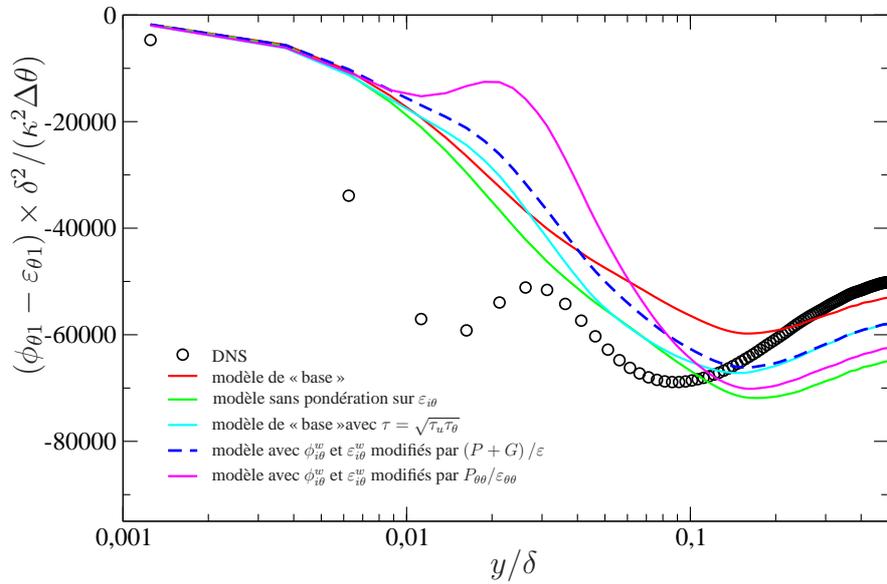


(a)

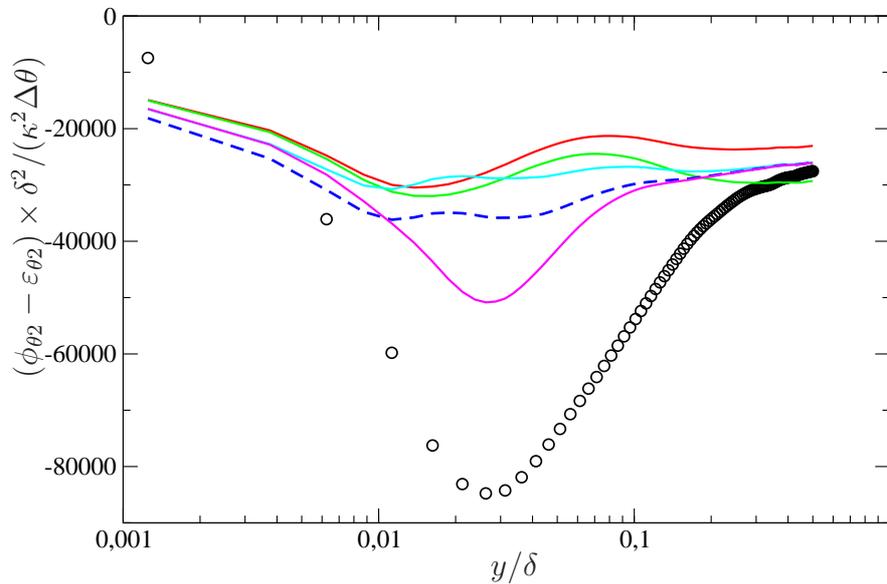


(b)

FIG. 4.11 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Ra = 6,82 \cdot 10^5$ et $Pr = 0,71$. Comparaison de modèles de $\phi_{\theta_1} - \varepsilon_{\theta_1}$ en (a) et de $\phi_{\theta_2} - \varepsilon_{\theta_2}$ en (b).



(a)



(b)

FIG. 4.12 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Comparaison de modèles de $\phi_{\theta 1} - \varepsilon_{\theta 1}$ en (a) et de $\phi_{\theta 2} - \varepsilon_{\theta 2}$ en (b).

4.3.2 Échelle de longueur thermique appliquée aux $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$

Il a été supposé précédemment que l'échelle de longueur thermique à appliquer était telle que $L_\theta = 2,5L$. Cette partie va permettre de justifier ce choix à l'aide du quatrième modèle exposé précédemment.

Les figures 4.13(a), 4.13(b), 4.15(a), 4.15(b), 4.17(a) et 4.17(b) montrent $\phi_{\theta 1} - \varepsilon_{\theta 1}$ (sens de l'écoulement) et $\phi_{\theta 2} - \varepsilon_{\theta 2}$ (sens normal à la paroi) obtenus avec des valeurs différentes de L_θ dans les 3 régimes de convection. Pour ces tests, le ratio des échelles de temps de la DNS est utilisé et non celui du modèle pondéré. Les figures 4.13(a) et 4.13(b) du cas de convection forcée confirment que le rapport des échelles de longueur peut être choisi constant et non dépendant de R , ainsi sur ces figures, les résultats de $L_\theta = 3RL$ et $L_\theta = 2L$ sont très proches. La même observation est faite pour les résultats de $L_\theta = 4RL$ et $L_\theta = 3L$.

D'après les figures en convection forcée et mixte, on peut remarquer que $\phi_{\theta 1} - \varepsilon_{\theta 1}$ est mal évalué si l'échelle de longueur thermique est prise égale à l'échelle de longueur dynamique. Cela s'explique par le fait que le modèle pondéré tend trop vite vers le modèle homogène qui est complètement inadapté en proche paroi pour cette composante (voir figures 4.14(a) et 4.16(a)). L'utilisation d'une échelle de longueur égale à $2,5L$ est la mieux appropriée, car elle permet de bien reproduire les variations de proche paroi. En ce qui concerne la convection naturelle (figure 4.17(a)), l'utilisation de $2,5$ permet d'obtenir une meilleure valeur en zone homogène, mais le principal problème est que le modèle ne capte pas bien la variation dans la zone de transition. La figure 4.18(a) montre que le modèle de paroi ne reproduit pas du tout la variation observée dans la zone tampon à l'opposé des cas de convection forcée et mixte (voir figures 4.14(a) et 4.16(a)).

Contrairement à la composante longitudinale pour laquelle doubler l'échelle de longueur améliore significativement le résultat, l'effet est moins significatif pour la composante normale mais permet de retrouver le pic maximal de la DNS en convection forcée. En convection mixte, on retrouve la bonne valeur du pic du côté aidé et il est légèrement surestimé du côté opposé. A noter que le pic du côté aidé fait apparaître un décalage que le modèle ne capte pas. Pour ce qui concerne la convection naturelle (figure 4.17(b)), le changement d'échelle de longueur ne change quasiment rien pour cette composante.

En prenant en compte les 3 cas, la valeur de $2,5$ représente le meilleur compromis pour le rapport $\frac{L_\theta}{L}$.

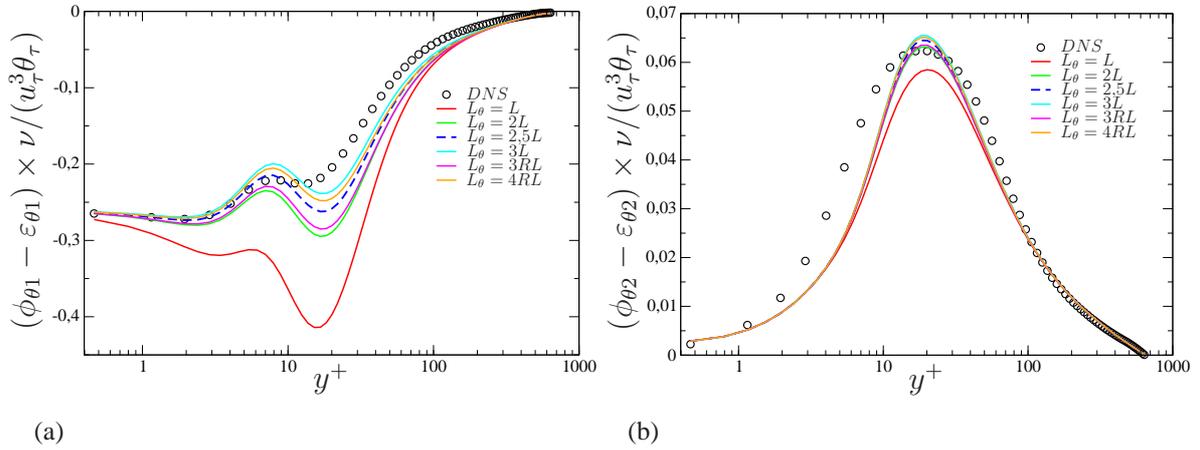


FIG. 4.13 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_{\tau} = 640$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des échelles de longueurs utilisées pour $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ en (a) et pour $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ en (b).

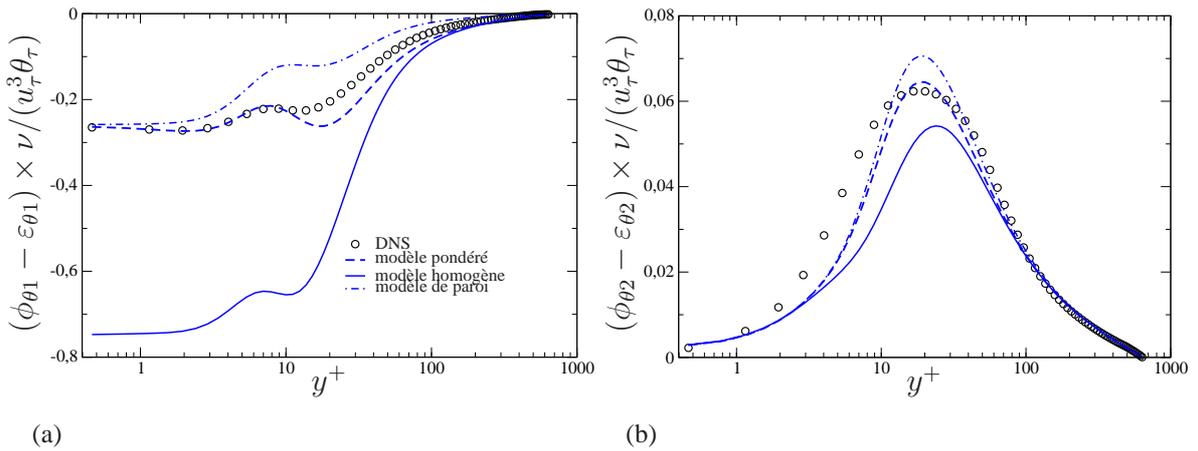


FIG. 4.14 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_{\tau} = 640$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des modèles homogènes, de paroi et pondérés de $\phi_{\theta 1} - \varepsilon_{\theta 1}$ en 4.14(a) et de $\phi_{\theta 2} - \varepsilon_{\theta 2}$ en 4.14(b) pour $L_{\theta} = 2,5L$.

4.4.3 Modélisation des termes de brouillage et de dissipation

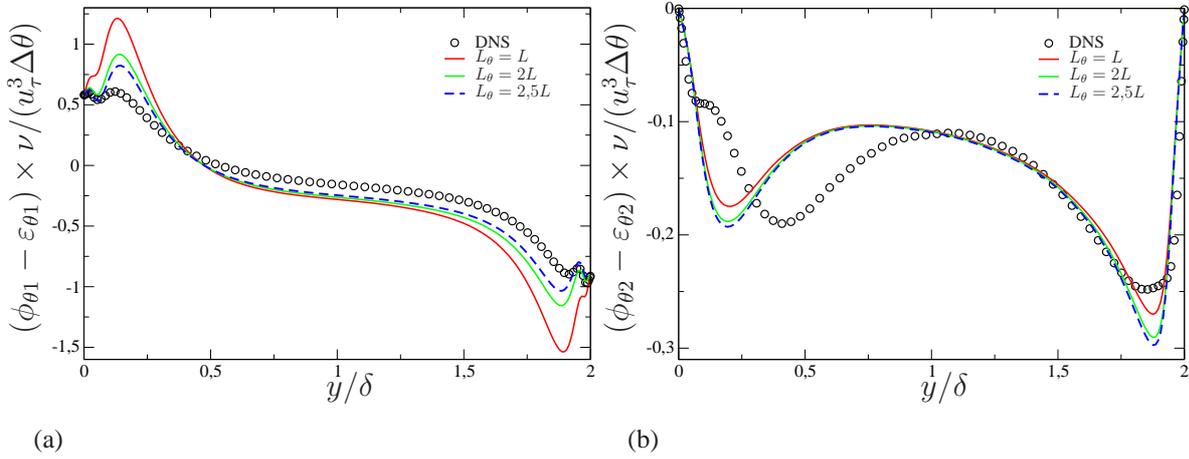


FIG. 4.15 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_{\tau} = 150$, $Ra = 6,82 \cdot 10^5$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des échelles de longueurs utilisées pour $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ en (a) et pour $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ en (b).

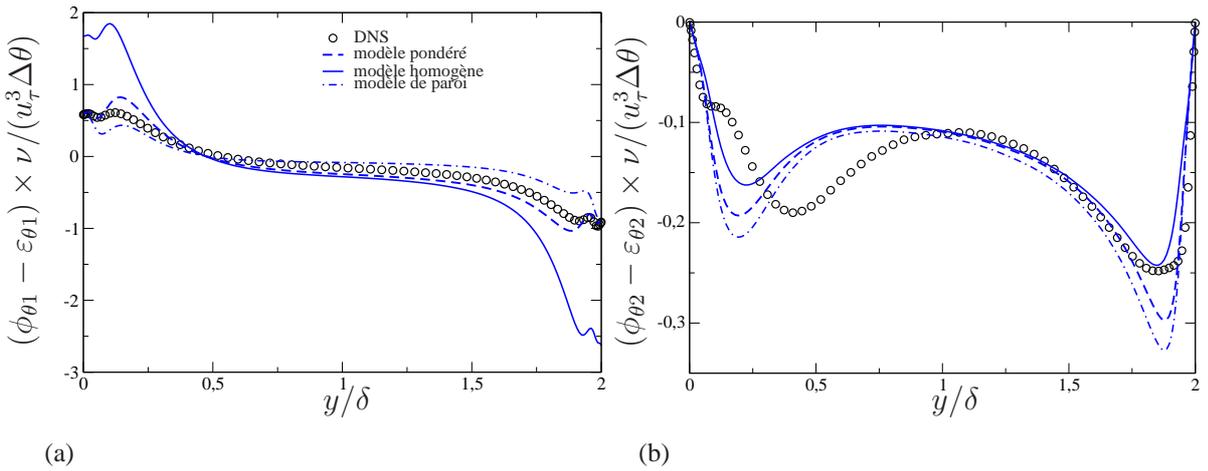


FIG. 4.16 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_{\tau} = 150$, $Ra = 6,82 \cdot 10^5$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des modèles homogènes, de paroi et pondérés de $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ en (a) et de $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ en (b) pour $L_{\theta} = 2,5L$.

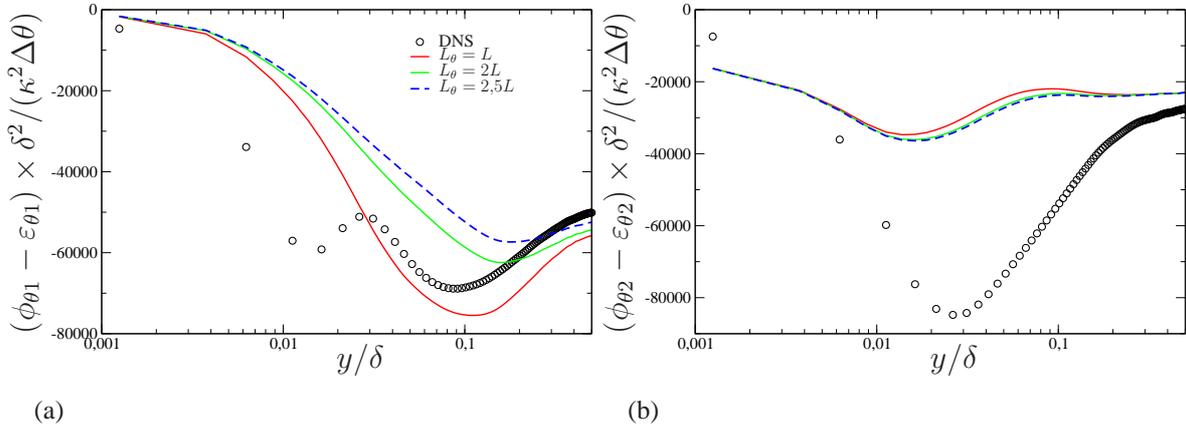


FIG. 4.17 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des échelles de longueurs utilisées pour $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ en (a) et pour $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ en (b).

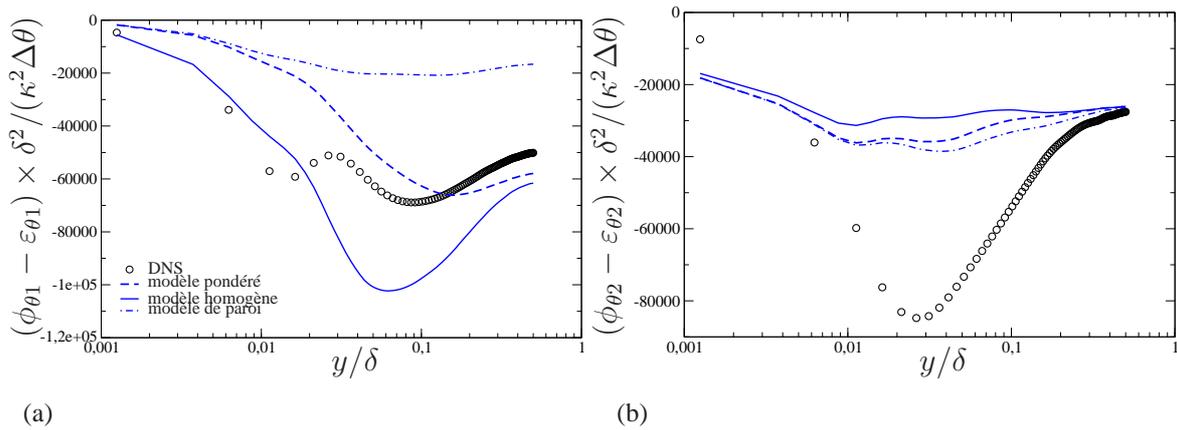


FIG. 4.18 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des modèles homogènes, de paroi et pondérés de $\phi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ en (a) et de $\phi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ en (b) pour $L_\theta = 2,5L$.

4.4 Modélisation algébrique des flux thermiques

Cette partie est consacrée dans un premier temps à la comparaison des modèles algébriques SGDGH, GGDH, AFM et leur pendant utilisant la pondération elliptique présentés au chapitres 2 et 3 en *a priori*. Dans un second temps, l'influence de l'échelle de longueur sur les modèles algébriques utilisant la pondération elliptique est étudiée.

4.4.1 Comparaison des modèles algébriques pour les flux thermiques

Les flux thermiques turbulents sont comparés aux données de DNS pour les modèles SGDGH, GGDH, AFM, EB-GGDH et EB-AFM. Pour les modèles utilisant la pondération elliptique, l'échelle de longueur thermique est choisie, d'après le paragraphe 4.3.2, proportionnelle à l'échelle de longueur dynamique tel que $L_\theta = 2,5L$. Le choix de ce facteur est vérifié au paragraphe suivant 4.4.2. Les expressions donnant les flux thermiques turbulents $\overline{u'_i\theta'}$ sont données dans le tableau 4.1 pour la cas en convection forcée et dans le tableau 4.2 pour les cas de convection mixte et naturelle. Dans le tableau 4.1, on peut remarquer que le

Modèle thermique	$\overline{u'\theta'}$	$\overline{v'\theta'}$
SGDH	$-C_\mu \frac{1}{Pr_t} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}$	$-C_\mu \frac{1}{Pr_t} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}$
GGDH	$-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u'^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$	$-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$
AFM	$-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u'^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \xi \overline{v'\theta'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]$	$-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$
EB-GGDH	$-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u'^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$	$-C_\theta^* \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$
EB-AFM	$-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u'^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \xi \overline{v'\theta'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right]$	$-C_\theta^* \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \overline{v'^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$

TAB. 4.1 – Équations des flux thermiques $\overline{u'_i\theta'}$ en convection forcée.

gradient de température suivant x , $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}$ est non-nul, c'est à cause de la partie linéaire de la température qui est prise en compte dû au flux imposé en paroi. Dans ce cas, le gradient de température suivant x se réduit, en prenant en compte l'adimensionnement du problème, à $\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = \frac{\bar{u}}{U_{bulk}} \frac{\nu \theta_\tau}{u_\tau}$.

Modèle thermique	$\overline{u'\theta'}$	$\overline{v'\theta'}$
SGDH	0	$-C_\mu \frac{1}{Pr_t} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y}$
GGDH	$-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$	$-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{v'^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$
AFM	$-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \xi \overline{v'\theta'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \eta \beta g \overline{\theta'^2} \right]$	$-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{v'^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$
EB-GGDH	$-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$	$-C_\theta^* \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{v'^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$
EB-AFM	$-C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + \xi \overline{v'\theta'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \eta \beta g \overline{\theta'^2} \right]$	$-C_\theta^* \frac{k}{\varepsilon} \left[\overline{v'^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$

TAB. 4.2 – Équations des flux thermiques $\overline{u_i'\theta'}$ en convection mixte et naturelle.

Le tableau 4.2 fait apparaître les termes de flottabilité dans les modèles de type AFM qui ne sont plus nuls dans ces deux derniers cas. Cette fois, les gradients de température suivant x sont nuls.

Dans les deux tableaux 4.1 et 4.2, les constantes des modèles sont définies par :

– pour le SGDH : $C_\mu = 0,09$

– pour le GGDH et l'AFM : $C_\theta = \frac{\sqrt{R}C'_\theta}{\sqrt{R^h}C_{\theta 1}}$, pour les simulations, on aura $R = R(\alpha_\theta)$, α_θ

étant égal à 1 pour ces modèles, la constante devient : $C_\theta = \frac{C'_\theta}{C_{\theta 1}}$

– pour l'EB-GGDH et l'EB-AFM où C_θ , ξ , η et γ sont variables :

$$C_\theta = \frac{\sqrt{R}C'_\theta}{\alpha_\theta C_{\theta 1} \sqrt{R^h} + (1 - \alpha_\theta) \sqrt{Pr} \left[C_\varepsilon \left(1 + C'_\theta \sqrt{R} \right) + C'_\theta \sqrt{R} \right]}$$

$$C_\theta^* = \frac{C_\theta}{1 + C_\theta \gamma}$$

Les modèles GGDH, AFM et leurs pendants avec pondération elliptique font apparaître la constante C'_θ . Lors de l'obtention des modèles algébriques (voir aux paragraphes 2.2.2.1 et 3.7), on a vu que cette constante devrait théoriquement être égale à 1. Afin de compenser les diverses hypothèses simplificatrices qui permettent d'obtenir ces modèles algébriques, la constante C'_θ a été modifiée et calibrée sur le cas en convection forcée de Abe et al. La composante normale ne faisant intervenir que la constante C_θ , il est aisé de la calibrer *via* la constante C'_θ par rapport au profil de la DNS de $\overline{v'\theta'}$. Les autres constantes ne sont pas

4.4.4 Modélisation algébrique des flux thermiques

modifiées à ce stade pour respecter la calibration effectuée lors de la construction du modèle homogène du terme de brouillage $\phi_{i\theta}^h$. Ainsi pour le GGDH et l'AFM, on a $C'_\theta = 0,98$ et pour l'EB-GGDH et l'EB-AFM, on a $C'_\theta = 0,91$. Les autres constantes ont été calibrées précédemment lors des tests montrés au paragraphe 4.3.1 tel que :

$$C_{\theta 1} = 4,15,$$

$$\xi = (1 - \alpha_\theta C_{\theta 2}) \text{ avec } C_{\theta 2} = 0,3,$$

$$\eta = (1 - \alpha_\theta C_{\theta 3}) \text{ avec } C_{\theta 3} = 0,6,$$

$$\gamma = (1 - \alpha_\theta) (1 + C_\varepsilon) \text{ et}$$

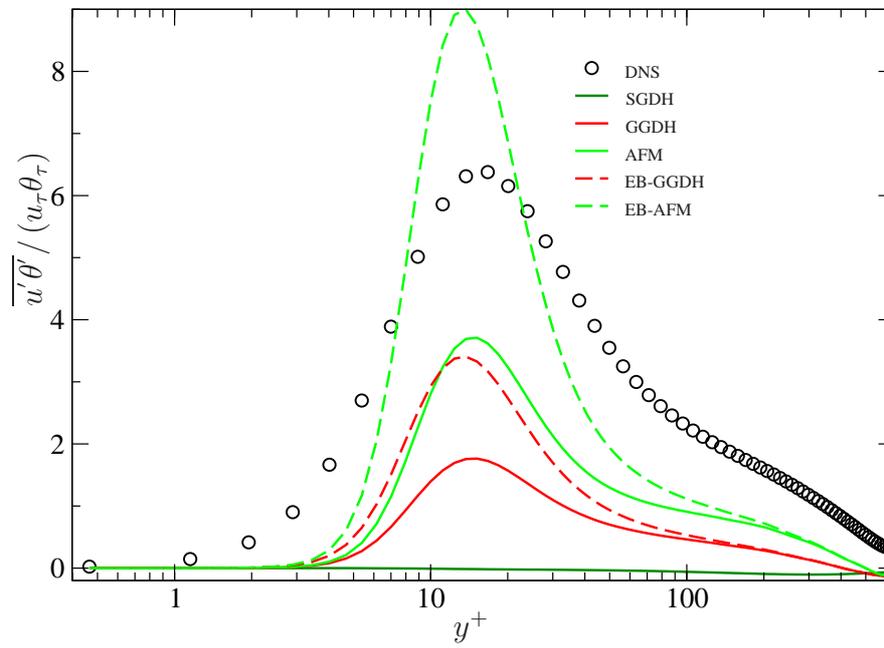
$$C_\varepsilon = \frac{1}{2} (1 + 1/Pr).$$

Pour retrouver les constantes du GGDH et de l'AFM, il suffit de poser : $\alpha_\theta = 1$.

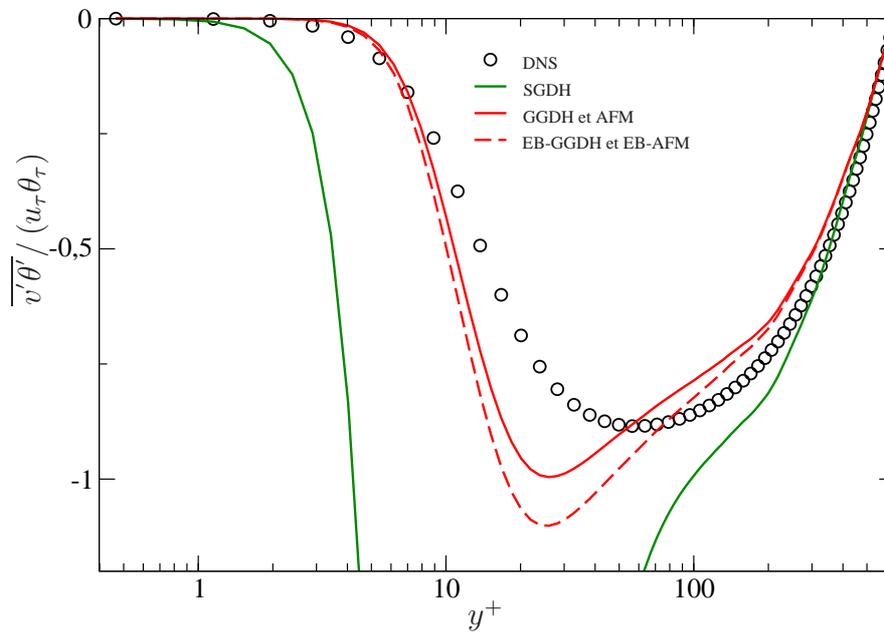
On peut remarquer que le flux thermique longitudinal (dans la direction de l'écoulement) est nul par définition avec le SGDH dans les cas en convection mixte et naturelle, et quasiment nul dans le cas en convection forcée. Ceci n'est pas gênant en convection forcée mais le sera plus en convection mixte et naturelle car ce terme n'intervient que lorsque la gravité joue un rôle.

Les figures en convection forcée 4.19(a) et en convection mixte 4.20(a) montrent que plus le modèle est complet, plus l'amélioration est notable en particulier dans la zone de proche paroi. La présence du terme de production par gradient de vitesse dans l'AFM améliore la prédiction du pic de $\overline{u'\theta'}$. L'utilisation de la pondération elliptique rectifie assez nettement le pic de $\overline{u'\theta'}$ en proche paroi, l'EB-AFM le prédit mieux malgré une surestimation de la valeur maximale qui reste moindre que la sous-estimation du modèle sans pondération. Dans tous les cas, le pic reste cependant décalé vers la paroi par rapport aux résultats de la DNS. On peut remarquer que moins le modèle est complet, plus il sous-estime les flux au centre du canal, ce qui est logique puisque moins il est complet, plus il manque des contributions.

Pour le flux thermique normal, le modèle SGDH donne une forte surestimation (en valeur absolue) en proche paroi surtout dans la zone $y^+ < 80$ pour le cas de Abe et al. [1] et $y/\delta < 0,5$ et $> 1,5$ pour le cas de Kasagi & Nishimura [43]. En revanche, tous les autres modèles imitent de manière assez satisfaisante cette composante même si la forme de la courbe n'est pas parfaitement reproduite. A noter que les modèles à pondération elliptique sont quasi équivalents à leur pendant sans (ils surestiment néanmoins la valeur du pic en convection forcée). Ceci vient du terme additionnel en γ qui fait intervenir le nombre de Prandtl qui est dans notre cas proche de 1. On a $C_\theta \approx 0,217$ pour les modèles sans pondération elliptique et $0,217 \lesssim C_\theta^* \lesssim 0,313$ pour les modèles à pondération elliptique. Ceci explique la faible différence entre les modèles avec et sans pondération car on a $C_\theta \approx C_\theta^*$. Cependant, la donnée est différente pour des écoulements à nombre de Prandtl très différent de 1. La figure 4.21



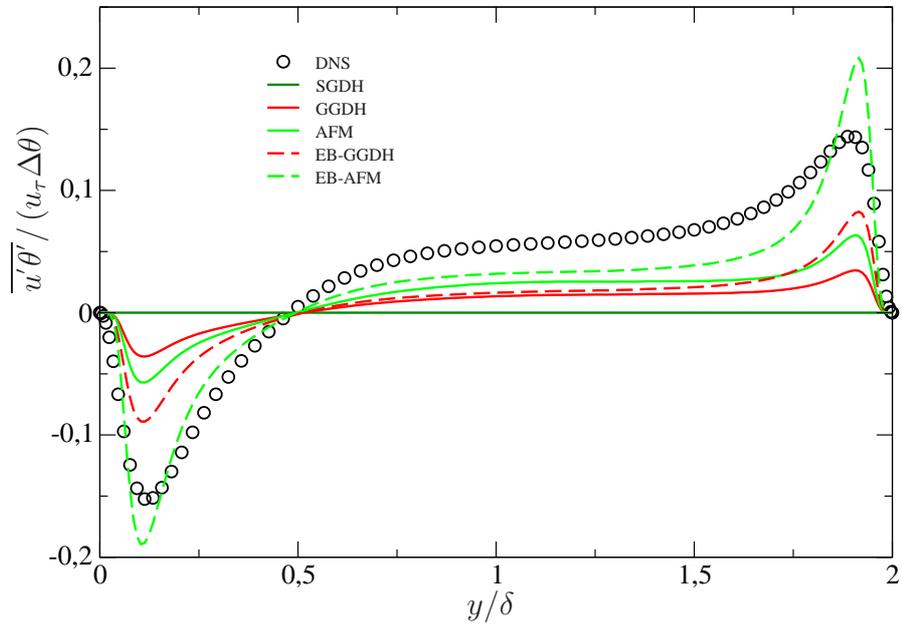
(a)



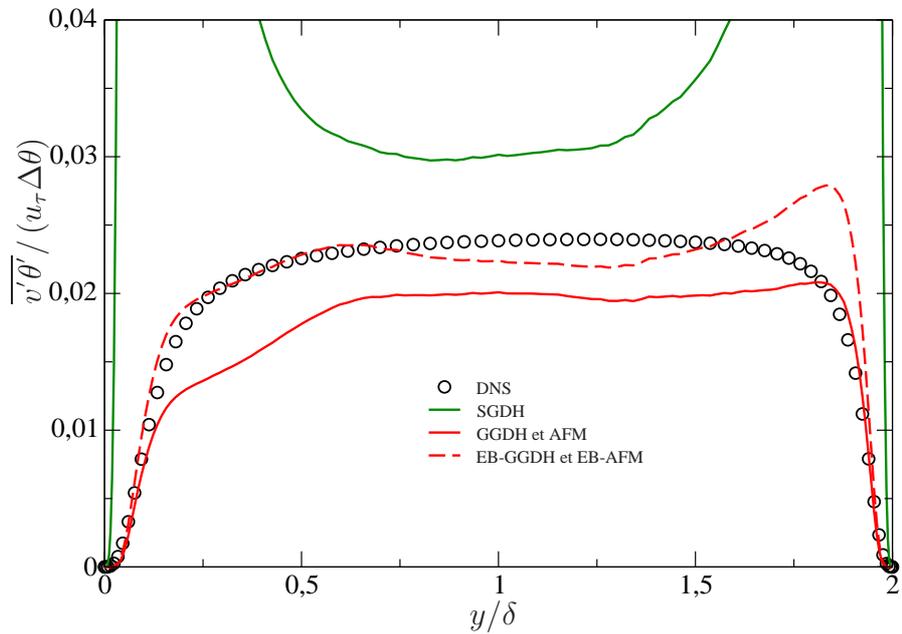
(b)

FIG. 4.19 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des différents modèles algébrique pour $\overline{u' \theta'}$ en (a) et de $\overline{v' \theta'}$ en (b).

4.4.4 Modélisation algébrique des flux thermiques



(a)



(b)

FIG. 4.20 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Ra = 6,82 \cdot 10^5$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des différents modèles algébrique pour $\overline{u'\theta'}$ en (a) et de $\overline{v'\theta'}$ en (b).

montre la variation de la constante C_θ^* pour les valeurs de nombre de Prandtl 0,025, 0,71 et 7. On voit clairement que les variations de proche paroi ne peuvent plus être négligées pour des petits ou grands nombre de Prandtl et donc prendre en compte les effets de la paroi dans le modèle des flux thermiques turbulents est important pour reproduire correctement les profils de température.

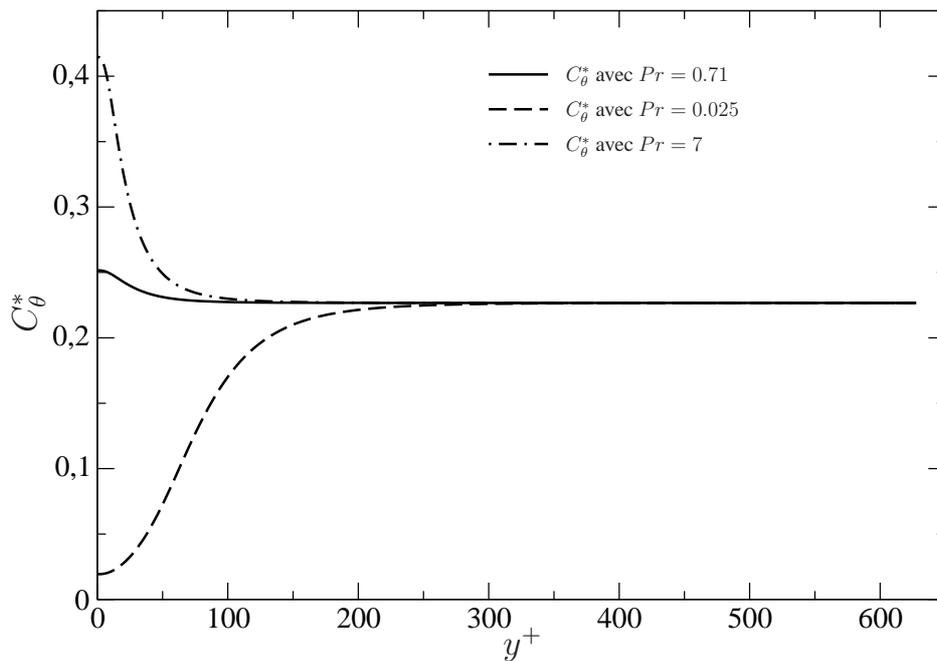


FIG. 4.21 – Effet du nombre de Prandtl sur C_θ^*

Ces cas en convection forcée et mixte autorisent à confirmer que l'apport du GGDH est indéniable par rapport au SGDH pour la prédiction des flux thermiques turbulents. Il permet en effet une meilleure prédiction du flux thermique normal à la paroi, i.e. le terme qui rentre en compte directement dans le calcul de la température et de la variance de la température, ainsi qu'une prédiction non nulle en convection mixte du flux longitudinal qui rentre dans le calcul des termes de production par gravité de la dissipation turbulente, ainsi que des tensions de Reynolds. L'apport de l'AFM, qui contient les 3 termes de production de l'équation des flux thermiques turbulents $\overline{u_i'\theta'}$ (production due au gradient de température, au gradient de vitesse et à la flottabilité), et de la pondération elliptique, qui donne de meilleurs résultats en proche paroi, est clairement visible pour le flux turbulent dans le sens de l'écoulement, mais ce dernier ne joue pas sur la distribution de la température moyenne dans le cas présent. En convection naturelle, suivant la composante normale (fig 4.22(b)), tous les modèles suresti-

4.4.4 Modélisation algébrique des flux thermiques

ment nettement la DNS, le moins bon résultat étant largement celui du modèle SGDH, et le meilleur étant celui du modèle AFM. Pour la composante longitudinale (fig 4.22(a)), le flux en proche paroi est négatif pour tous les modèles sauf pour le modèle SGDH qui donne un flux nul partout. Les mêmes conclusions quantitatives que celles des tests *a priori* en convection forcée et mixte peuvent être tirées, sauf que l'EB-AFM surestime clairement le flux longitudinal à la paroi. On remarque cependant que la forme de la courbe du flux normal à la paroi n'est pas bien reproduite par les modèles GGDH et AFM et ceci résulte du gradient de température. Une partie des conclusions obtenues en convection forcée et mixte restent valables :

- l'apport du GGDH est indéniable par rapport au SGDH (modèle utilisé aujourd'hui par défaut dans *Code_Saturne*) pour la prédiction des flux thermiques turbulents parce qu'il permet une meilleur prédiction du flux thermique normal à la paroi, celui qui rentre en compte directement dans le calcul de la température et de la variance de celle-ci, ainsi qu'une prédiction non nulle du flux longitudinal qui rentre dans le calcul des termes de production par flottabilité de la dissipation turbulente et des tensions de Reynolds.
- l'apport de l'AFM, est clairement visible pour le flux turbulent dans le sens de l'écoulement.

En revanche, contrairement aux cas en convection forcée et mixte, la pondération elliptique donne de mauvais résultats en proche paroi sur le flux tangentiel lorsqu'elle est associée à l'AFM en convection naturelle. Ce comportement reflète les manques aperçus sur les courbes des $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$, figure 4.12. On peut aussi remarquer que la forme de la courbe du flux normal à la paroi n'est pas bien reproduite par les modèles GGDH et AFM, ceci résulte du gradient de température et représente encore une fois la carence des modèles linéaires des $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$ entrevue à la figure 4.12.

4.4.2 Influence de l'échelle de L_θ dans les modèles algébriques

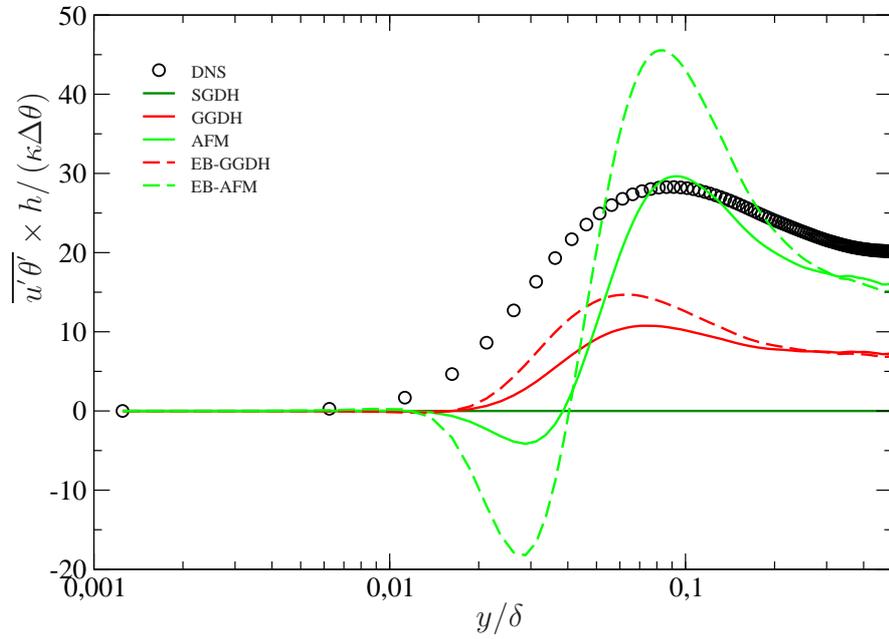
Les figures 4.23(a), 4.23(b), 4.24(a), 4.24(b), 4.25(a) et 4.25(b) montrent les tests liés au changement de l'échelle de longueur L_θ . Évidemment, seuls les modèles utilisant la pondération elliptique sont concernés par ce changement.

Ces figures montrent que l'utilisation de l'échelle de longueur thermique à la place de celle de la dynamique permet d'augmenter le pic de proche paroi pour les 2 composantes des flux. Cette amélioration, surtout pour le passage du GGDH à l'EB-GGDH, confirme ce qui a été montré avec les estimations *a priori* des $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$. Elle est plus flagrante en convection mixte qu'en convection forcée. Par contre, en convection naturelle, l'échelle de longueur

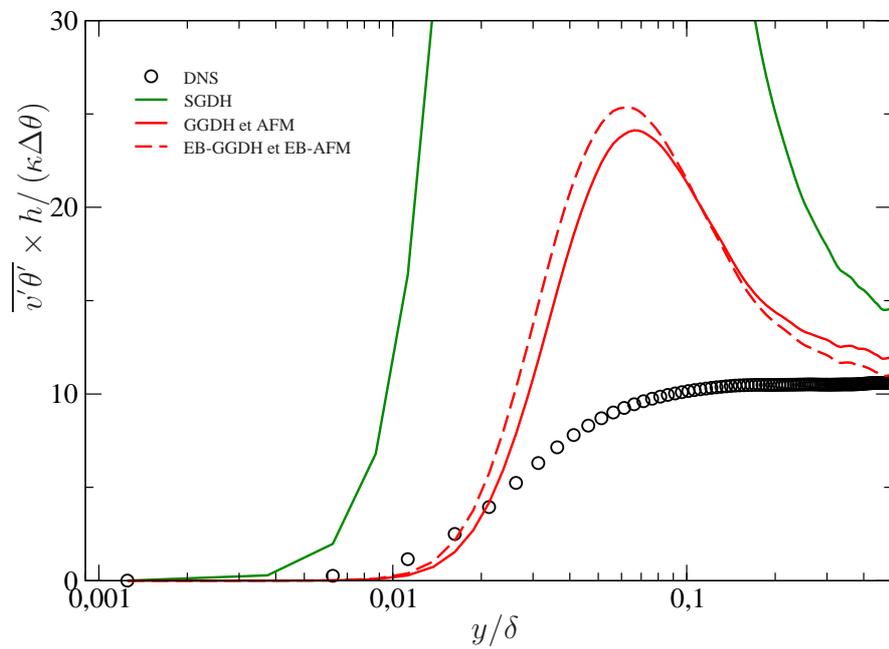
CHAPITRE 4. TESTS A PRIORI

thermique a un impact négatif avec l'EB-AFM suivant $\overline{u'\theta'}$ car elle accentue la zone négative en proche paroi et augmente le pic positif. En revanche, cette modification améliore l'EB-GGDH qui lui ne dispose pas de partie négative. Suivant $\overline{v'\theta'}$, l'impact de l'échelle de longueur thermique est faible comme pour la convection forcée et mixte. Ces cas confirment que l'utilisation du rapport $L_\theta/L = 2,5$ représente le meilleur compromis. Il convient de souligner que différencier les deux échelles de longueur a un coût de calcul, car il devient nécessaire de résoudre une équation pour α_θ mais ce coût est minime ; environ 1% du temps total de calcul.

4.4.4 Modélisation algébrique des flux thermiques

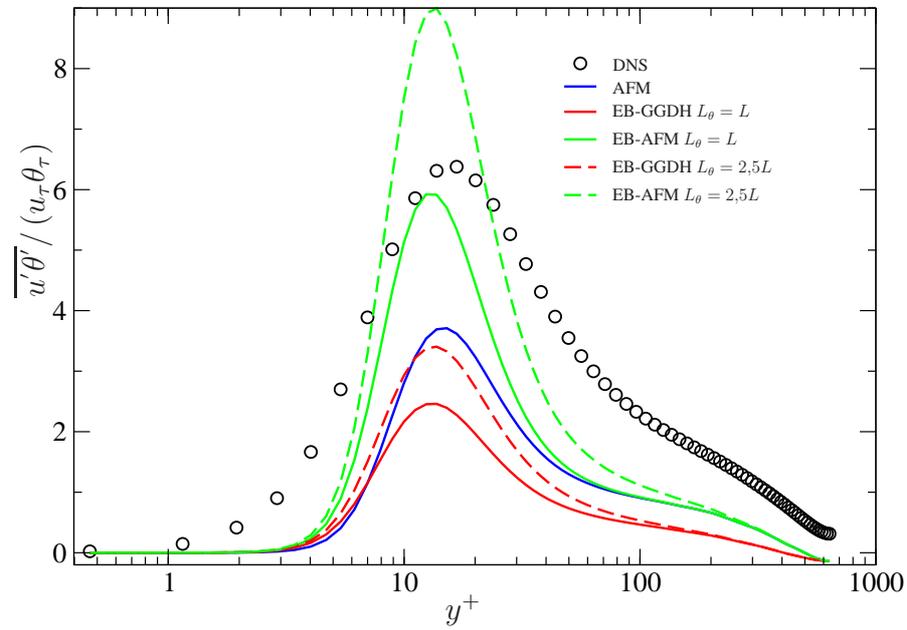


(a)

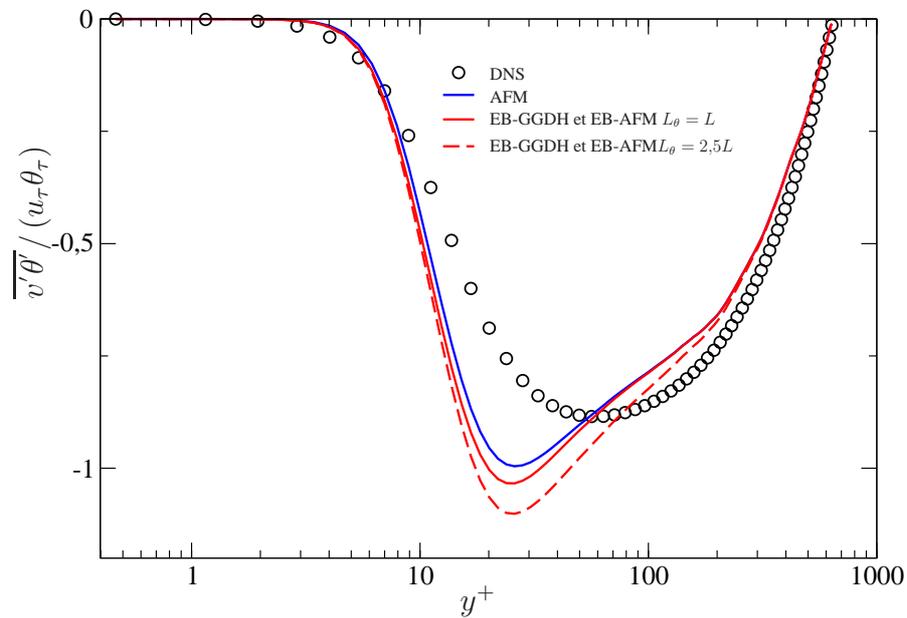


(b)

FIG. 4.22 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des différents modèles algébrique pour $\overline{u'\theta'}$ en (a) et de $\overline{v'\theta'}$ en (b).



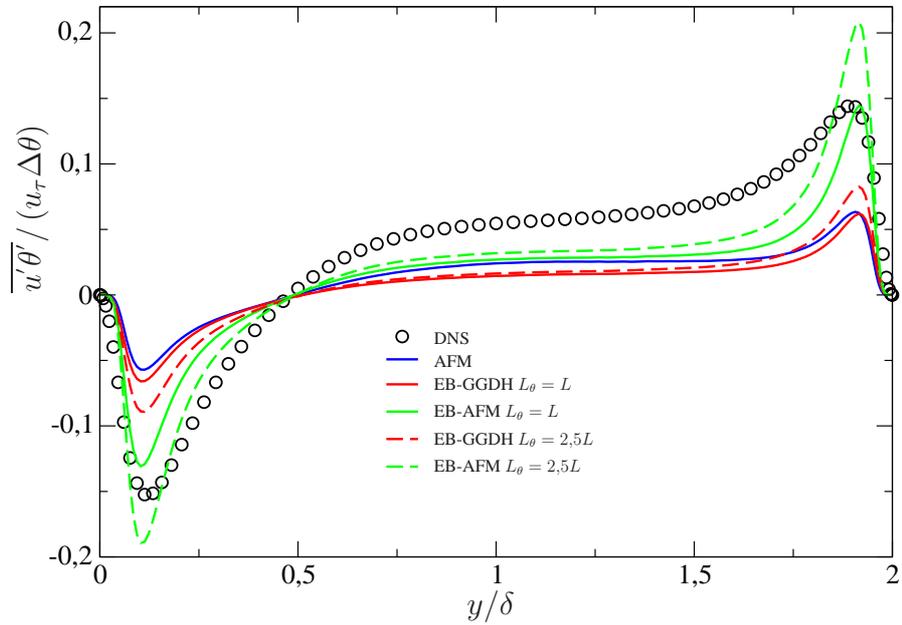
(a)



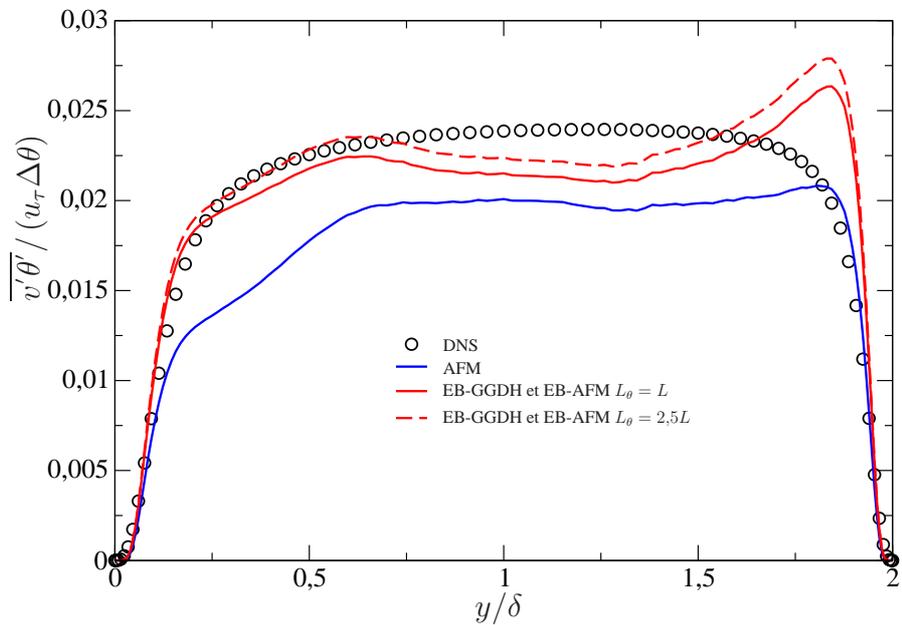
(b)

FIG. 4.23 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ et $Pr = 0,71$. Influence de l'échelle de longueur dans les modèles algébriques utilisant la pondération elliptique pour $\overline{u'\theta'}$ en (a) et de $\overline{v'\theta'}$ en (b).

4.4.4 Modélisation algébrique des flux thermiques

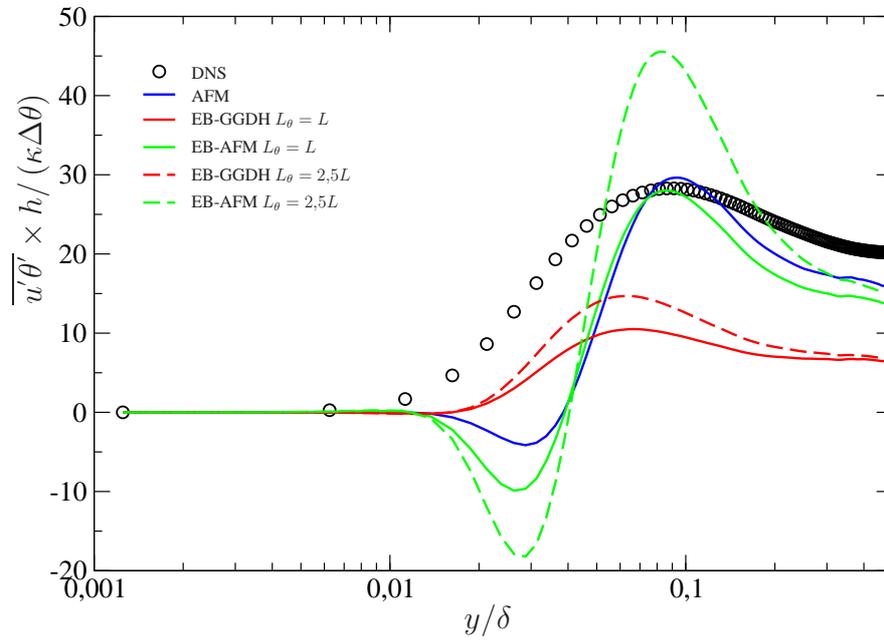


(a)

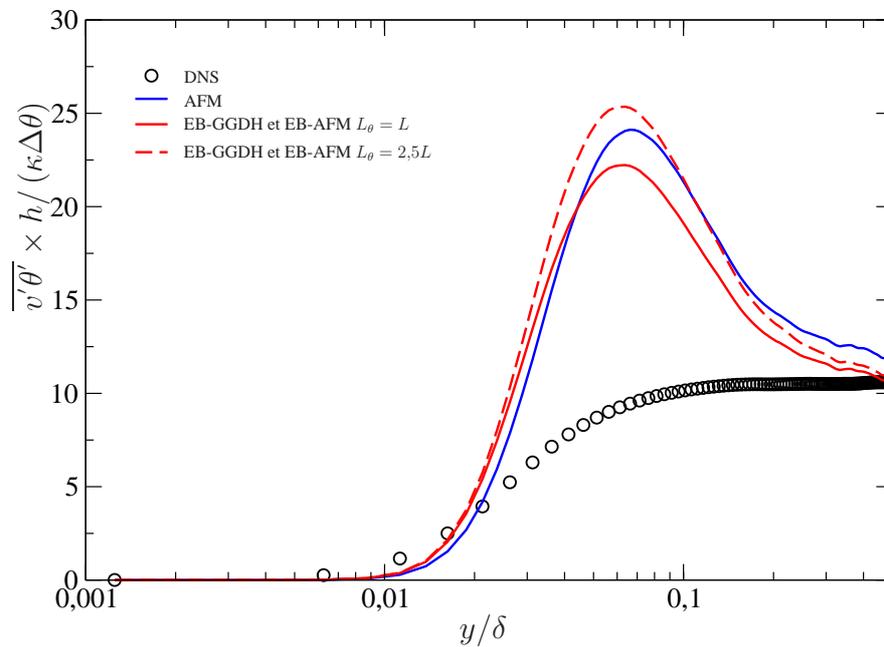


(b)

FIG. 4.24 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Ra = 6,82 \cdot 10^5$ et $Pr = 0,71$. Influence de l'échelle de longueur dans les modèles algébriques utilisant la pondération elliptique pour $\overline{u'\theta'}$ en (a) et de $\overline{v'\theta'}$ en (b).



(a)



(b)

FIG. 4.25 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Influence de l'échelle de longueur dans les modèles algébriques utilisant la pondération elliptique pour $\overline{u'\theta'}$ en (a) et de $\overline{v'\theta'}$ en (b).

4.5 Conclusions des tests *a priori*

Les 3 régimes de convection thermique (forcée, mixte et naturelle) ont été étudiés en *a priori*. La différence des termes de brouillage et de dissipation des flux thermiques $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$ qui intervient dans l'équation de transport des flux thermiques a été tout d'abord examinée. Puis, des modèles algébriques des flux thermique $\overline{u_i'\theta'}$ ont été comparés. Les conclusions obtenues sont les suivantes :

- L'utilisation d'une échelle de longueur thermique dans le calcul du facteur de pondération α_θ est plus appropriée que l'utilisation d'une échelle de longueur dynamique. Le meilleur compromis du rapport des échelles de longueur est pris constant et égal à 2,5.
- La modification apportée aux modèles de paroi de $\phi_{i\theta}^w$ et de $\varepsilon_{i\theta}^w$ qui consiste à introduire un coefficient variable nul à la paroi et loin de la paroi s'avère prometteuse. Le modèle utilisant le rapport $(P + G)/\varepsilon$ semble donner globalement de meilleurs résultats que celui utilisant $P_\theta/\varepsilon_\theta$, même si ce dernier est le seul à capter les variations des $\phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$ en convection naturelle.
- L'apport du GGDH est indéniable par rapport au SGDH (modèle utilisé le plus souvent dans l'industrie et seul disponible aujourd'hui dans *Code_Saturne*) pour la prédiction des flux thermiques turbulents. Il permet en effet une meilleure prédiction du flux thermique normal à la paroi, celui qui rentre en compte directement dans le calcul de la température et de la variance de celle-ci, ainsi qu'une prédiction non nulle du flux longitudinal qui entre dans le calcul des termes de production par flottabilité des tensions de Reynolds et de la dissipation turbulente.
- L'apport de l'AFM est clairement visible pour le flux longitudinal.
- La pondération elliptique donne de bons résultats dans la zone de proche paroi dans les cas de convection mixte et forcée. En revanche, en convection naturelle, elle donne de mauvais résultats pour le flux longitudinal lorsqu'elle est associée à une fermeture de type AFM, ceci provenant d'une mauvaise modélisation de base des $\phi_{i\theta}^h$, $\varepsilon_{i\theta}^w$ et $\phi_{i\theta}^w$.

Ces conclusions vont être vérifiées dans la suite sur les mêmes cas mais à travers des calculs *a posteriori*, puis sur des cas semi-académiques de convection naturelle en cavité fermée et enfin sur un cas industriel en convection forcée, le temps n'ayant pas permis d'en effectuer en convection naturelle.

Chapitre 5

Récapitulatif des modèles utilisés dans la thèse

Les tests *a priori* précédents ont permis de calibrer les constantes des différents modèles. On rappelle ici les équations qui seront utilisées dans les calculs présentés dans les chapitres applicatifs suivants.

Pour la dynamique, le modèle EB-RSM (Manceau & Hanjalić [62]), qui pour rappel, est un modèle au second ordre utilisant la pondération elliptique, a été utilisé pour toutes les simulations. Lors de cette thèse, deux modifications ont été apportées dans l'équation de la dissipation turbulente ε , la première portant, pour des raisons de stabilité, sur la constante $C'_{\varepsilon 1}$ qui intervient dans la production dynamique et la seconde sur l'échelle de temps à utiliser pour la production due à la flottabilité.

Pour les tensions de Reynolds, le modèle suivant est utilisé :

$$\frac{\partial \rho R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \rho R_{ij} \overline{u_k}}{\partial x_k} = \rho (P_{ij} + d_{ij}^{\nu} + d_{ij}^t + \phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij} + G_{ij}) \quad (5.1)$$

$$d_{ij}^t = -C_S \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\tau R_{km} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_m} \right) \quad (5.2)$$

avec $C_S = 0,21$ et $\tau = \max \left(\frac{k}{\varepsilon}, C_T \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right)$

$$\phi_{ij}^* = (1 - \alpha^3) \phi_{ij}^w + \alpha^3 \phi_{ij}^h \quad (5.3)$$

avec :

$$\phi_{ij}^w = -5 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{ik} n_j n_k + R_{jk} n_i n_k - \frac{1}{2} R_{kl} n_k n_l (n_i n_j + \delta_{ij}) \right) \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
\phi_{ij}^h = & - \left(C_1 \varepsilon + C_2' P_k \right) a_{ij} + \left(C_3 - C_3' \sqrt{a_{kl} a_{kl}}^{0.5} \right) k S_{ij} \\
& + C_4 k \left(a_{ik} S_{jk} + a_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) + C_5 k (a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik}) \\
& - C_6 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right)
\end{aligned} \quad (5.5)$$

avec

$$C_1 = 1,7; C_2' = 0,9; C_3 = 0,8; C_3' = 0,65; C_4 = 0,625; C_5 = 0,2 \text{ et } C_6 = 0,5$$

$$\underline{n} = \frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|} \quad (5.6)$$

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \alpha^3) \varepsilon_{ij}^w + \alpha^3 \varepsilon_{ij}^h \quad (5.7)$$

avec

$$\varepsilon_{ij}^w = \frac{R_{ij}}{k} \varepsilon \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_{ij}^h = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (5.9)$$

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1 \quad (5.10)$$

$$L = C_L \left(C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}}, \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \right) \quad (5.11)$$

où $C_L = 0,125$ et $C_\eta = 80$.

Pour la dissipation turbulente :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \varepsilon u_j}{\partial x_j} = & \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_S^\varepsilon \tau R_{km} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial x_m} \right)}_{D_\varepsilon^t} + C_{\varepsilon_1} \left(1 + A_1^P (1 - \alpha^3) \frac{P_k}{\varepsilon} \right) \frac{P_k}{\tau} \\
& + C_{\varepsilon_3} \frac{\sqrt{Pr} G_k}{\sqrt{R} \tau} - C_{\varepsilon_2} \rho \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)
\end{aligned} \quad (5.12)$$

où $C_S^\varepsilon = \frac{0,21}{1,15} \approx 0,183$; $C_{\varepsilon_1} = 1,44$; $C_{\varepsilon_2} = 1,83$; $C_{\varepsilon_3} = 2,02$; $\sigma_\varepsilon = 1,1$; $A_1^P = 0,1$ et

$$\tau = \max \left(\frac{k}{\varepsilon}, C_T \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right)$$

Quand les flux thermiques turbulents seront calculés à l'aide d'une équation de transport, on utilisera deux variantes :

– La première utilisant la pondération elliptique (EB-DFM pour Elliptic Blending-Differential Flux Model) :

$$\frac{D \overline{u_i' \theta'}}{Dt} = P_{i\theta}^U + P_{i\theta}^T + G_{i\theta} + \phi_{i\theta}^* - \varepsilon_{i\theta} + D_{i\theta}^t + D_{i\theta}^\nu \quad (5.13)$$

CHAPITRE 5. RÉCAPITULATIF DES MODÈLES UTILISÉS DANS LA THÈSE

$$D_{i\theta}^t = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\theta} \overline{u'_k u'_l} \tau \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_l} \right) \quad (5.14)$$

$$D_{i\theta}^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\kappa + \nu}{2} \delta_{kl} \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_l} \right) \quad (5.15)$$

$$\phi_{i\theta}^* = (1 - \alpha_{\theta}) \phi_{i\theta}^w + \alpha_{\theta} \phi_{i\theta}^h \quad (5.16)$$

$$\varepsilon_{i\theta} = (1 - \alpha_{\theta}) \varepsilon_{i\theta}^w + \alpha_{\theta} \varepsilon_{i\theta}^h \quad (5.17)$$

$$\phi_{i\theta}^h = -\frac{\sqrt{R^h}}{\sqrt{R}\tau} C_{1\theta} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (5.18)$$

$$\phi_{i\theta}^w = -\frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}\tau} \left[1 + C_{w\theta}^{\phi} (1 - \alpha_{\theta}) \frac{P + G}{\varepsilon} \right] \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \quad (5.19)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^w = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}\tau} C_{\varepsilon} \left[1 + C_{w\theta}^{\varepsilon} (1 - \alpha_{\theta}) \frac{P + G}{\varepsilon} \right] \left(\overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right) \quad (5.20)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^h = 0 \quad (5.21)$$

$$\tau = \frac{k}{\varepsilon}, C_{1\theta} = 4,15, C_{2\theta} = 0,3, C_{3\theta} = 0,5, C_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right), C_{w\theta}^{\phi} = 2 \text{ et } C_{w\theta}^{\varepsilon} = -0,3$$

Le facteur de pondération elliptique appliqué à la thermique est résolu *via* :

$$\alpha_{\theta} - L_{\theta}^2 \nabla^2 \alpha_{\theta} = 1 \quad (5.22)$$

$$L_{\theta} = 2,5L \quad (5.23)$$

– La seconde sans pondération elliptique (DFM pour Differential Flux Model) :

$$\frac{D \overline{u'_i \theta'}}{Dt} = P_{i\theta}^U + P_{i\theta}^T + G_{i\theta} + \phi_{i\theta}^h - \varepsilon_{i\theta}^h + D_{i\theta}^t + D_{i\theta}^{\nu} \quad (5.24)$$

$$\phi_{i\theta}^h = -\frac{1}{\tau} C_{1\theta} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} \quad (5.25)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^h = 0 \quad (5.26)$$

Les équations 5.14 et 5.15 s'appliquent toujours.

Ils seront également calculés avec des modèles algébriques :

– utilisant la pondération elliptique :

– EB-AFM

$$\overline{u'_i \theta'} = -C_{\theta} \tau \left[\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} + \xi \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \eta \beta g_i \overline{\theta'^2} + \gamma \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right] \quad (5.27)$$

– EB-GGDH

$$\overline{u'_i \theta'} = -C_\theta \tau \left[\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \gamma \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_j \theta'} n_i n_j \right] \quad (5.28)$$

$$\text{où } \tau = \frac{k}{\varepsilon}; C_\theta = \frac{\sqrt{R} C'_\theta}{\alpha_\theta C_{1\theta} \sqrt{R^h} + (1 - \alpha_\theta) \sqrt{Pr} \left[C_\varepsilon \left(1 + C'_\theta \sqrt{R} \right) + C'_\theta \sqrt{R} \right]};$$

$$C'_\theta = 0,91; R^h = 0,5; \xi = (1 - \alpha_\theta C_{2\theta}); \eta = (1 - \alpha_\theta C_{3\theta}); \gamma = (1 - \alpha_\theta) (1 + C_\varepsilon);$$

$$C_\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right); C_{1\theta} = 4,15; C_{2\theta} = 0,3 \text{ et } C_{3\theta} = 0,5$$

– et leur pendant plus classique dit « homogène » :

– AFM

$$\overline{u'_i \theta'} = -C_\theta \tau \left[\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \xi \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \eta \beta g_i \overline{\theta'^2} \right] \quad (5.29)$$

– GGDH

$$\overline{u'_i \theta'} = -C_\theta \tau \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \quad (5.30)$$

$$\text{où } \tau = \frac{k}{\varepsilon}; C_\theta = \frac{C'_\theta}{C_{1\theta}}; C'_\theta = 0,98; \xi = (1 - C_{2\theta}); \eta = (1 - C_{3\theta}); C_{1\theta} = 4,15;$$

$$C_{2\theta} = 0,3 \text{ et } C_{3\theta} = 0,5$$

– SGDH

$$\overline{u'_i \theta'} = -\frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \quad (5.31)$$

$$\text{où } \nu_t = C_\mu k \tau, Pr_t = 0,9 \text{ et } C_\mu = 0,09.$$

L'équation de la variance de la fluctuation de la température s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \frac{\partial \left(\overline{u_j \theta'^2} \right)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\frac{\nu}{Pr} \delta_{kl} + C_{\theta\theta} \overline{\rho u'_k u'_l T} \right) \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_l} \right] + P_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta} \quad (5.32)$$

La production est égale à :

$$P_{\theta\theta} = -2 \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} \quad (5.33)$$

La dissipation de la variance est obtenue *via* le ratio des échelles de temps thermo-mécanique.

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\overline{\theta'^2}}{R} \frac{\varepsilon}{k} \text{ où } R = (1 - \alpha_\theta) Pr + \alpha_\theta R^h \quad (5.34)$$

avec $R^h = 0,5$.

Chapitre 6

Applications académiques

Nous avons vu avec les tests *a priori* que la fermeture avec un modèle GGDH est nettement supérieure à une fermeture de type SGDH pour une complexité guère supérieure, en particulier pour les régimes de convection forcée et mixte avec une meilleure estimation du flux thermique turbulent normal à la paroi et une prédiction non nulle du flux thermique longitudinal. Il a également été observé que le comportement des modèles algébriques à pondération elliptique est globalement bon et que les modifications apportées aux modèles des termes $\phi_{i\theta}$ et $\varepsilon_{i\theta}$ qui interviennent dans les équations de transports des $\overline{u_i'\theta'}$ sont prometteuses. Tout ceci va être vérifié dans cette partie à l'aide de test *a posteriori*. Toutes les simulations ont été effectuées avec l'outil industriel de CFD *Code_Saturne* v1.3.3 modifié pour le traitement de la thermique (on pourra se reporter à l'Annexe E pour les aspects numériques de ce code). En particulier, les différentes fermetures des flux thermiques ont été ajoutées et la variance est calculée à partir d'une équation de transport. La convergence en maillage a été obtenue pour ces 3 cas monodimensionnels.

6.1 Convection forcée

La convection forcée fait intervenir la thermique de façon passive, on veut donc confirmer que l'EB-RSM donne de bons résultats sur la dynamique (voir par exemple Thielen et al. [83] ou Lecocq [55]) et comparer les modèles de flux thermiques sans flottabilité. On traite ici le cas de Abe et al. [1] déjà présenté au paragraphe 4.1.1. Pour ce cas de convection forcée en canal, les équations de l'énergie et de quantité de mouvement sont adimensionnées. Le nombre de Reynolds de frottement Re_τ vaut 640 et le nombre de Prandtl $Pr = 0,71$. Les

échelles de vitesse $u_\tau = \sqrt{\nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_w}$ (la vitesse de frottement), de masse ρh^3 , de longueur $\frac{\nu}{u_\tau}$ et de température $\theta_\tau = \frac{q_w}{\rho C_p u_\tau}$ interviennent également dans l'adimensionnement des grandeurs fournies dans la base de données, par exemple pour la viscosité ou encore la diffusivité thermique. Les équations de conservation moyennées de la quantité de mouvement et de l'énergie se réduisent dans le cas présent à :

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (6.1)$$

$$0 = \frac{1}{Re_\tau Pr} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v'\theta'} \right) + \frac{\bar{u}}{u_{bulk}} \quad (6.2)$$

$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x}$ est le gradient de pression constant qui impose le mouvement du fluide dans la direction x et le terme $\frac{\bar{u}}{u_{bulk}}$, où u_{bulk} est la vitesse débitante, sert à prendre en compte la partie linéaire de la température moyenne qui doit être soustraite pour pouvoir considérer la direction x périodique ($\bar{\theta}$ est en effet l'écart à la partie linéaire de la température et non la température moyenne proprement dite). Dans les équations précédentes, \bar{u} , $\overline{u'v'}$, x , y , $\bar{\theta}$ et $\overline{v'\theta'}$ sont adimensionnées.

6.1.1 Dynamique

Dans cette partie, la thermique est passive, 5 modèles de turbulence sont testés :

- l'EB-RSM modifié dans cette thèse ;
- l'EB-RSM de Thielen et al. [83] qui est utilisé par Shin et al. [78] et Choi et al. [15] (voir Annexe C, les modèles EB-RSM Shin et al. [78] et EB-RSM Choi et al. [15] dans le tableau C.1) ;
- l'EB-RSM modifié par Choi et al. [15] (voir Annexe C, le modèle EB-RSM Choi et al. [15] modifié dans le tableau C.1) pour modéliser un écoulement en convection naturelle dans une cavité fermée différentiellement chauffée ;
- le $k - \omega SST$ [64] ;
- le $\phi - \bar{f}$ qui est un modèle de type $v^2 - f$ [54].

Les 2 derniers modèles sont les seuls modèles dit « bas Reynolds » disponibles dans *Code-Saturne* (v1.3.3). L'EB-RSM y a été intégré durant cette thèse à l'aide des développements de Manceau et al. [62, 60] et de Lecocq [55].

La figure 6.1(a) représente la vitesse moyenne de l'écoulement. Elle est bien représentée par tous les modèles sauf le modèle EB-RSM modifié par Choi et al. [15] (cf Annexe C). Ce dernier modèle contient une modification de la constante de l'échelle de longueur de Kolmogorov qui améliore la modélisation d'un écoulement en cavité fermée différentiellement chauffée mais qui n'est pas adaptée à la convection forcée. On verra dans la suite que les modifications apportées dégradent pour toutes les variables les résultats de l'EB-RSM de Thielen et al. [83].

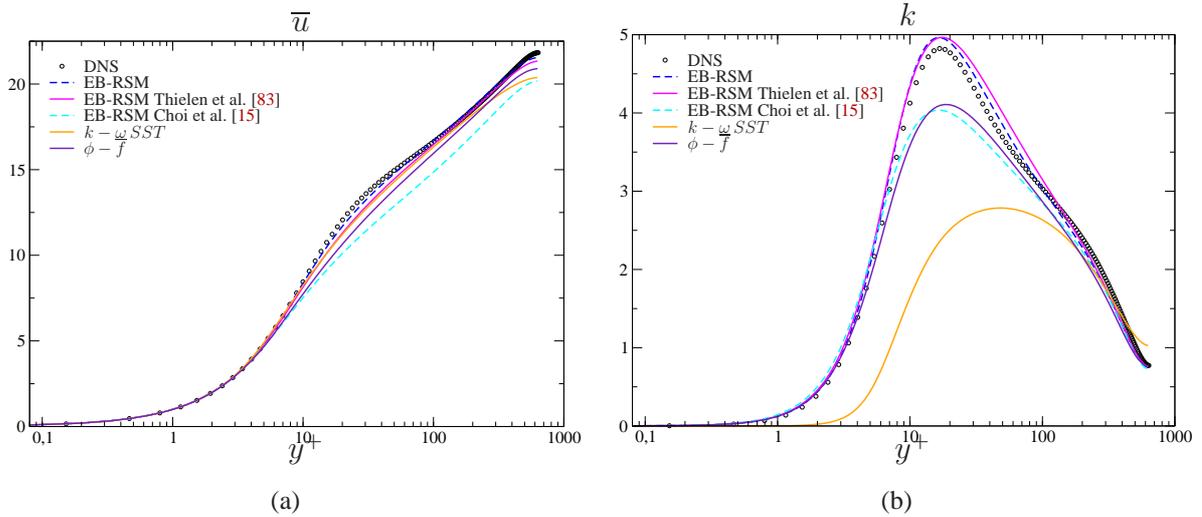


FIG. 6.1 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de vitesse moyenne de l'écoulement \bar{u} et de l'énergie cinétique turbulente entre les modèles $k - \omega$ SST, $\phi - \bar{f}$ et 3 variantes de l'EB-RSM celle de Thielen et al. [83], celle de Choi et al. [15] et celle modifiée dans cette thèse.

La figure 6.1(b) donne les profils de l'énergie cinétique turbulente. Tous les modèles EB-RSM, sauf celui modifié par Choi et al. [15], donnent de très bons résultats. Le $k - \omega$ SST sous-estime largement le pic de k avec une localisation du maximum autour de $y^+ = 40$ au lieu de $y^+ = 11$, cela est en partie dû aux conditions limites sur ω comme le montre la figure 6.2(b) où l'on peut voir qu'avec le $k - \omega$ SST, la valeur de ω à la paroi est beaucoup trop élevée. Cette erreur se répercute dans le profil de la dissipation turbulente ε (figure 6.2(a)) où pour le modèle $k - \omega$ SST, la dissipation tend vers 0 à la paroi alors qu'elle devrait être maximale. Les modèles basés sur l'EB-RSM donnent tous de bons résultats pour la dissipation (ω est calculé à partir de $\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu k}$).

Les figures suivantes (6.3(a),(b),(c) et (d)) montrent les différentes tensions de Reynolds R_{ij} . Seuls les modèles EB-RSM sont comparés car le $k - \omega$ SST et le $\phi - \bar{f}$ sont des modèles du premier ordre et ne reproduisent pas ces quantités de manière correcte. On pourrait

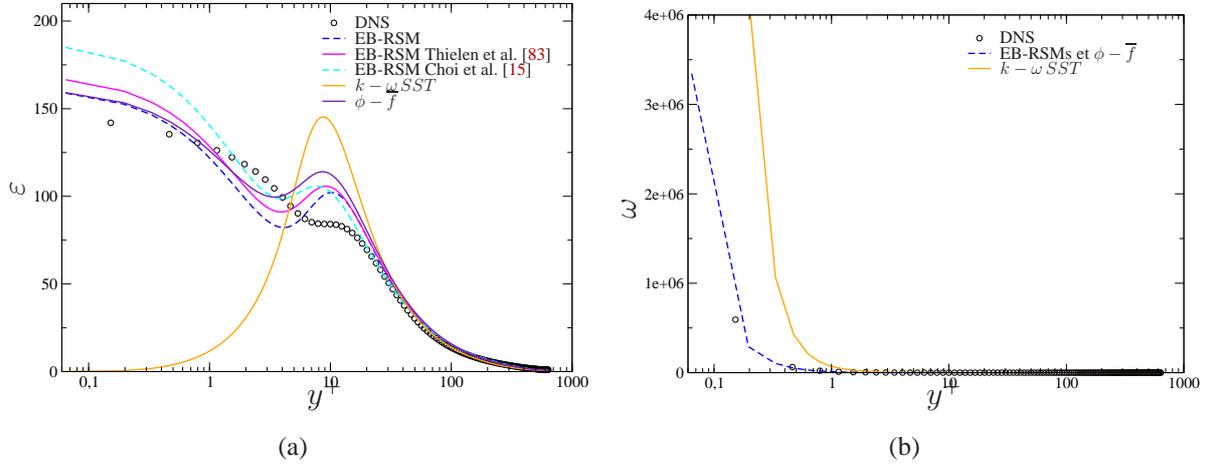


FIG. 6.2 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de dissipation de l'énergie cinétique turbulente ε et la fréquence caractéristique des gros tourbillons ω , tel que $\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu k}$ entre les modèles $k-\omega$ SST, $\phi - \bar{f}$ et 3 variantes de l'EB-RSM celle de Thielen et al. [83], celle de Choi et al. [15] et celle modifiée dans cette thèse.

représenter $\sqrt{\frac{2}{3}k}$ pour les R_{ii} et $-\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ pour $\overline{u'v'}$, mais cela ne présente pas de réel intérêt. Ces courbes confirment que les modifications de Choi et al. [15] ne sont pas adaptées à un écoulement avec thermique passive. En revanche, les deux autres prédisent de façon très satisfaisante toutes les tensions de Reynolds. Une légère différence apparaît entre l'EB-RSM de Thielen et al. [83] et celui de cette thèse, elle est due à une différence de puissance pour le facteur de pondération elliptique et une modification de la constante de la production de la dissipation (cf Annexe C).

Ces différentes figures ont permis de confronter 5 modèles de turbulence bas Reynolds dont 3 de type EB-RSM. Elles confirment l'emploi de l'EB-RSM modifié dans cette thèse car il représente le mieux toutes les variables de la dynamique. La suite concerne la modélisation de la thermique et en particulier celle des flux thermiques turbulents. L'attention sera portée sur l'échelle de longueur à utiliser pour la pondération elliptique associée aux modèles de flux. De plus, différents modèles algébriques et à équations de transport sont confrontés.

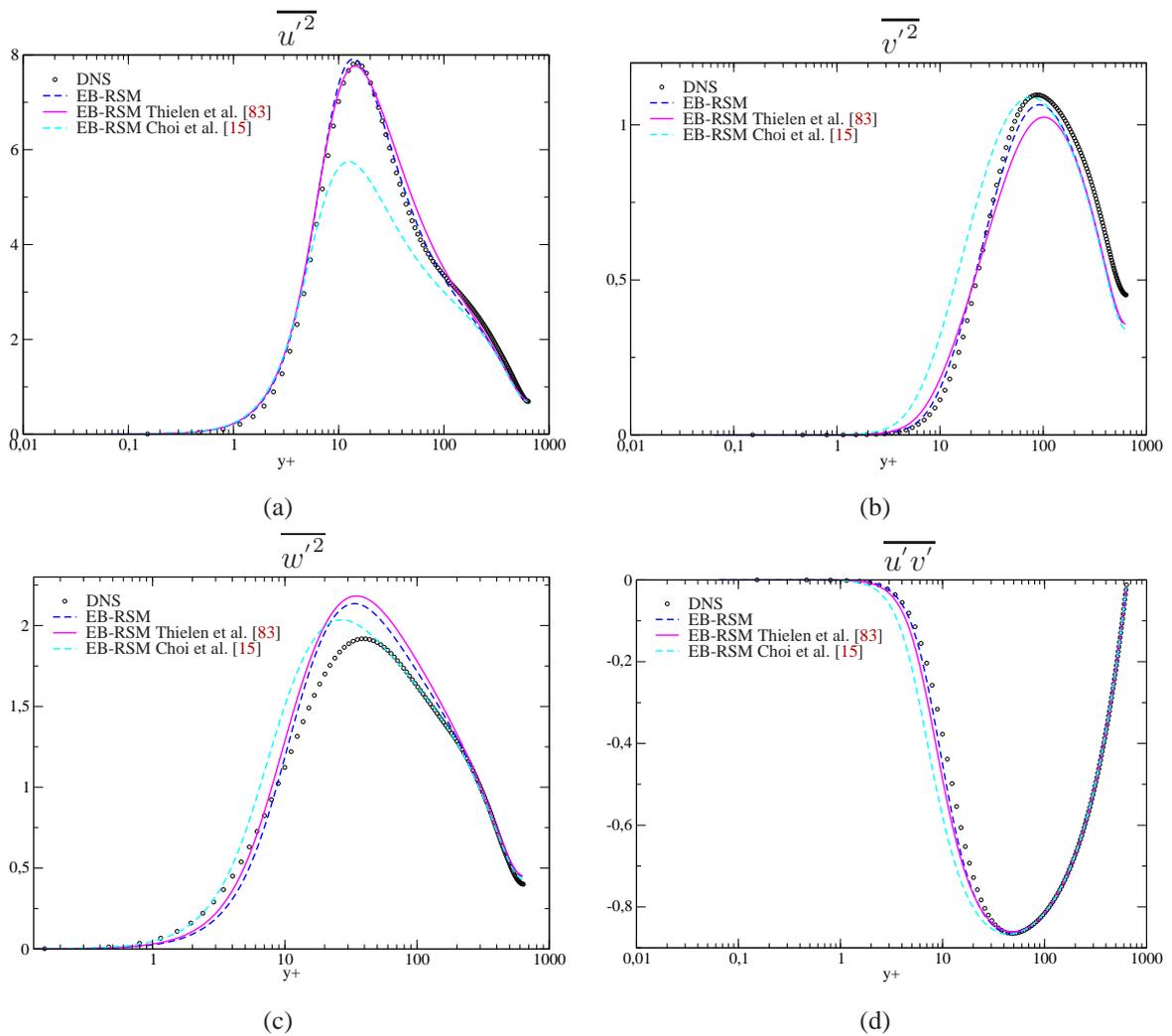


FIG. 6.3 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils des tensions de Reynolds ((a) $\overline{u'^2}$, (b) $\overline{v'^2}$, (c) $\overline{w'^2}$ et (d) $\overline{u'v'}$) entre 3 variantes de l'EB-RSM ; celle de Thielen et al. [83], celle de Choi et al. [15] et celle modifiée dans cette thèse.

6.1.2 Echelle de longueur L_θ

Ce paragraphe montre les effets de l'utilisation de l'échelle de longueur thermique à la place de celle de la dynamique pour le calcul du facteur de pondération α_θ utilisé lors de la résolution des flux thermiques turbulents à l'aide des modèles EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM.

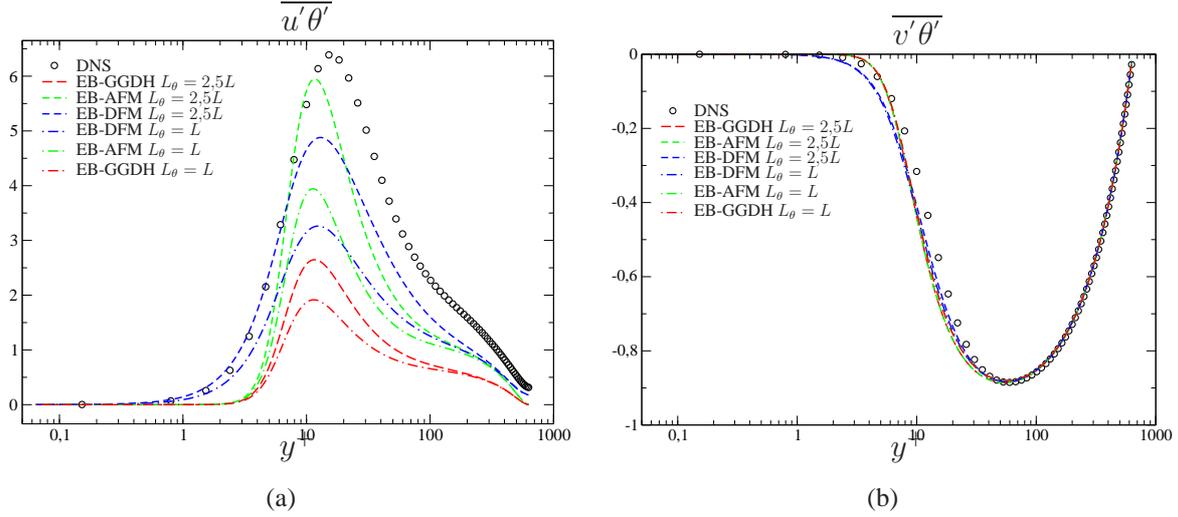


FIG. 6.4 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ et $Pr = 0,71$. Influence de l'échelle de longueur dans les modèles de thermique utilisant la pondération elliptique EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM associé à l'EB-RSM sur les profils des flux thermiques turbulents $\overline{u'\theta'}$ en (a) et $\overline{v'\theta'}$ en (b).

L'avantage d'adopter l'échelle de longueur thermique ($L_\theta = 2,5L$) à la place de celle de la dynamique ($L_\theta = L$) se remarque clairement avec le flux thermique longitudinal 6.4(a). Ainsi, la valeur du pic est mieux reproduite. En revanche, mais ceci n'est pas dû à la valeur de L_θ , la localisation du pic est légèrement décalée vers la paroi par rapport à la DNS. Le problème de pics trop pointus des modèles algébriques observé *a priori* a quasiment disparu. Ceci est en partie dû au gradient de température qui est moins abrupt que celui de la DNS dans cette zone. L'utilisation des modèles à équations de transport résout encore plus ce problème car ils utilisent des termes de diffusion qui permettent d'aplatir ce pic. En dehors du flux thermique longitudinal $\overline{u'\theta'}$, les autres variables sont globalement bien représentées que l'on utilise ou pas une échelle de longueur thermique. Ceci s'explique par le fait que le flux thermique normal $\overline{v'\theta'}$ 6.4(b) est bien représenté peu importe l'échelle de longueur et le modèle utilisé. Cette bonne prédiction se répercute directement sur les profils de température 6.5(a) et de sa variance 6.5(b). Cette dernière est également améliorée grâce à une meilleure estimation de $\varepsilon_{\theta\theta}$.

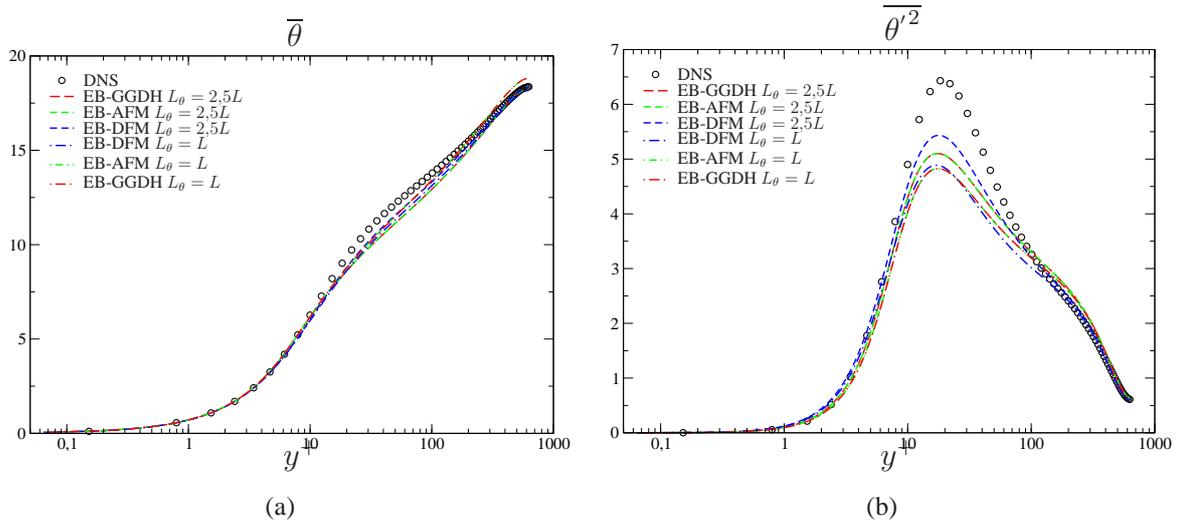


FIG. 6.5 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ et $Pr = 0,71$. Influence de l'échelle de longueur dans les modèles de thermique utilisant la pondération elliptique EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM associés à l'EB-RSM sur les profils de température $\bar{\theta}$ en (a) et de sa variance $\overline{\theta'^2}$ en (b).

Ce cas indique que l'utilisation de l'échelle de longueur thermique à la place de l'échelle de longueur dynamique améliore les résultats sans être une révolution. Comme indiqué précédemment, le fait de différencier ces deux échelles engendre un coût de calcul supplémentaire lié à la résolution de α_θ mais celui-ci est négligeable, environ 1% du coût total de calcul. La partie suivante expose une comparaison des modèles de flux thermique à équations de transport utilisant la pondération elliptique.

6.1.3 Comparaison des modèles à équation de transport

Dans ce paragraphe, des modèles de flux thermiques turbulents à équation de transport utilisant la pondération elliptique, appelés EB-DFM, sont comparés entre eux ainsi qu'à une version sans pondération elliptique, nommée DFM. Les modèles de flux de Choi et al. [15] et de Shin et al. [78] utilisent pour la dynamique l'EB-RSM de Thielen et al. [83] (cf Annexe C). Choi et al. [15] ont également utilisé une variante de l'EB-RSM de Thielen et al. [83] (cf Annexe C), ces résultats sont eux aussi montrés et seront appelés « EB-DFM Choi modifié ». A noter que l'on a reproduit les résultats publiés de Shin et al. [78] en canal et Choi et al. [15] en cavité. La figure 6.6 montre la température moyenne en (a), la variance de sa fluctuation en (b) et les flux thermiques $\overline{u'\theta'}$ en (c) et $\overline{v'\theta'}$ en (d).

Le modèle de Choi modifié est très mauvais en convection forcée pour toutes les variables

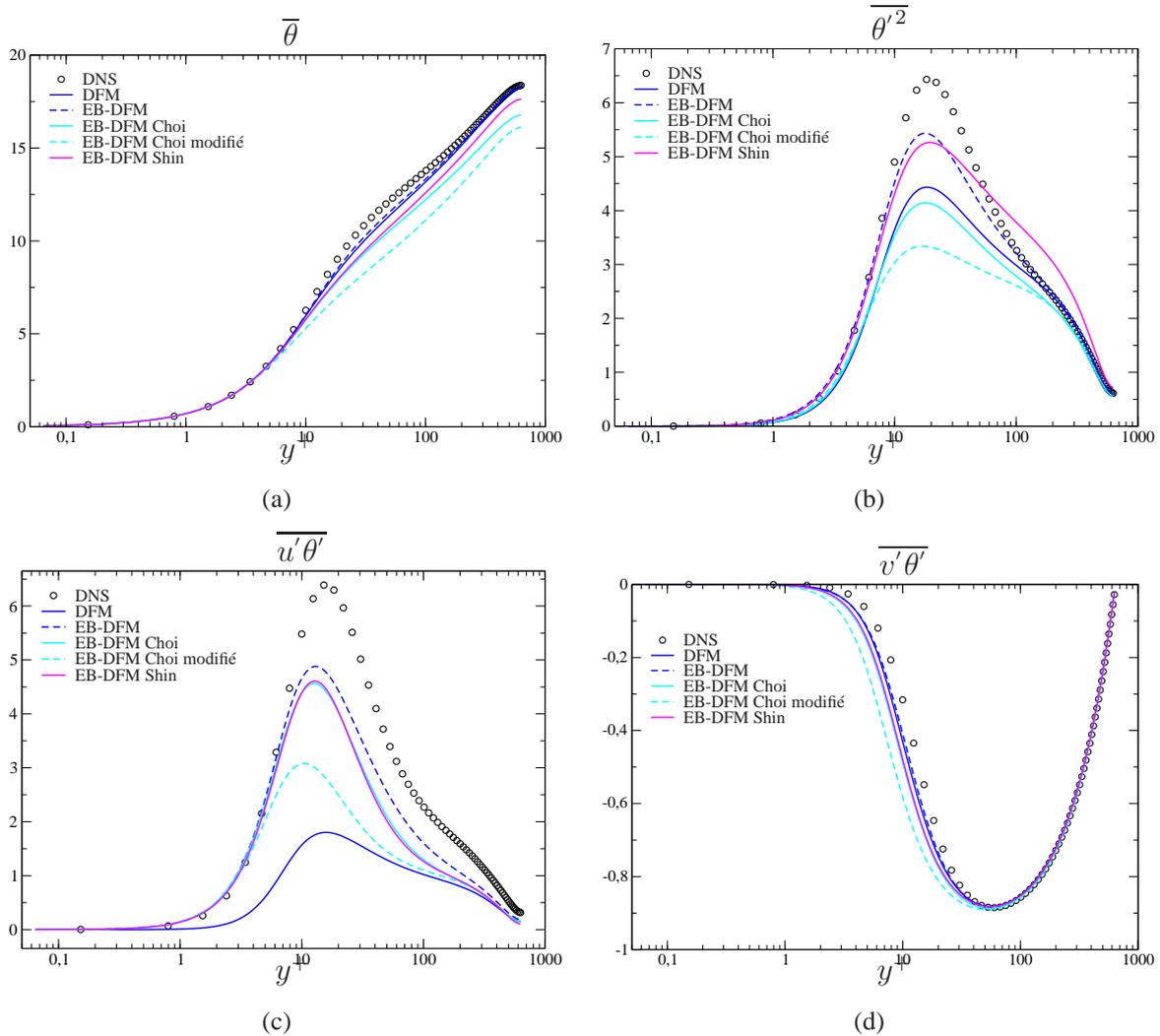


FIG. 6.6 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de température $\bar{\theta}$ en (a), de sa variance $\overline{\theta'^2}$ en (b), du flux turbulent longitudinal $\overline{u'\theta'}$ en (c) et du flux normal $\overline{v'\theta'}$ en (d) entre des modèles à équations de transport avec pondération elliptique EB-DFM associés à leur variante de l'EB-RSM celle de Thielen et al. [83], celle de Choi et al. [15] et celle modifiée dans cette thèse.

thermiques, il est à proscrire car l'objectif est d'avoir un modèle fonctionnant dans les trois régimes de convection. Les modèles de Choi et de Shin sous-estiment la température et donnent des résultats qui sont globalement bons sauf pour la variance que le modèle de Shin surestime pour $50 < y^+ < 400$. Cette différence est due en partie au ratio des échelles thermo-mécaniques R qui est plus élevé avec le modèle de Shin. On leur préférera le modèle EB-DFM développé ici, qui même s'il sous-estime encore la variance et le flux turbulent longitudinal, donne des résultats très satisfaisants. On peut remarquer que le modèle n'utilisant

pas la pondération (DFM) donne également de bons résultats sauf pour le flux longitudinal, ceci est dû au fait que le modèle homogène du terme de redistribution $\phi_{2\theta}^h$ est très performant et quasi équivalent au modèle pondéré de $\phi_{2\theta}$. Ces deux derniers modèles vont être comparés dans la suite à des modèles algébriques de conception plus simple.

6.1.4 Comparaison de différents modèles de $\overline{u_i'\theta'}$

La figure 6.7(a) donne le profil de température pour les différents modèles. L'hypothèse de gradient généralisé pour les flux thermiques améliore nettement la prédiction de la température. Les figures 6.7 (c), (d) et (b) donnent respectivement le flux turbulent longitudinal, le flux turbulent normal à la paroi et la variance de la température. Pour la composante du flux thermique normale à l'écoulement $\overline{v'\theta'}$, l'hypothèse de gradient généralisé GGDH permet une meilleure prédiction que celle de l'hypothèse de gradient simple SGDH (d'où la meilleure prédiction de la température moyenne). Une différence apparaît entre les deux approches de modélisation des flux turbulents algébriques et à équations de transport : en effet, les modèles à équation de transport surestiment le résultat de la DNS en valeur absolue dans la zone $2 < y^+ < 6$ alors que les modèles algébriques la représentent très bien. Mais globalement, les différents modèles, mis à part le modèle SGDH, semblent donner le même résultat. Les légères variations du flux normal pour $y^+ > 10$ se retrouvent sur les profils de la température moyenne.

Pour la composante longitudinale, le SGDH prédit une valeur nulle, ce qui est faux, tandis que pour les autres modèles ; plus ils sont évolués, meilleure la prédiction est. On retrouve d'ailleurs la même différence entre les modèles algébriques et ceux de transport dans la zone $1 < y^+ < 5$ mais cette fois à l'avantage du modèle de transport EB-DFM qui capte beaucoup mieux la variation du flux turbulent. En effet, il est le seul à avoir le bon comportement asymptotique. Pour la variance, on retrouve le même problème que pour la température avec le SGDH qui donne une mauvaise prédiction en paroi, puis plus le modèle de fermeture est évolué, plus le résultat se rapproche de ceux de la DNS. La pondération elliptique permet une meilleure prédiction en paroi (il faut se rappeler ici que la variance est résolue à l'aide d'une équation de transport).

En convection forcée, l'EB-RSM confirme qu'il donne d'excellents résultats pour les variables de la dynamique (vitesse, tension de Reynolds). Pour la thermique, les conclusions obtenues en *a priori* sont vérifiées *a posteriori* : plus le modèle de fermeture est évolué, plus le résultat se rapproche de ceux de la DNS pour $\overline{u'\theta'}$ et $\overline{\theta'^2}$. Ce cas confirme qu'il est souhaitable de ne plus utiliser le modèle SGDH avec un modèle de dynamique au second

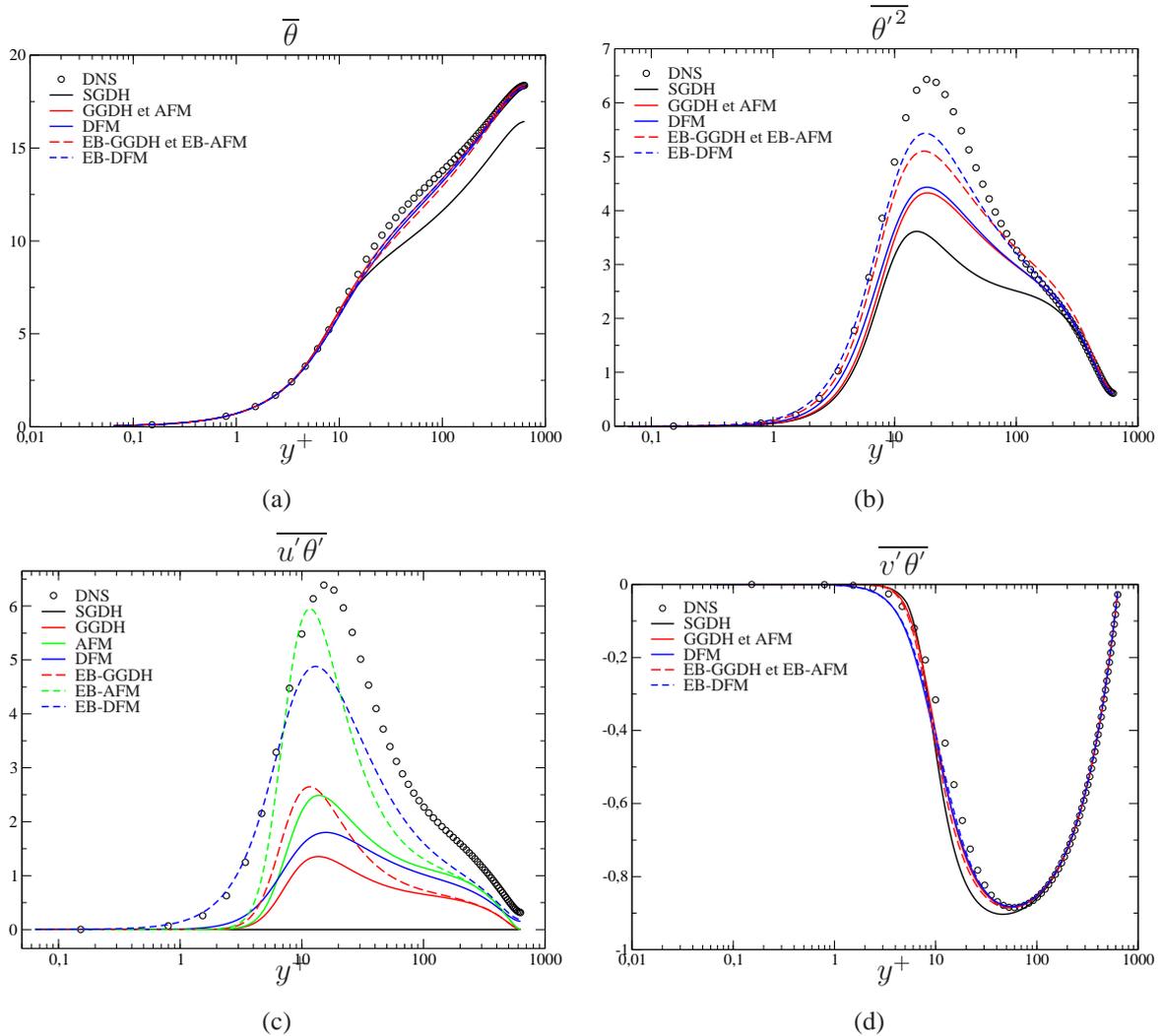


FIG. 6.7 – Canal en convection forcée de Abe et al. [1] à $Re_\tau = 640$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de température $\bar{\theta}$ en (a), de sa variance $\overline{\theta'^2}$ en (b), du flux turbulent longitudinal $\overline{u'\theta'}$ en (c) et du flux normal $\overline{v'\theta'}$ en (d) entre différentes fermetures thermiques avec et sans pondération elliptique (SGDH, GGDH, AFM, DFM, EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM) associées à l'EB-RSM.

ordre et que le modèle GGDH est une alternative qui améliore notablement la prédiction à faible coût en convection forcée.

6.2 Convection mixte

Pour ce cas de convection mixte, la thermique n'intervient plus de façon passive mais joue un rôle sur la dynamique de l'écoulement. Cette fois, les termes de production par flottabilité ne sont plus nuls. Nous allons vérifier dans la suite si les conclusions obtenues pour le cas de convection forcée sont toujours vraies ainsi que l'influence des termes de flottabilité qui sont pris en compte dans les modèles à équations de transport (DFM et EB-DFM), ainsi que dans les modèles algébriques les plus complets comme l'AFM et l'EB-AFM.

La DNS a été effectuée pour 4 nombres de Grashof différents compris entre 0 et $1,6 \cdot 10^8$. Seul le cas à $Gr = 9,6 \cdot 10^5$ a été réalisé avec un maillage assez fin, puisque c'est le seul disponible dans la base de donnée du THTlab. On a toujours $Pr = 0,71$. Les échelles de longueur, de vitesse, de température et de masse sont respectivement $\frac{v}{u_\tau}$, u_τ , $\Delta\theta$ et ρh^3 . On obtient alors les équations simplifiées de la vitesse et de la température :

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial R_{12}}{\partial y} - \frac{Gr}{8Re_\tau^2} \bar{\theta}$$

$$0 = \frac{1}{Re_\tau Pr} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v'\theta'} \right)$$

$\frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x}$ est le gradient de pression constant qui impose le mouvement du fluide dans la direction x . Il n'y a pas besoin de terme source ici pour la température puisque ce sont des conditions de type Dirichlet qui sont imposées à la paroi.

6.2.1 Échelles de longueur et de temps thermiques

Comme ceci a été vu sur le cas de convection forcée, les conclusions sur l'apport de l'utilisation d'une échelle de longueur thermique sont les mêmes quel que soit le modèle de flux turbulent. Dans le cas présent, seuls les résultats avec le modèle à équations de transport et pondération elliptique seront comparés.

Pour rappel, l'échelle de longueur modifiée ici est celle utilisée dans le calcul du facteur de pondération α_θ qui intervient dans l'équation des flux thermiques turbulents $\overline{u'_i \theta'}$ des modèles EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM. L'échelle de temps modifiée agit quant à elle au niveau du terme de production par flottabilité de la dissipation turbulente (Eq. (5.12)) et dans l'équation des flux thermiques utilisant la pondération elliptique (Eq. (5.13)).

La vitesse donnée par la figure 6.8(a) est bien représentée et la variation de l'échelle ther-

mique n'a quasiment aucun effet sur le profil. Les figures 6.8(b), (c) et (d) représentent respectivement la dissipation, le cisaillement et la tension de Reynolds normale. Le changement d'échelle τ à très peu d'impact sur ces variables. On peut remarquer une amélioration de la prédiction des valeurs maximales pour $\overline{u'v'}$ avec l'utilisation simultanée de l'échelle de temps et de longueur thermique.

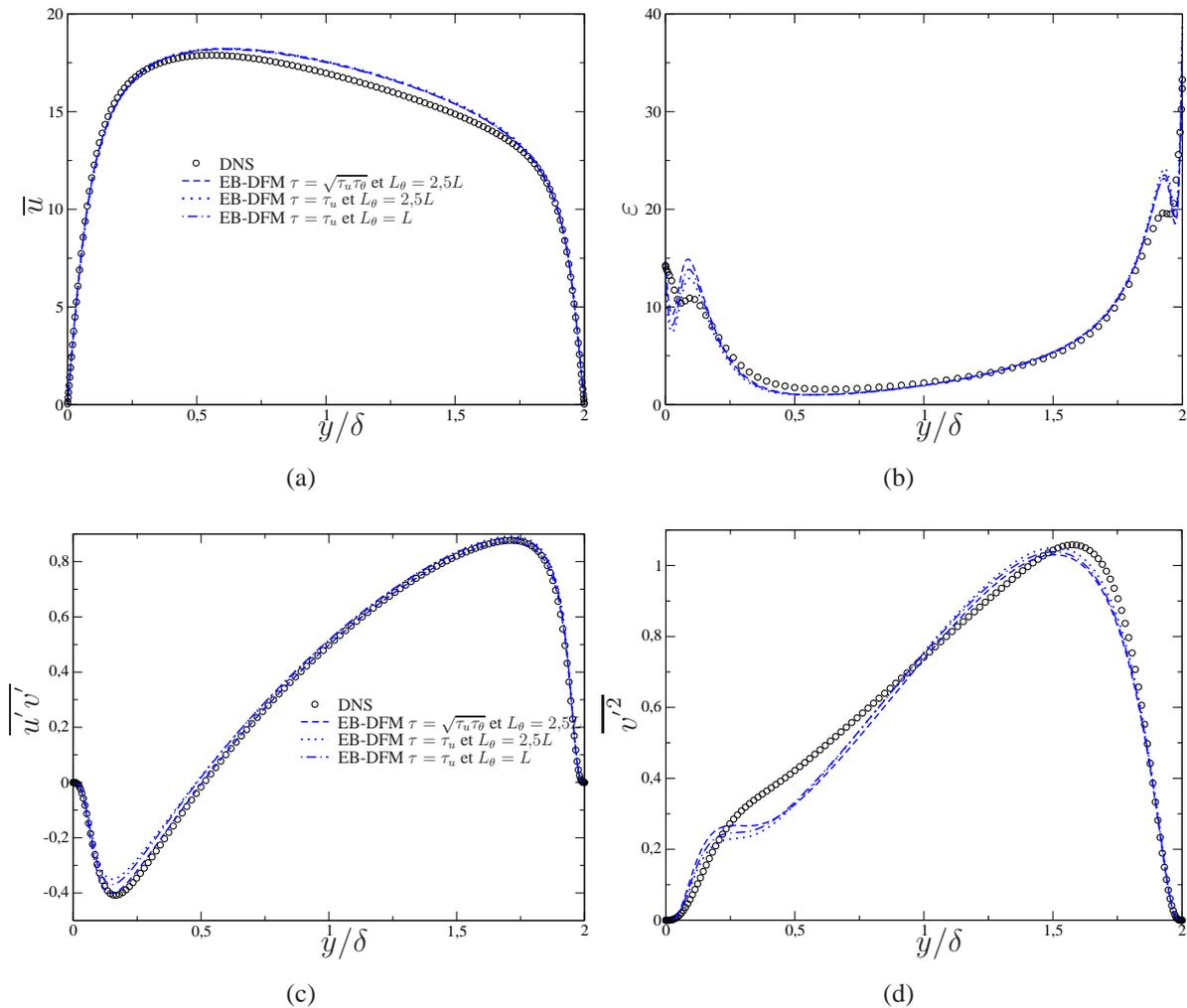


FIG. 6.8 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Gr = 9,6 \cdot 10^5$ et $Pr = 0,71$. Influence des échelles de longueur et de temps dans le modèle de thermique utilisant la pondération elliptique EB-DFM associé à l'EB-RSM sur les profils de vitesse \bar{u} en (a), de dissipation en (b) et des tensions $\overline{u'v'}$ en (c) et $\overline{v'^2}$ en (d).

Le profil de la température 6.9(a) montre que l'utilisation de l'échelle de longueur thermique associée à une échelle de temps dynamique dégrade le profil au centre du canal mais une fois combinée à l'échelle de temps thermique, le profil est parfaitement reproduit. Ceci trouve

CHAPITRE 6. APPLICATIONS ACADÉMIQUES

une réponse en partie avec le profil du flux normal figure 6.9(d) où l'utilisation des deux échelles thermiques permet de combler en partie le manque dans la zone $0,3 < \frac{y}{\delta} < 0,4$. Pour le flux turbulent axial et la variance (respectivement figures 6.9(c) et (b)), l'emploi de l'échelle de longueur thermique a un impact positif plus important que sur toutes les autres variables. C'est cette amélioration qui se répercute dans les profils de $\overline{u'v'}$ et de la dissipation turbulente ε .

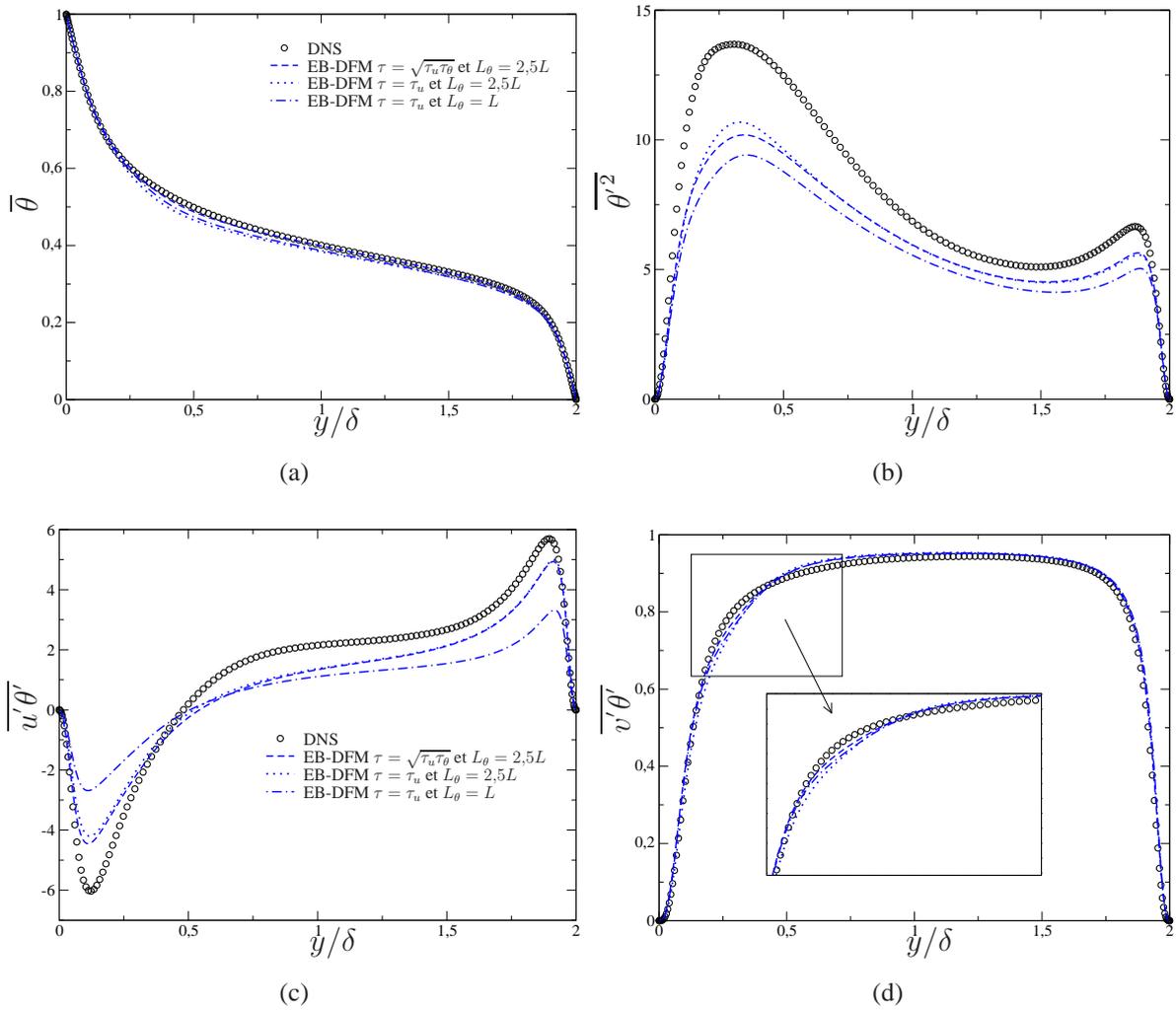


FIG. 6.9 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Gr = 9,6 \cdot 10^5$ et $Pr = 0,71$. Influence des échelles de longueur et de temps dans le modèle de thermique utilisant la pondération elliptique EB-DFM associé à l'EB-RSM sur les profils de température $\bar{\theta}$ en (a), de sa variance en (b) et des flux thermiques $\overline{u'\theta'}$ en (c) et $\overline{v'\theta'}$ en (d).

Dans ce paragraphe, l'effet des échelles de temps et de longueur thermique ont été analysés. Il en résulte les mêmes conclusions qu'après les tests *a priori*. L'emploi d'une échelle de

longueur thermique est en général bénéfique. De plus, si cette modification est associée à l'emploi d'une échelle de temps mixte thermique/dynamique, les résultats sont encore améliorés. Il en résulte que le meilleur compromis en convection mixte est d'utiliser une échelle de longueur thermique $L_\theta = 2,5L$ combinée avec une échelle de temps mixte $\tau = \sqrt{\tau_u \tau_\theta} = \sqrt{R} \tau_u$.

6.2.2 Comparaison des modèles à équations de transport

Les figures 6.10(a), (b), (c) et (d) montrent les profils de vitesse, de dissipation, de cisaillement et de la tension normale pour les différentes variantes de l'EB-DFM et pour le DFM développé dans la présente thèse. Les mêmes conclusions qu'en convection forcée peuvent être données, c'est-à-dire que le modèle de Choi et al. [15] modifié pour un cas de convection naturelle ne fonctionne pas en convection mixte. Les autres modèles à équations de transport donnent des résultats similaires qui sont en accord avec les données DNS.

Le profil de température figure 6.11(a) est le mieux prédit par les modèles DFM et EB-DFM développés dans cette thèse. Les EB-DFM utilisant l'EB-RSM de Thielen et al. [83] reproduisent bien l'évolution de la température en paroi mais la sous-estiment au centre du canal. Ces différences s'expliquent par le profil du flux turbulent normal 6.11(d) qui contrôle l'allure du profil de température. Une légère variation de $\overline{v'\theta'}$ entraîne un décalage de la température. Les écarts observés avec la variance $\overline{\theta'^2}$ 6.11(b) viennent en grande partie de $\overline{v'\theta'}$ mais également de la façon dont est modélisée la dissipation de la variance ε_θ . Dans tous les cas, cette variable n'est pas résolue *via* une équation de transport mais grâce au ratio des échelles de temps R . Pour les modèles de Choi et al. [11] et le modèle sans pondération DFM, R est choisi constant et égal à 0,5. Pour le modèle de Shin et al. [78], R est aussi pris constant mais égal à 0,625, ce qui correspond à une valeur plus proche de la DNS $\approx 0,55$. Enfin pour l'EB-DFM développé ici, R est pris variable pour prendre en compte la valeur de R au bord qui est égal à Pr , tel que $R = (1 - \alpha_\theta)Pr + \alpha_\theta R^h$ avec $R^h = 0,5$. Cette dernière formulation permet de reproduire le mieux la forme du profil de la variance. En ce qui concerne le flux turbulent axial sur la figure 6.11(c), la pondération elliptique le corrige assez nettement mais il y a toujours un manque au centre du canal.

On a pu voir dans ce paragraphe que la modification apportée par Choi et al. [11] au modèle de turbulence afin d'adapter leur modèle à un cas de convection naturelle n'est pas transposable à ce cas de convection mixte. Cette modification sera testée sur le cas suivant qui est en convection naturelle. La pondération elliptique améliore légèrement les résultats, les seules variables véritablement bonifiées sont $\overline{u'\theta'}$ et $\overline{\theta'^2}$. La partie suivante va permettre de

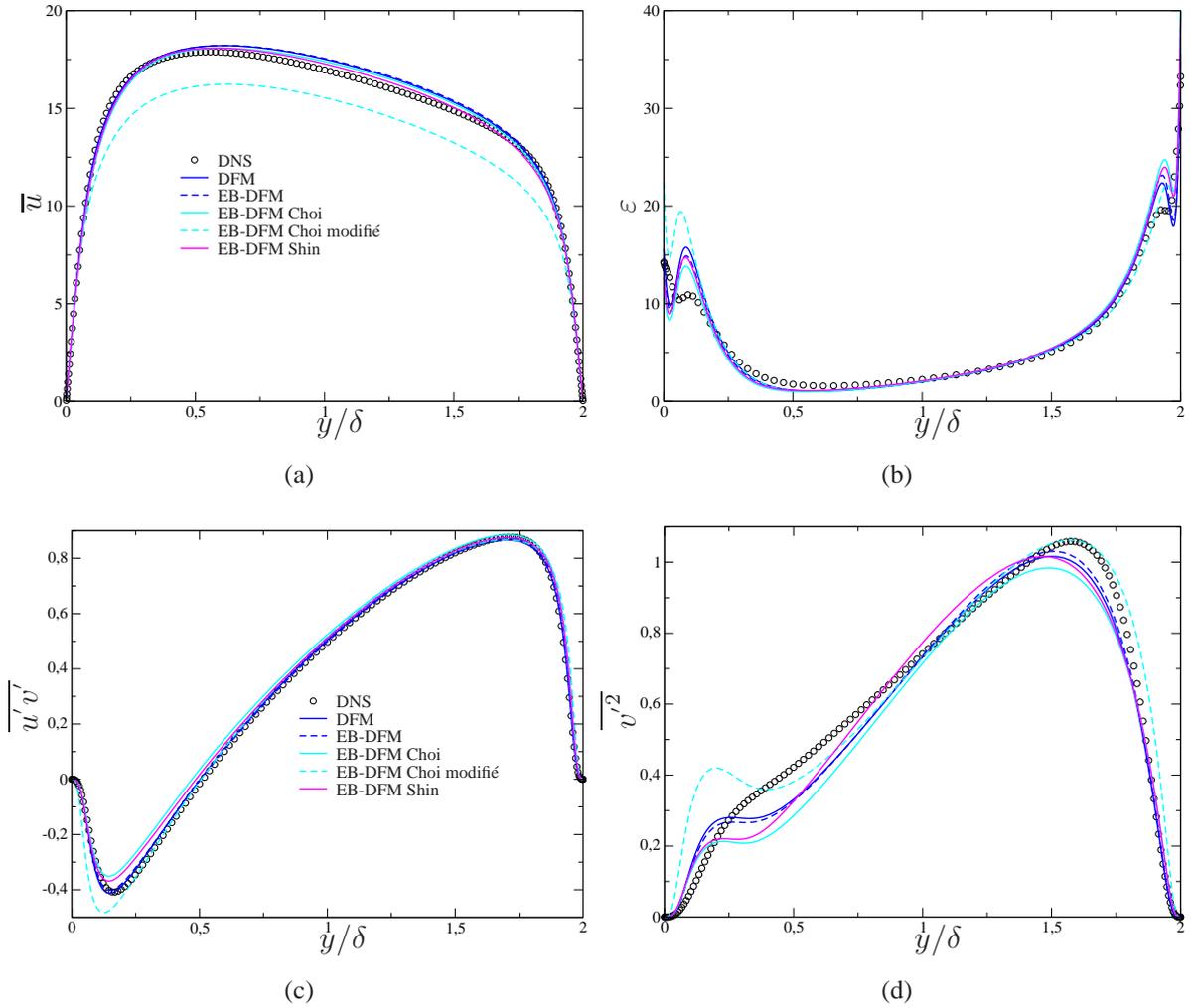


FIG. 6.10 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Gr = 9,6 \cdot 10^5$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de vitesse \bar{u} en (a), de dissipation en (b) et des tensions $\overline{u'v'}$ en (c) et $\overline{v'^2}$ en (d) entre des modèles à équations de transport avec pondération elliptique EB-DFM associés à leur variante de l'EB-RSM celle de Thielen et al. [83], celle de Choi et al. [15] et celle modifiée dans cette thèse.

comparer le modèle à équation de transport développé ici à des modèles algébriques plus couramment utilisés.

6.2.3 Comparaison de différents modèles de $\overline{u'_i \theta'}$

On compare maintenant les différents modèles de flux thermiques turbulents algébriques et à équations de transport (SGDH, GGDH, AFM, DFM, EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM)

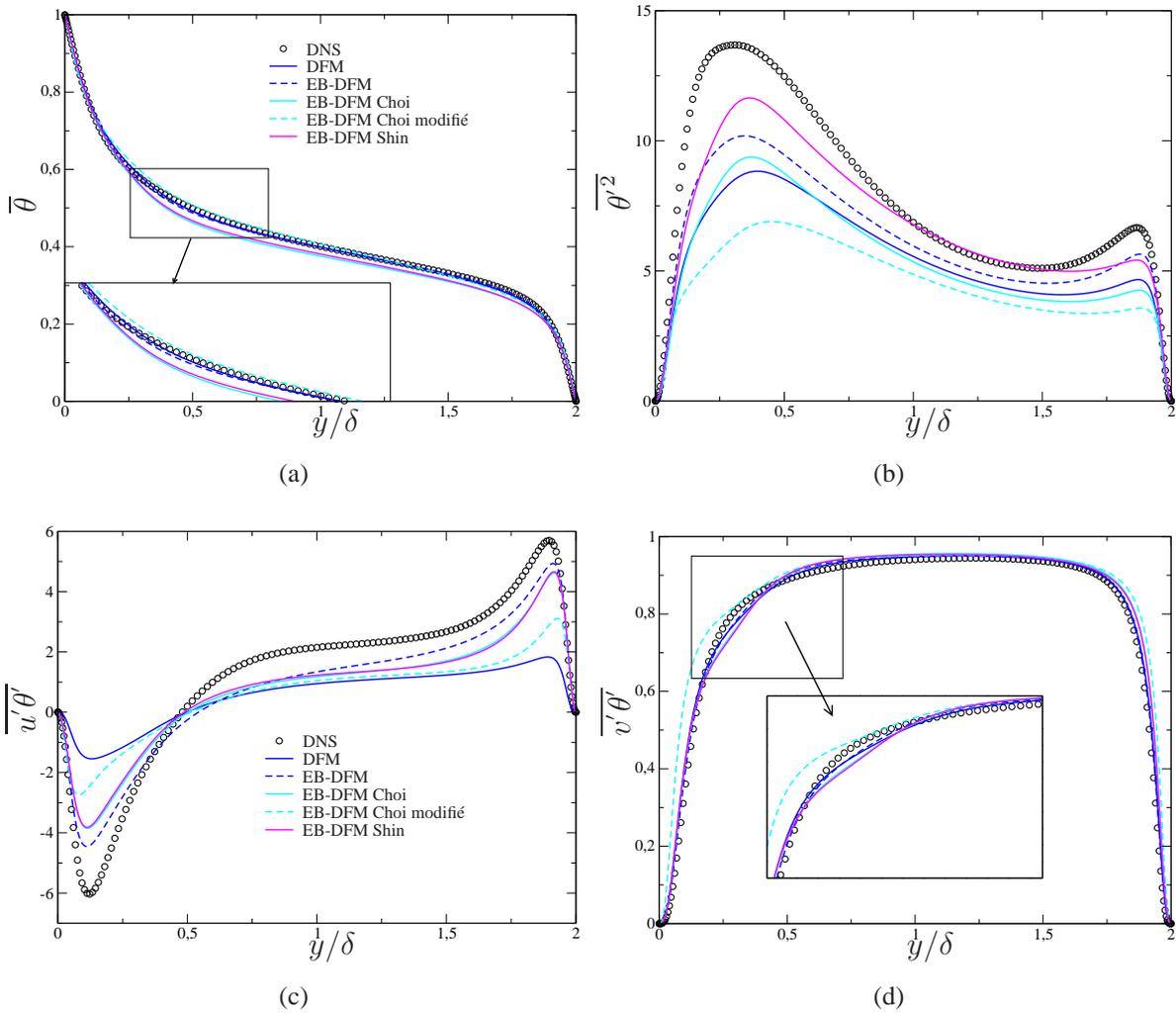


FIG. 6.11 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Gr = 9,6 \cdot 10^5$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de température $\bar{\theta}$ en (a), de sa variance en (b) et des flux thermiques $\overline{u'\theta'}$ en (c) et $\overline{v'\theta'}$ en (d) entre des modèles à équations de transport avec pondération elliptique EB-DFM associés à leur variante de l'EB-RSM celle de Thielen et al. [83], celle de Choi et al. [15] et celle modifiée dans cette thèse.

associés à l'EB-RSM modifié dans cette thèse. Ces modèles seront également confrontés aux résultats obtenus avec le $k-\omega$ SST et le $\phi-\bar{f}$ tous deux utilisant la fermeture SGDH. La figure 6.12 donne les profils de vitesse pour les différents modèles. La vitesse est globalement bien prédite par tous les modèles de flux turbulent associés à l'EB-RSM avec une surestimation au centre. En ce qui concerne les modèles du premier ordre, le $k-\omega$ SST donne une allure correcte du profil de vitesse mais le sous-estime partout contrairement au $\phi-\bar{f}$ qui surestime en proche paroi du côté aidé et sous-estime du côté opposé.

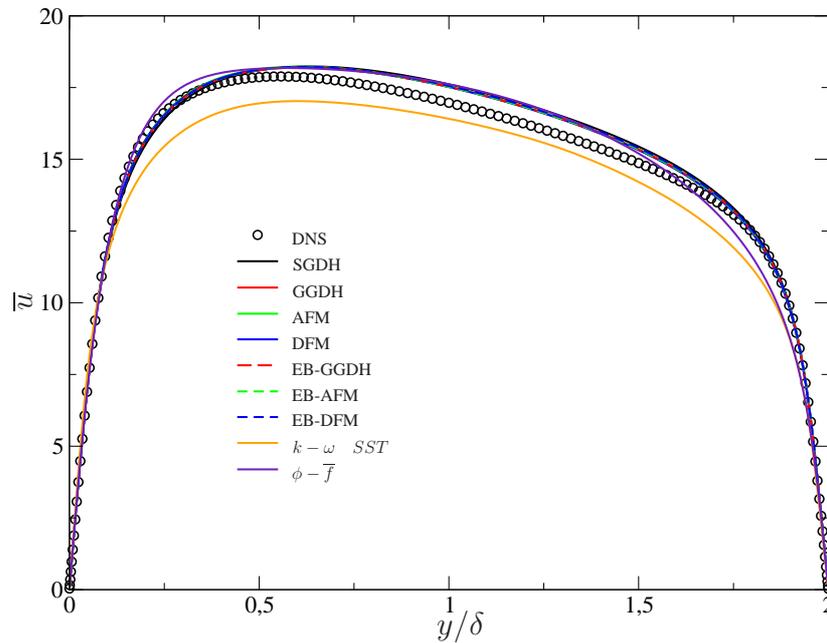


FIG. 6.12 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Gr = 9,6.10^5$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de vitesse moyenne \bar{u} entre différentes fermetures thermiques avec et sans pondération elliptique (SGDH, GGDH, AFM, DFM, EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM) associées à l’EB-RSM et pour le SGDH associé en plus aux $k-\omega$ SST et $\phi - \bar{f}$.

Les figures 6.13(a) et (b) montrent les profils de l’énergie cinétique turbulente et de sa dissipation avec les différentes fermetures. Comme pour la vitesse, ces deux variables sont bien reproduites par tous les modèles, sauf par le $k-\omega$ SST. En effet, avec ce modèle, la dissipation tend vers 0 à la paroi et l’énergie cinétique turbulente est très sous-estimée du côté opposé.

Les figures 6.14(a), (b), (c) et (d) donnent les profils des tensions de Reynolds avec les différentes fermetures. Les tensions sont globalement bien prédites par tous les modèles. A noter que tous les modèles reproduisent un très bon comportement asymptotique des tensions de Reynolds, ceci résulte évidemment du modèle à pondération elliptique EB-RSM (on voit également que le $\phi - \bar{f}$ donne le bon comportement asymptotique de k). Il faut noter que ceci est également dû au fait que le terme de flottabilité a peu d’influence sur les tensions de Reynolds, car le nombre de Rayleigh est faible.

Les figures 6.15(a), (b), (c) et (d) donnent respectivement les profils de la température, de la variance ainsi que ceux des flux thermiques turbulents. Pour la température, les modèles prenant en compte l’anisotropie de l’écoulement (tous sauf SGDH) donnent un résultat quasi-identique. Ils permettent d’avoir une très bonne prédiction de la température au niveau

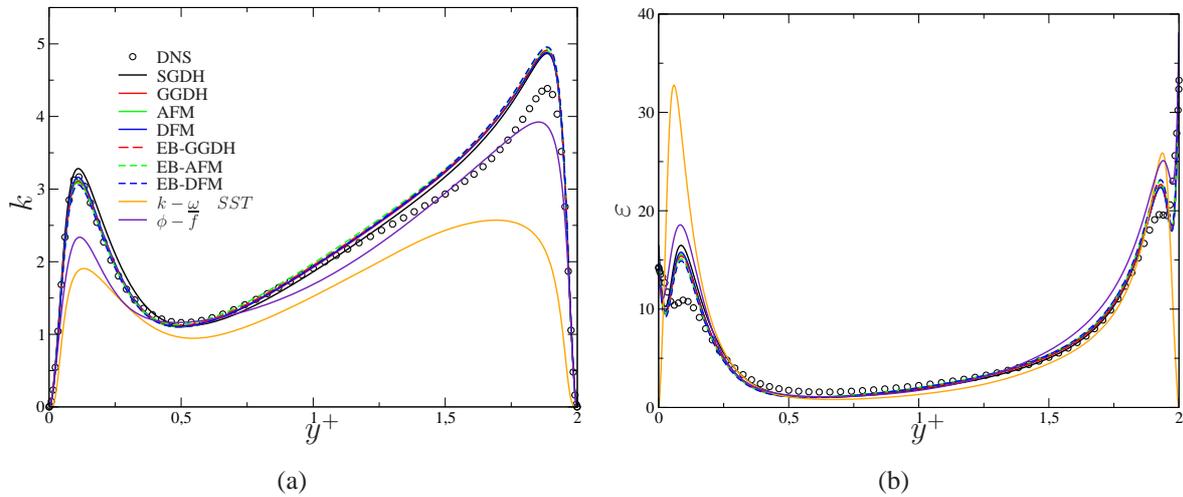


FIG. 6.13 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Gr = 9,6 \cdot 10^5$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils d'énergie cinétique turbulente k en (a) et de sa dissipation ε en (b) entre différentes fermetures thermiques avec et sans pondération elliptique (SGDH, GGDH, AFM, DFM, EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM) associées à l'EB-RSM et pour le SGDH associé en plus aux $k-\omega$ SST et $\phi - \bar{f}$.

asymptotique et au centre du canal. L'hypothèse de simple gradient est à la fois mauvaise en paroi et au centre. Pour les flux thermiques, on peut faire les mêmes remarques que pour les tests *a priori*. Pour le flux thermique normal à l'écoulement, en excluant le modèle SGD, les résultats sont satisfaisants sauf du côté aidé de l'écoulement pour y/δ compris entre 0,2 et 0,4 où un déficit est constaté quel que soit le modèle. Il y a peut être un manque dans le terme de production par gravité (on voit que la variance est sous-estimée). Pour le terme longitudinal, le modèle SGD donne toujours un flux nul par définition tandis que les modèles à pondération elliptique donnent des résultats plus proches de ceux de la DNS, mais un déficit est observé pour tous les modèles. Au niveau de la variance, les modèles reproduisent bien son évolution, sauf avec le SGD et les modèles du premier ordre.

Pour synthétiser, le SGD est à proscrire dans ce cas de convection mixte et le GGD est une bonne alternative. L'EB-DFM et l'EB-AFM donnent des résultats très proches, les simplifications faites pour le passage à ce modèle algébrique marchent bien sur ce cas. On voit que les variations du flux tangentiel $\overline{u'\theta'}$ sont plus « abruptes » avec l'EB-AFM qu'avec l'EB-DFM, ce qui est dû aux hypothèses faites sur la diffusion. L'avantage des modèles plus complets n'apparaît que dans le flux tangentiel et dans la variance de la température qui dans ce cas n'intervient que faiblement dans la dynamique car le nombre de Rayleigh est trop faible.

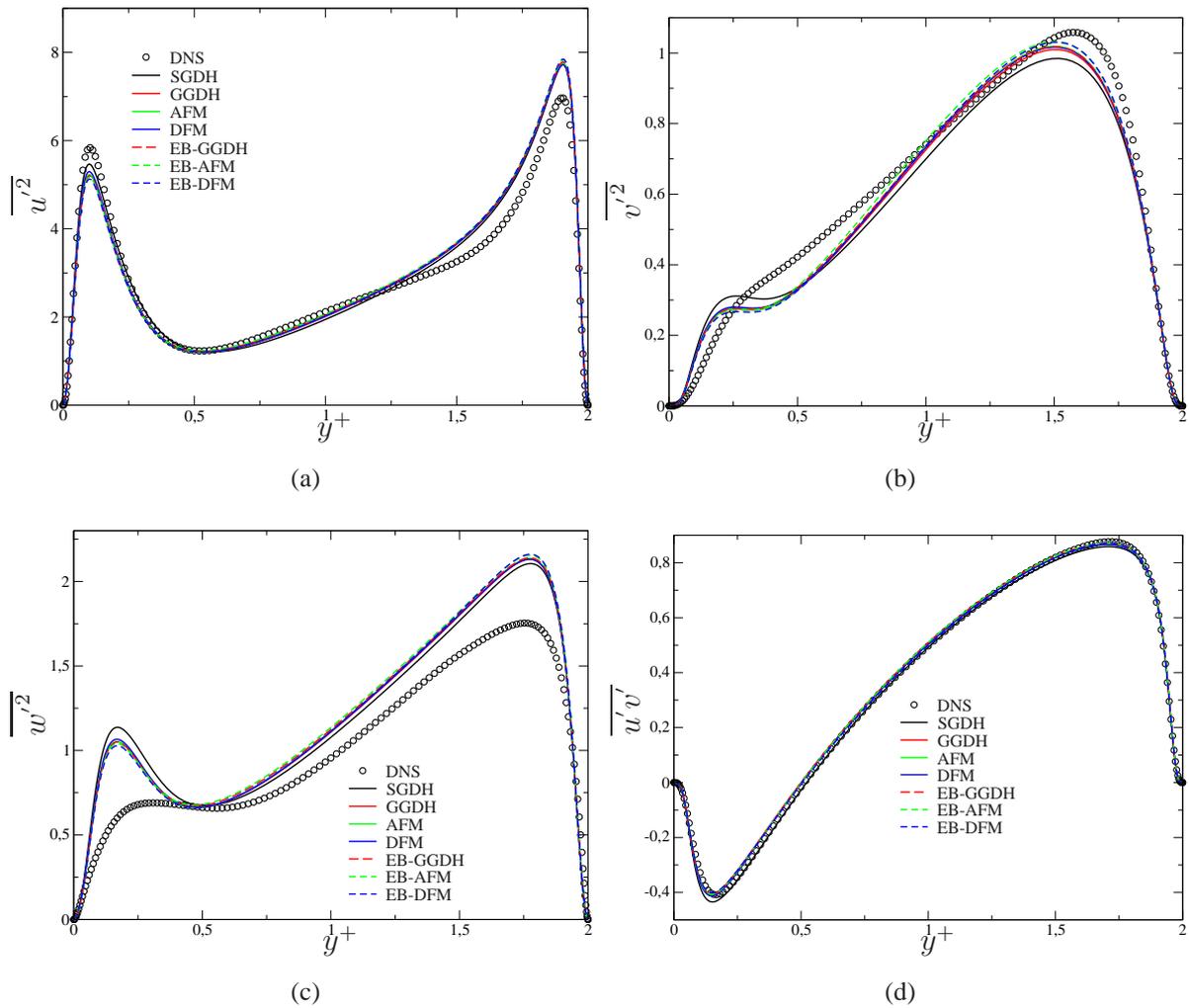


FIG. 6.14 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Gr = 9,6 \cdot 10^5$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils des tensions de Reynolds ((a) $\overline{u'^2}$, (b) $\overline{v'^2}$, (c) $\overline{w'^2}$ et (d) $\overline{u'v'}$) entre différentes fermetures thermiques avec et sans pondération elliptique (SGDH, GGDH, AFM, DFM, EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM) associées à l'EB-RSM.

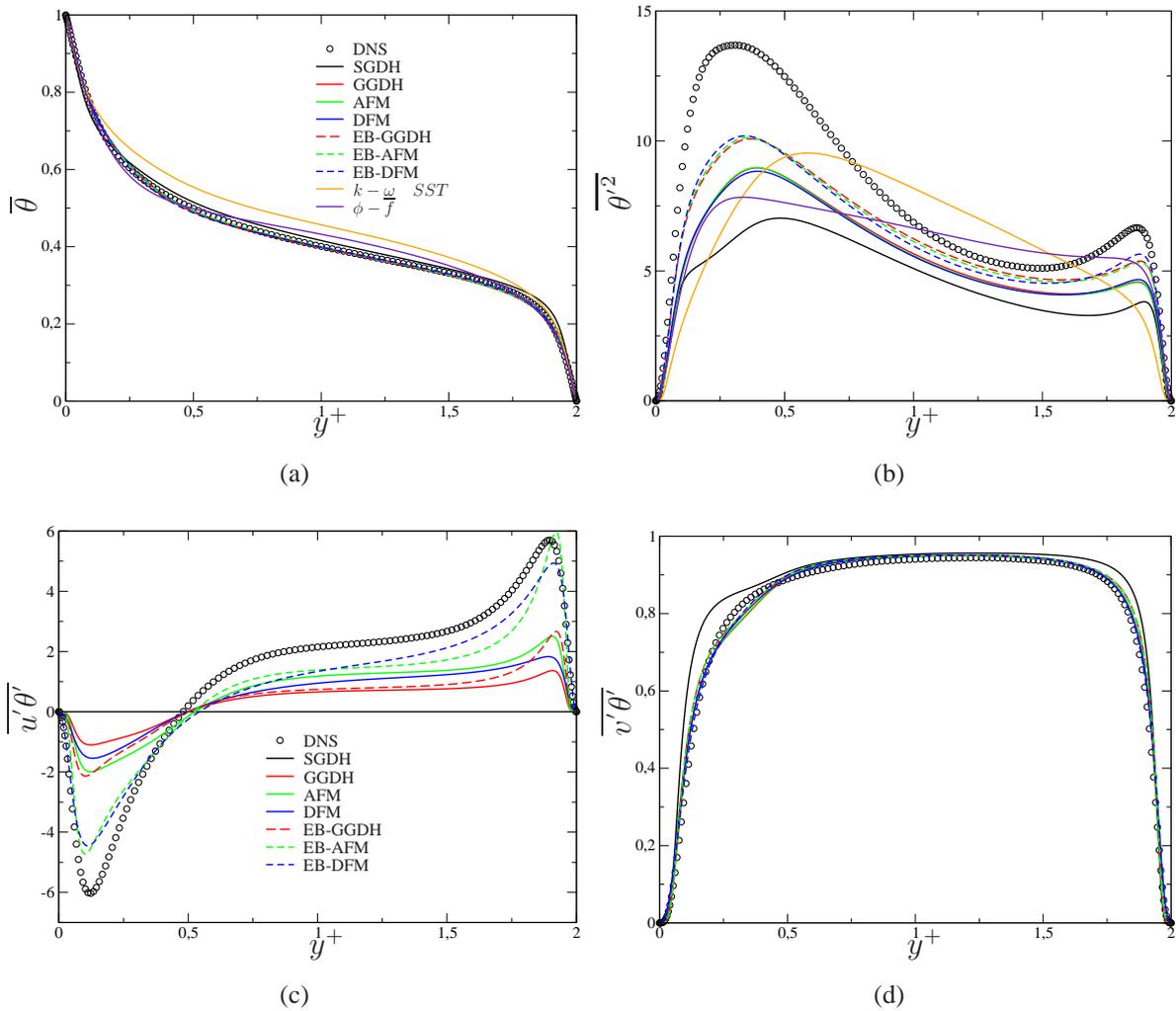


FIG. 6.15 – Canal en convection mixte de Kasagi & Nishimura [43] à $Re_\tau = 150$, $Gr = 9,6 \cdot 10^5$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de température $\bar{\theta}$ en (a), de sa variance en (b) et des flux thermiques $\overline{u'\theta'}$ en (c) et $\overline{v'\theta'}$ en (d) entre différentes fermetures thermiques avec et sans pondération elliptique (SGDH, GGDH, AFM, DFM, EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM) associées à l'EB-RSM et pour le SGDH associé en plus aux $k-\omega$ SST et $\phi - \bar{f}$.

6.3 Convection naturelle

Dans ce cas de convection naturelle, la thermique intervient de façon active et joue un rôle dominant sur la dynamique de l'écoulement ; les termes de production par flottabilité sont importants. Nous allons vérifier avec le cas de Versteegh & Nieuwstadt [89] si les conclusions obtenues pour les cas de convection forcée et mixte sont encore valables et étudier l'influence des termes de production par flottabilité qui apparaissent dans les modèles algébriques les plus complets comme l'AFM et l'EB-AFM, mais aussi dans les modèles à équations de transport. Nous étudierons leurs effets sur la dynamique, en particulier sur les tensions de Reynolds et la dissipation turbulente. Les équations résolues sont les mêmes que celles de la convection mixte mais sans le gradient de pression moteur. De plus, elles sont adimensionnées par κ , ΔT et h . L'échelle de température devient ΔT , l'échelle de vitesse κ/h et l'échelle de temps h^2/κ . On obtient alors les équations suivantes :

$$0 = \text{Pr} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial R_{12}}{\partial y} + \text{Pr} \cdot \text{Ra} \cdot \bar{\theta}$$

$$0 = \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'\theta'})$$

L'influence des échelles de temps et de longueur seront tout d'abord étudiées. Puis une comparaison entre des modèle de flux thermique utilisant des équations de transport sera effectuée. Enfin les différentes fermetures algébriques et à équations de transport seront confrontées entre elles.

6.3.1 Échelle de longueur et de temps thermique

Habituellement, les échelles de longueur et de temps dynamique sont utilisées en « thermique », et plus exactement dans les termes de production par flottabilité de la dissipation G_ε et les flux thermiques turbulent $\overline{u_i'\theta'}$. Il a été montré au chapitre 3.4 qu'une échelle de temps mixte thermique/dynamique peut être appliquée au terme de production par flottabilité de la dissipation turbulente G_ε . Par souci de cohérence, la même échelle est utilisée pour les flux thermiques turbulents qui sont les seules autres variables concernées par cette échelle.

Les figures 6.16(a), (b), (c) et (d) montrent respectivement la vitesse, la dissipation turbulente et les tensions de Reynolds de cisaillement $\overline{u'v'}$ et normale $\overline{v'^2}$. Pour retrouver des profils convenables, le choix d'une échelle de temps mixte thermique/dynamique s'impose

clairement. En effet, si une échelle dynamique est utilisée, la dissipation est fortement surestimée d'un facteur 35 en proche paroi et 20 au centre du canal. Cette surestimation anormale engendre un profil de vitesse dont la vitesse débitante est 3 fois supérieure à celle de la DNS, une surévaluation de la contrainte de cisaillement $\overline{u'v'}$ et une forte sous-estimation (20 fois moins) de la tension de Reynolds normale $\overline{v'^2}$. Ces grandes différences de résultats par rapport à ce qui est présentés généralement dans la littérature (voir par exemple Dol et al. [22] ou encore Gunarjo [32]) sont dues au fait que ces résultats sont présentés habituellement en adimensionnel. Par exemple dans ces deux dernières publications, la vitesse \bar{u} est adimensionnée sur ce cas par U_b , la vitesse de flottabilité, ce qui n'est pas le cas ici.

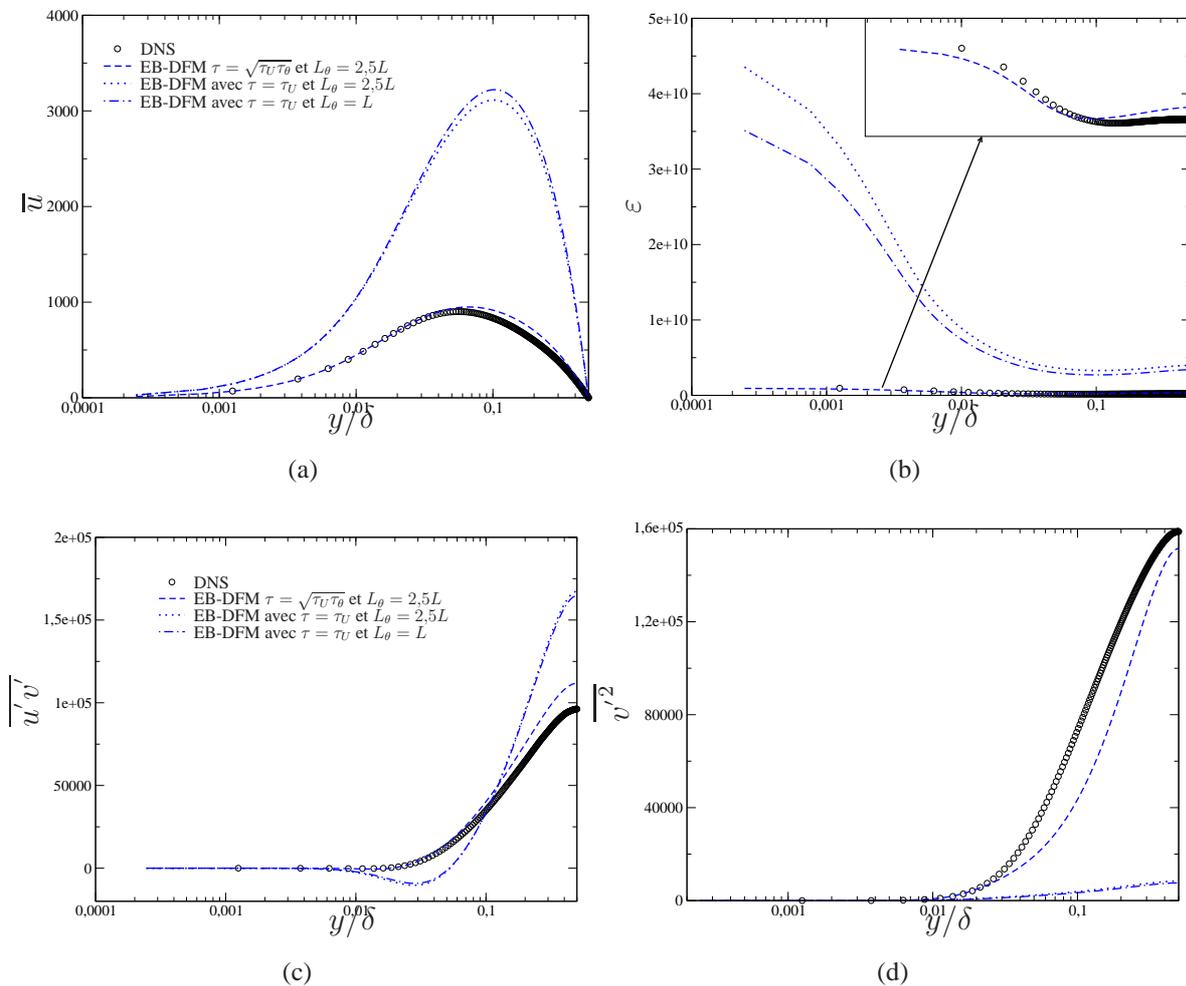


FIG. 6.16 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Re_\tau = 0$, $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Influence des échelles de longueur et de temps dans le modèle de thermique utilisant la pondération elliptique EB-DFM associé à l'EB-RSM sur les profils de vitesse \bar{u} et de dissipation ϵ .

Les figures 6.17(a), (b), (c) et (d) montrent respectivement la température $\bar{\theta}$, la variance de la fluctuation de la température $\overline{\theta'^2}$ et les flux thermiques turbulents longitudinal $\overline{u'\theta'}$ et normal $\overline{v'\theta'}$. Comme pour les variables dynamiques, l'utilisation de l'échelle de temps thermique dans G_ε permet une correction exceptionnelle de tous les profils. En effet, l'amélioration du flux normal $\overline{v'\theta'}$ est due à la correction de la dissipation ε par l'échelle de temps utilisée dans G_ε . Ce progrès dans la modélisation de $\overline{v'\theta'}$ induit une très bonne prédiction de la température $\bar{\theta}$ et de sa variance $\overline{\theta'^2}$ car seule cette composante des flux y intervient. En ce qui concerne le flux longitudinal $\overline{u'\theta'}$, l'amélioration est aussi notable avec l'échelle de temps thermique appliquée à G_ε . Cette correction de $\overline{u'\theta'}$ va jouer dans les termes de production par flottabilité des $\overline{u'_i u'_i}$ et surtout dans celui de la dissipation ε et permettre une amélioration des profils respectifs. L'échelle de temps thermique a également été utilisée dans les flux thermiques turbulents $\overline{u'_i \theta'}$ mais cela modifie peu les résultats.

Cette étude montre que le choix des échelles de temps à utiliser est primordial pour la thermique en convection naturelle et en particulier dans la production due à la flottabilité de la dissipation G_ε et pour les flux thermiques turbulents $\overline{u'_i \theta'}$. L'effet est flagrant avec ε qui va permettre d'améliorer toutes les autres variables. Par contre, l'utilisation de l'échelle de longueur thermique qui intervient dans le calcul du facteur de pondération elliptique α_θ joue peu mais dans le bon sens, principalement sur $\overline{u'\theta'}$ qui intervient dans ε et les $\overline{u'_i u'_i}$.

6.3.2 Comparaison des modèles à équations de transport

Afin de valider le choix du modèle de flux thermique à équations de transport EB-DFM, ce modèle est confronté à 2 autres modèles de proche paroi utilisant la pondération elliptique, celui de Shin et al. [78] et celui de Choi [15] (voir Annexe C). Pour ne pas avoir de problèmes de calibration des constantes de ces modèles, leur modèle de turbulence associé est utilisé, c'est-à-dire l'EB-RSM de Thielen et al. [83] et celui de Choi et al. [15] qui est une version modifiée de celui de Thielen et al. [83] (voir Annexe C). Ces modèles sont détaillés au paragraphe 2.3.3. Pour plus de simplicité, on notera dans la suite :

- EB-DFM : l'association de l'EB-RSM modifié dans cette thèse et de l'EB-DFM développé
- DFM : idem mais avec le modèle de flux DFM qui est équivalent à l'EB-DFM en posant $\alpha_\theta = 1$
- EB-DFM Shin : l'association de l'EB-RSM de Thielen et al. [83] (voir Annexe C) et de l'EB-DFM de Shin et al. [78]
- EB-DFM Choi : l'association de l'EB-RSM de Thielen et al. [83] et de l'EB-DFM de Choi et al. [15] (voir Annexe C)

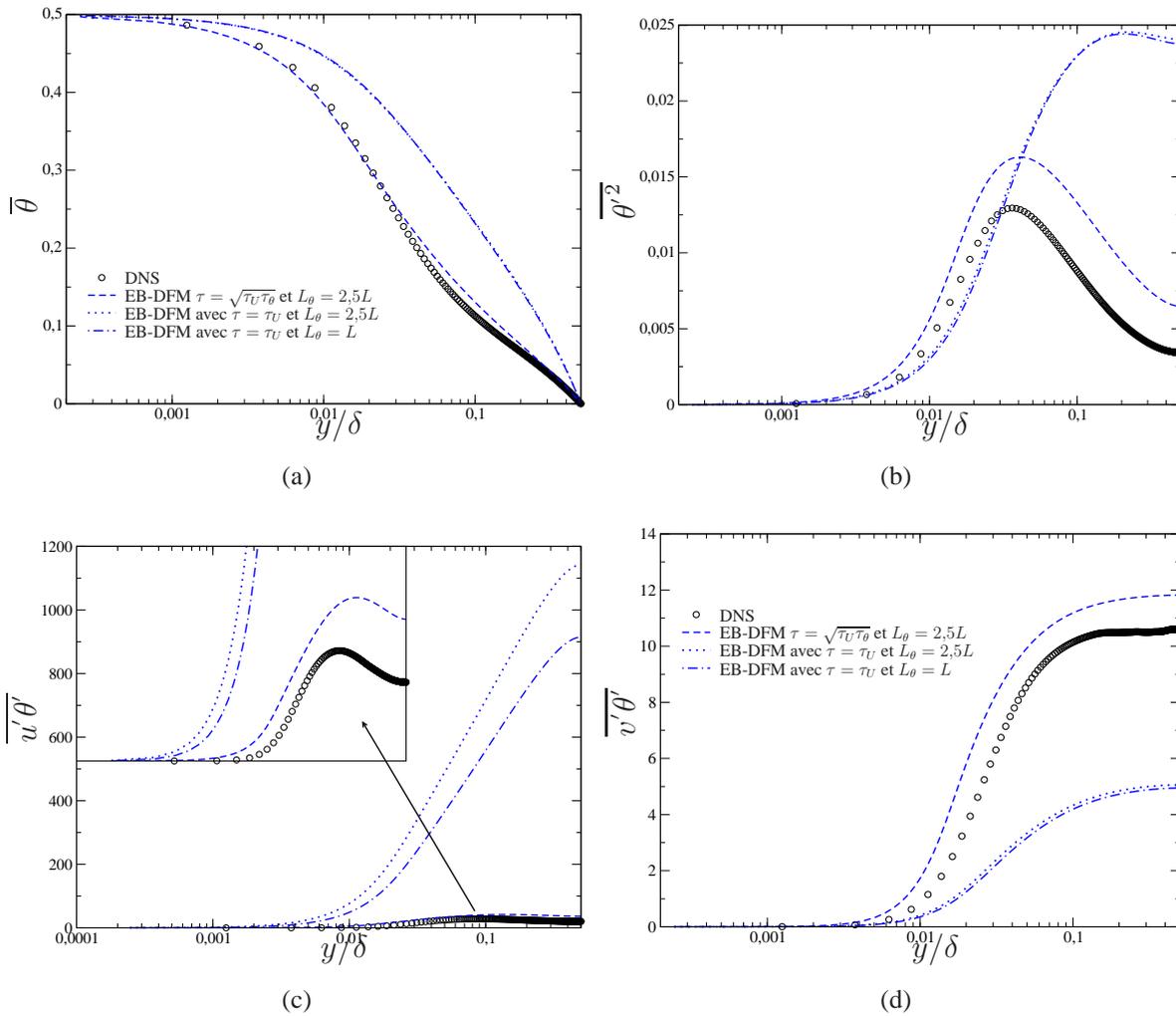


FIG. 6.17 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Re_\tau = 0$, $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Influence des échelles de longueur et de temps dans le modèle de thermique utilisant la pondération elliptique EB-DFM associé à l'EB-RSM sur les profils de température $\overline{\theta}$.

– EB-DFM Choi modif : l’association de l’EB-RSM modifié par Choi et al. [15] (voir Annexe C) et de l’EB-DFM de Choi et al. [15]

On a vu précédemment que si la dissipation ε était mal modélisée, toutes les autres variables étaient impactées. La figure 6.18(b) la représente. Seul le modèle EB-DFM et son pendant sans pondération DFM utilisent une échelle de temps mixte thermique/dynamique pour la production par flottabilité d’ ε . Les modèles EB-DFM Shin et EB-DFM Choi utilisant l’EB-RSM de Thielen et al. [83] sont globalement satisfaisants avec une échelle de temps dynamique par rapport aux résultats utilisant cette échelle présentés à la figure 6.16(b). Ceci vient du coefficient variable en proche paroi du terme de production de la dissipation P_ε . En effet, l’EB-RSM de Thielen et al. [83] utilise $A_1(1 - \alpha^2) \sqrt{\frac{k}{\overline{u'_i u'_j n_i n_j}}}$ alors que l’EB-RSM de cette thèse utilise $A_1(1 - \alpha^3) \frac{P}{\varepsilon}$. En réalité, utiliser $\frac{k}{\overline{u'_i u'_j n_i n_j}}$ fait intervenir les forces de flottabilité implicitement (dans k et $\overline{u'_i u'_j}$) qui « boostent » la production P_ε et compensent ainsi en partie le manque dû à l’utilisation de l’échelle de temps dynamique dans la production par flottabilité de la dissipation G_ε . D’ailleurs Choi et al. [15] ont tenté de remédier à ce manque en utilisant $A_1 \frac{P + G}{\varepsilon}$ dans ce coefficient mais la compensation n’est pas suffisante et la prédiction de la dissipation est mauvaise, ce qui joue dans toutes les autres variables. L’utilisation de $\frac{P}{\varepsilon}$ dans le coefficient variable de la production P_ε et d’une échelle mixte dans G_ε est plus en accord avec la formulation générale de la vraie équation de transport de la dissipation ε (voir paragraphe 3.4). On ne dispose pas des termes de l’équation de la dissipation ε dans la base de donnée DNS (malheureusement !).

De plus pour remédier à la mauvaise prédiction d’ ε , Shin et al. [78] utilisent pour le terme de flottabilité de ϕ_{ij}^b une constante $C_6 = 1,5$ au lieu d’environ 0,5, valeur communément prise. Cette valeur supérieur à 1 revient à changer le signe de la gravité dans l’équation de la tension $\overline{u'v'}$ qui intervient dans le calcul de la vitesse \overline{u} . En effet, si on s’intéresse à l’équation 1D (voir Annexe A) de $\overline{u'v'}$ et plus précisément aux termes de flottabilité on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \dots + \alpha^3 C_6 \beta g \overline{v'\theta'} + \dots - \beta . g . \overline{v'\theta'} \\ &= \dots + (1 - \alpha^3 C_6) \beta (-g) \overline{v'\theta'} \end{aligned}$$

Lorsque $\alpha^3 \rightarrow 1$, si $C_6 = 0,5$ (valeur communément choisie), on obtient :

$$0 = \dots + 0,5 \beta (-g) \overline{v'\theta'} \quad (6.3)$$

Si on prend $C_6 = 1,5$, comme Shin et al. [78], on a :

$$0 = \dots - 0,5 \beta (-g) \overline{v'\theta'} \quad (6.4)$$

Ce qui confirme que l'utilisation de $C_6 = 1,5$ revient à changer le signe de la gravité de la contrainte de cisaillement $\overline{u'v'}$ sur ce cas. Cette modification permet d'obtenir un profil de vitesse correct mais le pic maximal est décalé, il est plus éloigné de la paroi que celui de la DNS. Cependant, elle ne respecte pas la physique, elle n'a donc pas été retenue pour notre modèle EB-DFM.

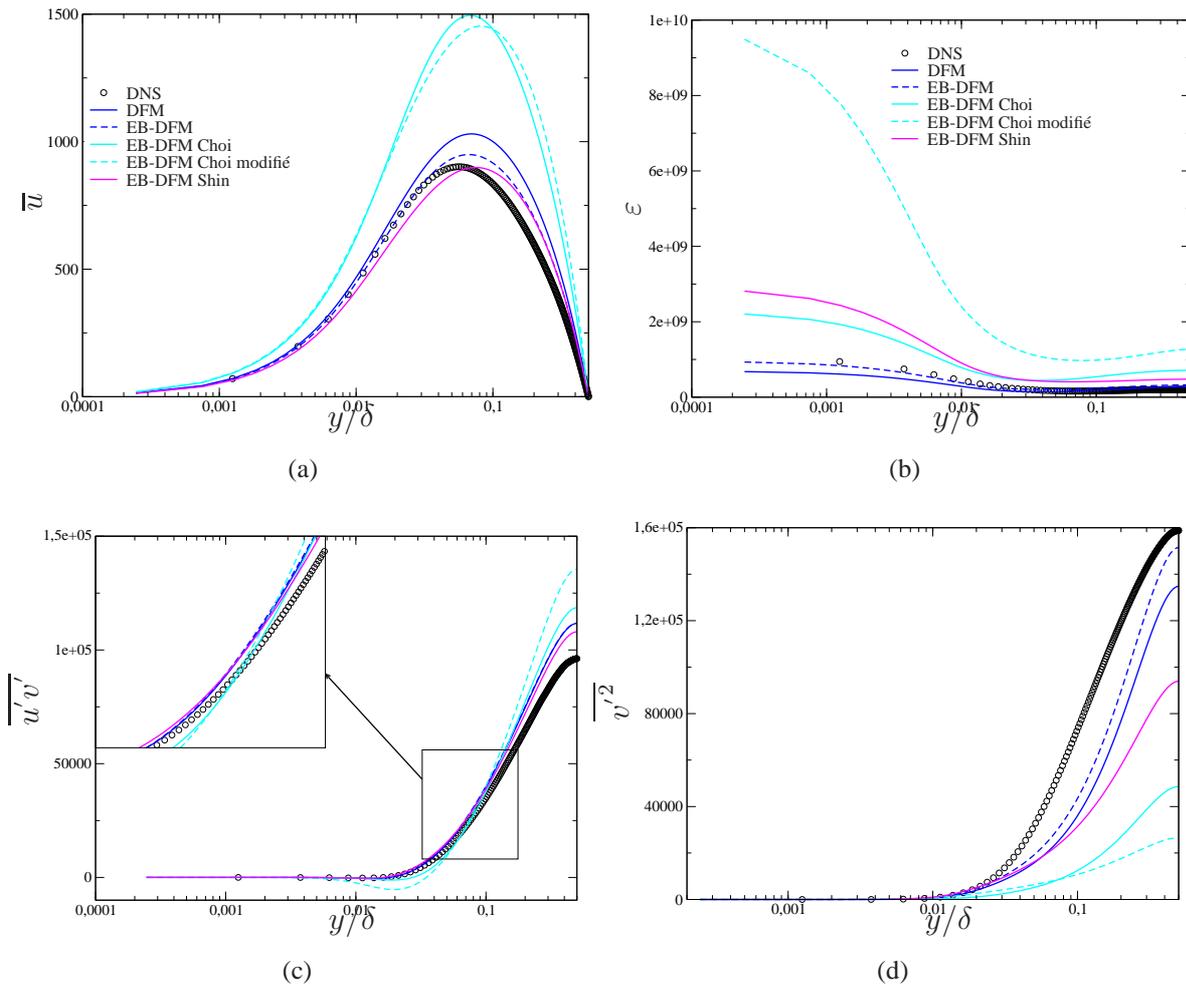


FIG. 6.18 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Re_\tau = 0$, $Ra = 5 \cdot 10^6$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de vitesse \overline{u} entre des modèles à équations de transport avec pondération elliptique EB-DFM associés à leur variante de l'EB-RSM celle de Thielen et al. [83], celle de Choi et al. [15] et celle modifiée dans cette thèse.

Dans l'ensemble, l'EB-DFM de cette thèse donne de bons résultats pour toutes les variables même si en général une légère surestimation est remarquée. A noter que le modèle sans pondération DFM donne également de bons résultats même en proche paroi.

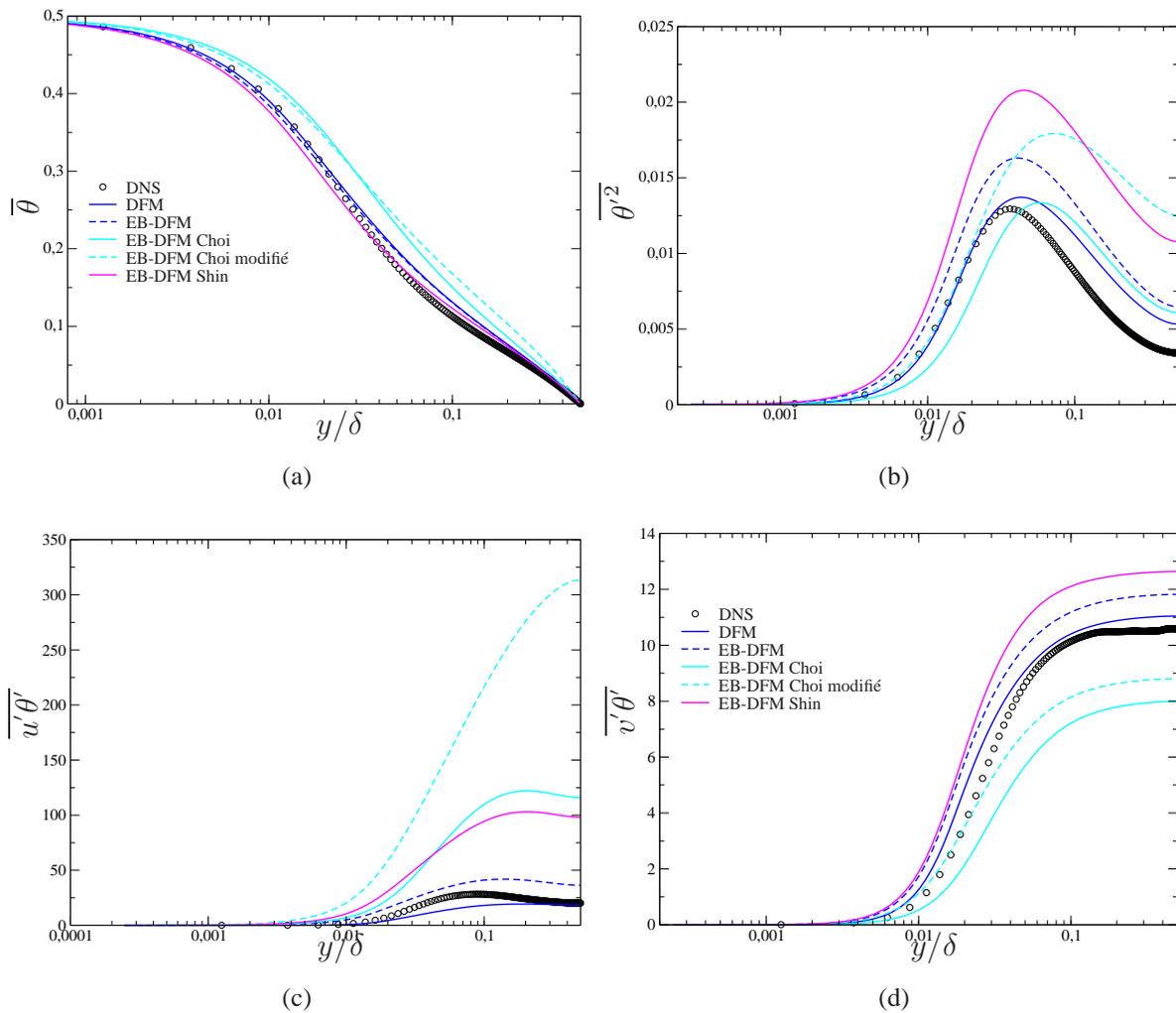


FIG. 6.19 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Re_\tau = 0$, $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de température $\overline{\theta}$, de sa variance $\overline{\theta'^2}$ et des flux thermiques $\overline{u'\theta'}$ et $\overline{v'\theta'}$ entre des modèles à équations de transport avec pondération elliptique EB-DFM associés à leur variante de l'EB-RSM celle de Thielen et al. [83], celle de Choi et al. [15] et celle modifiée dans cette thèse.

En conclusion, le modèle EB-DFM développé dans cette thèse associé au modèle du second ordre EB-RSM modifié est le plus performant sur ce cas, tout en respectant plus la physique que ceux de Shin et al. [78] ou Choi et al. [15]. Cependant, la modélisation du cas n'est pas parfaite, une raison pourrait être que le nombre de Rayleigh du cas est trop faible. Des cas-tests avec des nombres de Rayleigh plus élevés sont étudiés dans la suite.

6.3.3 Comparaison de différents modèles de $\overline{u'_i \theta'}$

Dans ce paragraphe, différents modèles de flux thermiques algébriques ou à équations de transport sont comparés, ils utilisent tous une échelle de temps mixte $\sqrt{\tau_u \tau_\theta}$ dans le terme de flottabilité de la dissipation ε . Les modèles avec pondération elliptique utilisent en plus l'échelle de longueur thermique L_θ . De plus, une confrontation avec deux modèles bas Reynolds du premier ordre $k-\omega$ SST et $\phi - \bar{f}$ utilisant une hypothèse SGDH est effectuée. Ces deux derniers modèles n'utilisent que des échelles de longueur et de temps dynamiques.

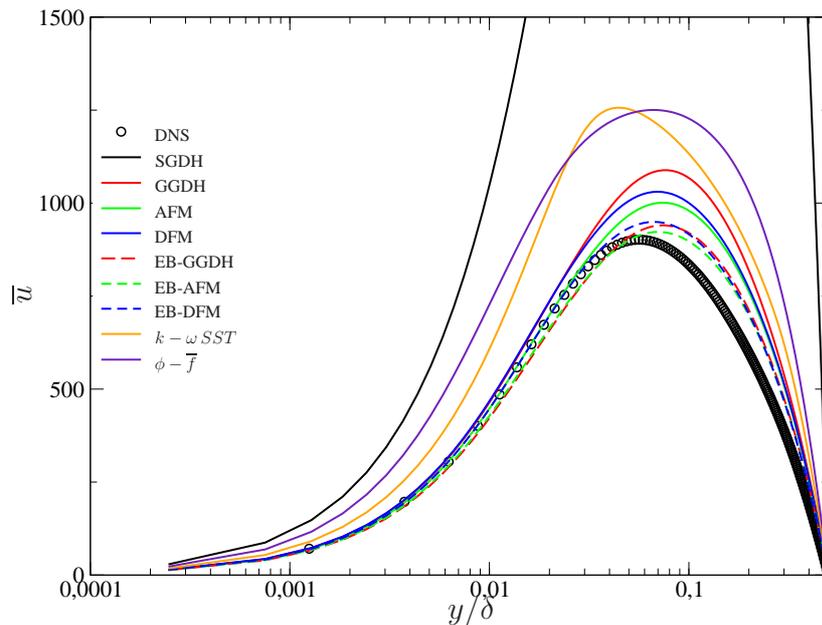


FIG. 6.20 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Re_\tau = 0$, $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de vitesse \bar{u} entre différentes fermetures thermiques avec et sans pondération elliptique (SGDH, GGDH, AFM, DFM, EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM) associées à l'EB-RSM et pour le SGDH associé en plus au $k-\omega$ SST et le $\phi - \bar{f}$.

La figure 6.20 représente la vitesse. Comme en convection forcée et mixte, l'apport du

GGDH qui prend en compte l'anisotropie de proche paroi est important par rapport au SGDH avec un modèle au second ordre. Les modèles de flux utilisant la pondération elliptique (EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM) modélisent le mieux la vitesse moyenne, toutefois, ils la surestiment et le pic maximal est décalé par rapport aux résultats de la DNS, de $y/\delta = 0,055$ pour la DNS à environ $y/\delta = 0,07$ pour les modèles EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM.

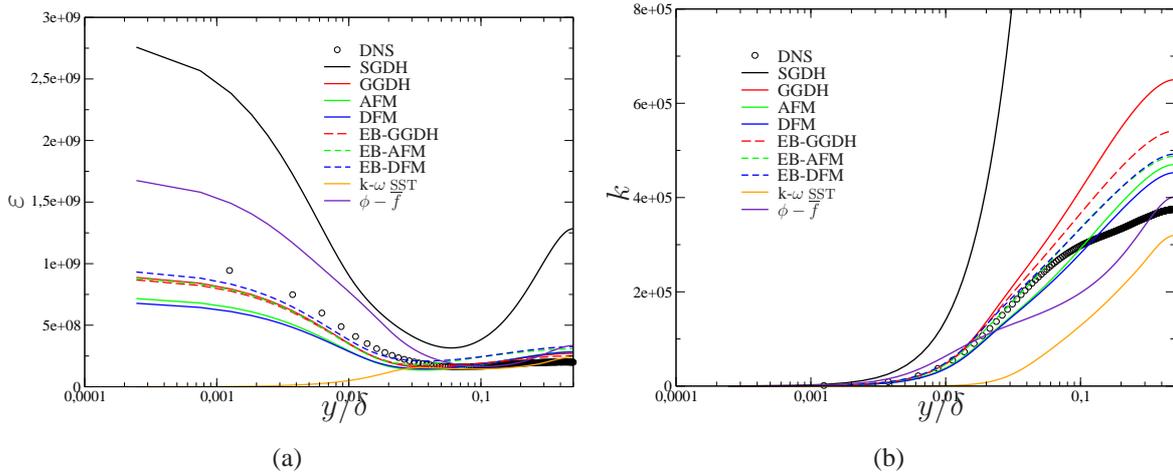


FIG. 6.21 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Re_\tau = 0$, $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de l'énergie cinétique turbulente k et de sa dissipation ε entre différentes fermetures thermiques avec et sans pondération elliptique (SGDH, GGDH, AFM, DFM, EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM) associées à l'EB-RSM et pour le SGDH associé en plus au k- ω SST et le $\phi - \bar{f}$.

L'utilisation de l'échelle de temps mixte dans la production par flottabilité de la dissipation turbulente G_ε permet de bien modéliser la dissipation (figure 6.21(a)) à partir du modèle GGDH. La pondération elliptique en thermique autorise une meilleure prédiction en paroi de la dissipation ε . Parmi les modèles au premier ordre, le $\phi - \bar{f}$ surestime le profil DNS en paroi mais reste meilleur que l'utilisation du modèle EB-RSM avec un modèle SGDH. Aucune conclusion ne peut être donnée sur cette variable avec le modèle k- ω SST, car le profil de la dissipation tend vers 0 à la paroi ce qui est dû à la condition à la limite sur ω à la paroi (voir paragraphe 6.1.1). Le profil de l'énergie cinétique turbulente k , figure 6.21(b), est bien modélisé avec l'EB-RSM associé à toutes les fermetures sauf le SGDH jusqu'à $y = 0,07$, puis aucun modèle n'arrive à reproduire le changement de pente du profil. On peut voir grâce aux profils des $\overline{u'_i u'_j}$ (figures 6.22(a) à (d)) que la cause vient des tensions $\overline{u'^2}$ et $\overline{w'^2}$ qui sont mal prédites dans cette zone.

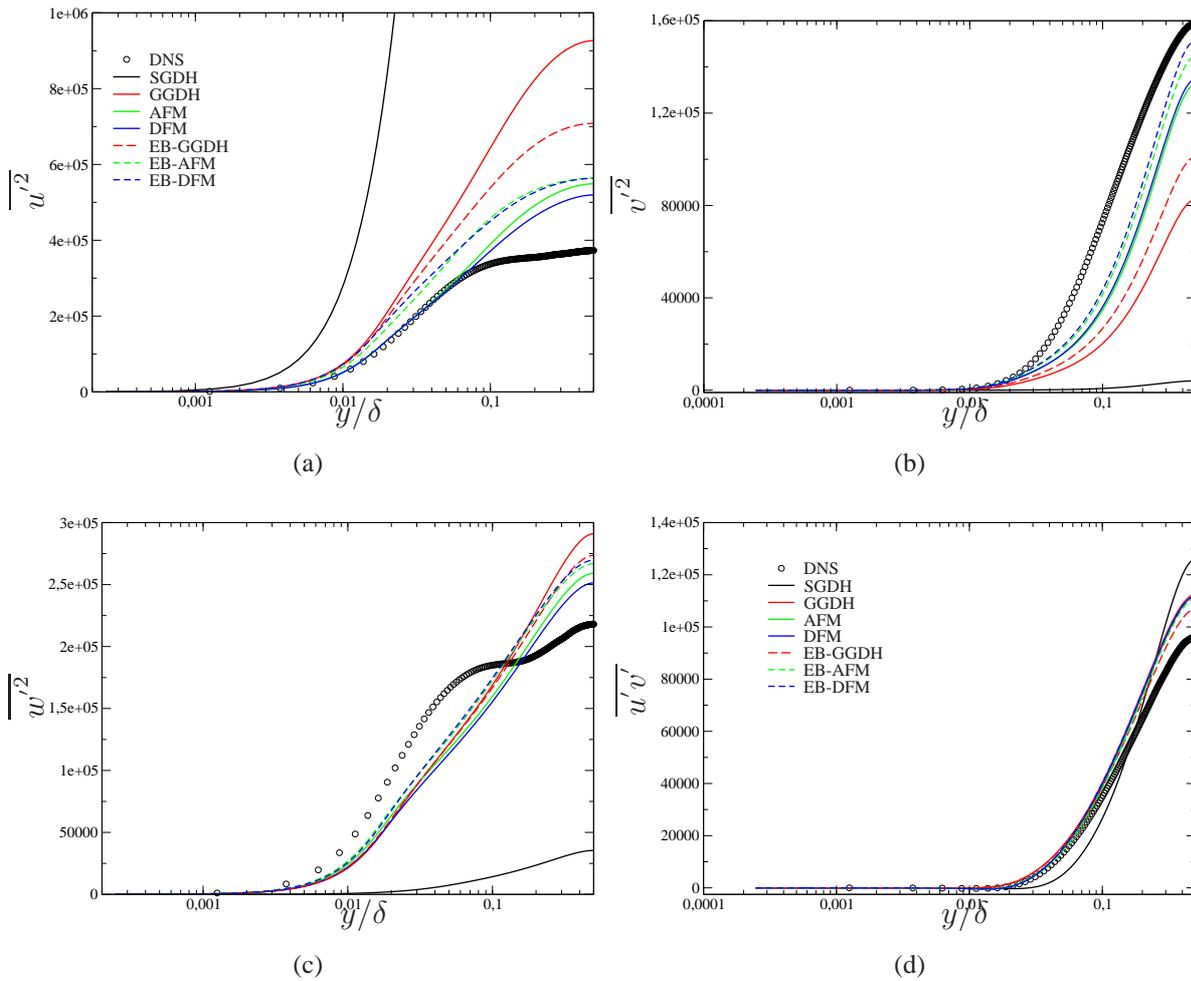


FIG. 6.22 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Re_\tau = 0$, $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils des tensions de Reynolds $\overline{u'_i u'_j}$ entre différentes fermetures thermiques avec et sans pondération elliptique (SGDH, GGDH, AFM, DFM, EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM) associées à l'EB-RSM et pour le SGDH associé en plus au k- ω SST et le $\phi - \overline{f}$.

Pour $\overline{v'^2}$ (figure 6.22(b)), plus le modèle est complet, meilleur le résultat est, alors que pour $\overline{u'v'}$ (figure 6.22(d)), les profils sont quasiment tous équivalents sauf lors de l'utilisation du SGDH.

Le profil de température 6.23(a) montre que pour ce cas la thermique est complètement couplée avec la dynamique car il est surestimé au même endroit que le profil de vitesse pour $0,06 < y < 0,3$. Comme en convection mixte et forcée, la bonne prédiction du flux normal $\overline{v'\theta'}$, figure 6.23(d), permet d'avoir une solution convenable de la variance (figure 6.23(b)) et de la température (6.23(a)). En ce qui concerne le flux thermique longitudinal $\overline{u'\theta'}$, les modèles AFM et EB-AFM ont un problème de modélisation en proche paroi car une valeur négative apparaît alors que les valeurs DNS ne montrent pas. Ceci vient probablement de la diffusion qui n'est pas prise en compte. En effet, les modèles à équations de transport ne font pas apparaître ces valeurs négatives. L'EB-GGDH représente très bien le profil DNS par hasard au vue des hypothèses appliquées à ce modèle.

Pour conclure sur ce cas, l'utilisation d'une échelle mixte dans la production par flottabilité de la dissipation G_ϵ permet de faire un bond en avant pour la modélisation de toutes les variables sur ce cas de convection naturelle. Grâce à cette modification, tous les modèles de thermique à partir du GGDH reproduisent globalement bien les profils de cette DNS et en particulier le modèle à équations de transport prenant en compte les effets de proche paroi EB-DFM. Malgré tout, aucun modèle n'arrive à reproduire parfaitement tous les profils contrairement au cas de convection forcée et mixte, la raison vient probablement du nombre de Rayleigh qui est trop faible par rapport aux hypothèses prises pour l'établissement des modèles des flux thermiques. Afin de vérifier ce point, des calculs en cavité fermée avec un nombre de Rayleigh supérieur vont être effectués et comparés aux données de DNS de Trias et al. [87, 85, 86] ($Ra = 10^{11}$).

6.4 Conclusion sur les cas académiques

Les 3 régimes de convection forcée, mixte et naturelle ont été étudiés en 1D par des tests *a priori* et *a posteriori*. L'association de l'EB-RSM avec le modèle GGDH (Generalized gradient Diffusion Hypothesis) apporte une forte amélioration par rapport au modèle SGDH (Simple Gradient Diffusion Hypothesis), modèle le plus couramment utilisé dans l'industrie pour les flux thermiques turbulents. Un autre modèle qui demande des temps de calcul similaires est l'EB-GGDH où l'approche de la pondération elliptique est introduite dans les constantes du GGDH et permet une meilleure prédiction en proche paroi des flux thermiques

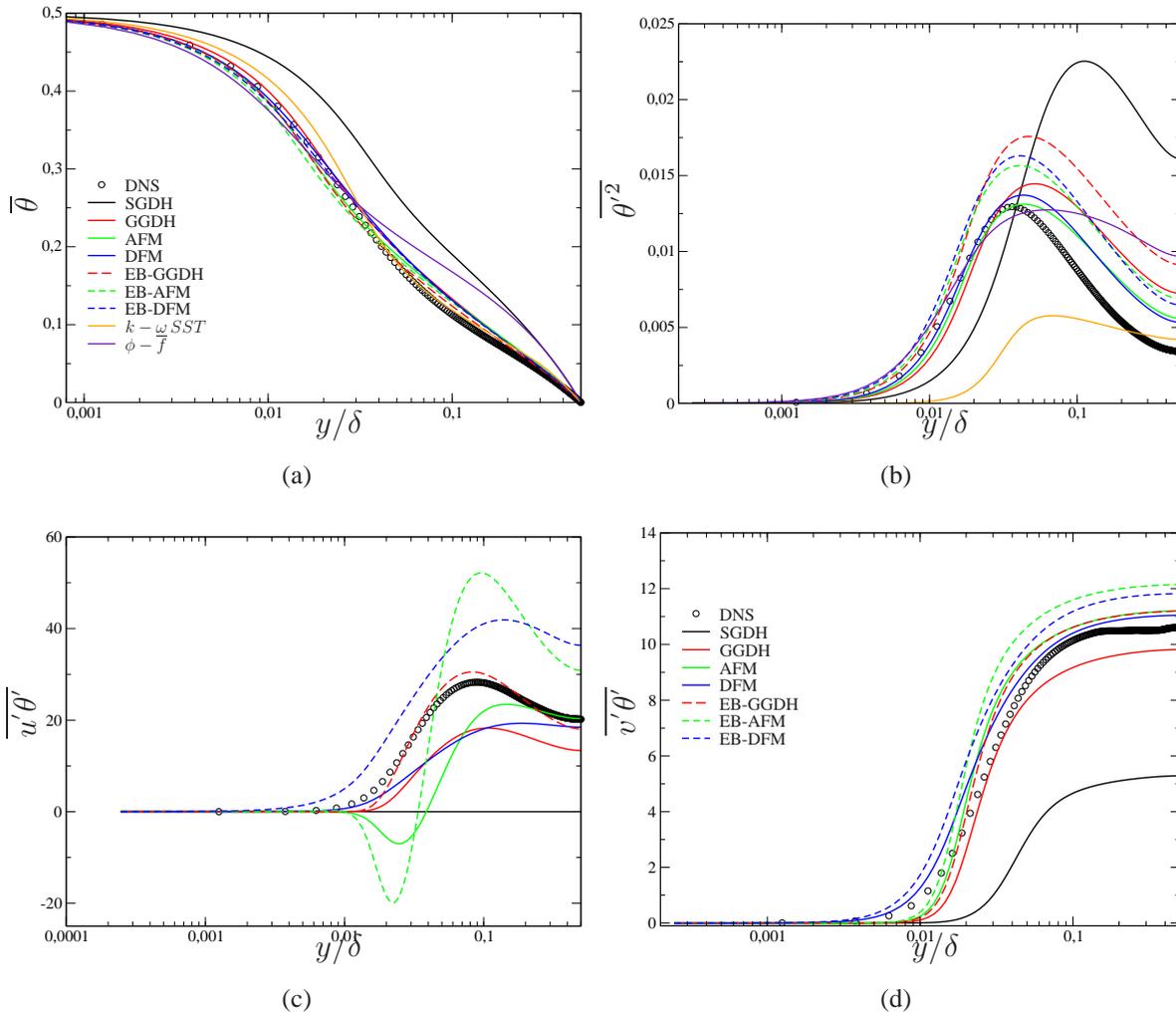


FIG. 6.23 – Canal en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] à $Re_\tau = 0$, $Ra = 5.10^6$ et $Pr = 0,71$. Comparaison des profils de température $\bar{\theta}$, de sa variance et des flux thermiques $\overline{u'_i \theta'}$ entre différentes fermetures thermiques avec et sans pondération elliptique (SGDH, GGDH, AFM, DFM, EB-GGDH, EB-AFM et EB-DFM) associées à l'EB-RSM et pour le SGD associé en plus au $k-\omega$ SST et le $\phi - \bar{f}$.

turbulents avec une nette amélioration pour la composante dans le sens de l'écoulement. Il y a aussi une nette amélioration de la prédiction de la variance de la température. Le modèle AFM (Algebraic Flux Model) a aussi été introduit avec et sans pondération elliptique. Un modèle avec équation de transport a également été testé avec et sans pondération. La variante utilisant la pondération elliptique donne de bons résultats dans les 3 régimes de convection thermique. Même si une amélioration progressive est constatée (GGDH, EB-GGDH, AFM, EB-AFM, DFM, EB-DFM), l'apport n'est pas spectaculaire. En revanche, le cas en convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] montre que l'utilisation d'une échelle de temps mixte $\sqrt{\tau_U \tau_\theta}$ dans G_ε , le terme de production par flottabilité de la dissipation ε , a un réel impact et permet de corriger dans le bon sens toutes les variables. Afin de confirmer les bons comportements des modèles algébriques plus sophistiqués (EB-GGDH, AFM et EB-AFM), des modèles à équations de transport (DFM et EB-DFM) et de l'utilisation d'une échelle de temps mixte dans G_ε , des tests doivent être effectués sur des cas plus complexes, au vue de la simplicité des cas académiques traités ici. Des investigations supplémentaires seront effectuées notamment en convection naturelle en testant les modèles sur un cas expérimental se rapprochant de la configuration de la DNS de Versteegh & Nieuwstadt [89]; la cavité de Betts [10] et sur un cas DNS à nombre de Rayleigh plus élevé que celui utilisé ici (cavités fermées de Trias et al. [87, 85, 86]).

Chapitre 7

Applications semi-académiques

7.1 Cavité 2D de Betts & Bokhari [10] à $Ra = 1,43.10^6$

Ce cas test est basé sur l'expérience de Betts & Bokhari [10] réalisée en 2000. Il a été choisi car les données expérimentales sont disponibles à EDF R&D. Elle a été réalisée en air dans une cavité rectangulaire allongée fermée différentiellement chauffée avec un rapport d'aspect de 28,7 : 1. Le nombre de Rayleigh basé sur la largeur de la cavité est $1,43.10^6$. L'écoulement est guidé entièrement par la thermique et en particulier par les forces de flottabilité. Cette cavité a une hauteur H de 2,18m, une largeur L de 0,076m et une épaisseur D de 0,52m. La température est imposée constante et uniforme et fixée à $15,6^\circ\text{C}$ sur la paroi froide et à $54,7^\circ\text{C}$ sur la paroi chaude. Les parois supérieures et inférieures sont considérées adiabatiques. Les mesures montrent que, à part près des murs avant et arrière (selon z), l'écoulement est bidimensionnel. Ce cas sera donc traité comme un cas 2D. Un schéma de ce cas est disponible figure 7.1. Au centre de la cavité, ce cas se rapproche d'un écoulement entre deux plaques planes infinies. On retrouve ainsi le cas DNS de Versteegh & Nieuwstadt [89] mais à un nombre de Rayleigh plus faible.

Ce cas étant une expérience, les propriétés physiques sont variables et l'approximation de Boussinesq sur la masse volumique n'est pas appliquée, contrairement au cas DNS vu précédemment. Cependant, la différence de température étant faible, on se limite à une variation linéaire de la masse volumique. A partir des données fournies dans l'article de Betts & Bokhari [10], une régression linéaire est effectuée pour estimer les lois de variation de la

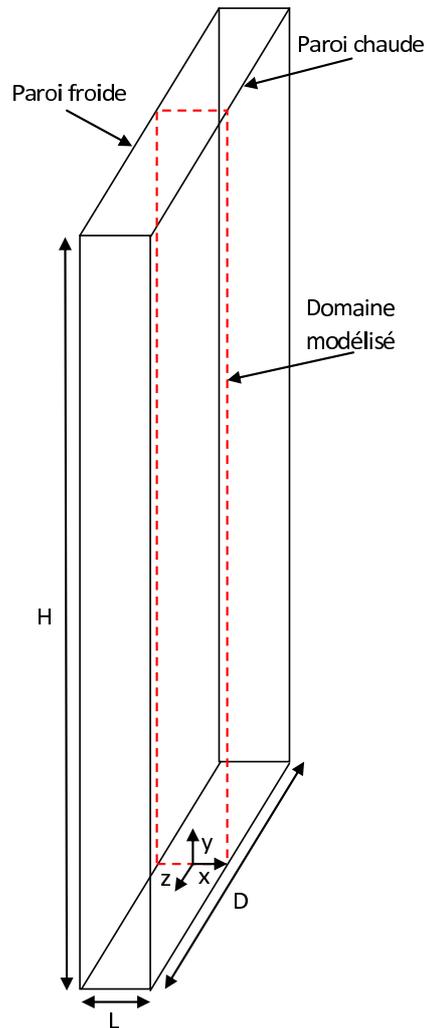


FIG. 7.1 – Schéma de la cavité allongée en convection naturelle de Betts & Bokhari [10].

viscosité cinématique ν et de la diffusivité κ . On obtient :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta(\bar{\theta} - \theta_0)) \quad (7.1)$$

$$\nu = 1,3158 \cdot 10^{-5} + 9,5956 \cdot 10^{-8} \bar{\theta} \quad (7.2)$$

$$\kappa = 1,8591 \cdot 10^{-5} + 1,4293 \cdot 10^{-7} \bar{\theta} \quad (7.3)$$

avec $\theta_0 = 35^\circ C$, $\beta = 3,2 \cdot 10^{-3} C^{-1}$, $\rho_0 = 1,06868 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Ce cas expérimental dispose d'une base de donnée fournissant les valeurs moyennes et *rms* de la température et des deux composantes de vitesse sur des profils horizontaux ou verticaux à différentes positions dans la cavité. La figure 7.2 montre les champs modélisés de la vitesse moyenne (a), de sa valeur *rms* (b), de la température moyenne (c) et de sa température *rms*

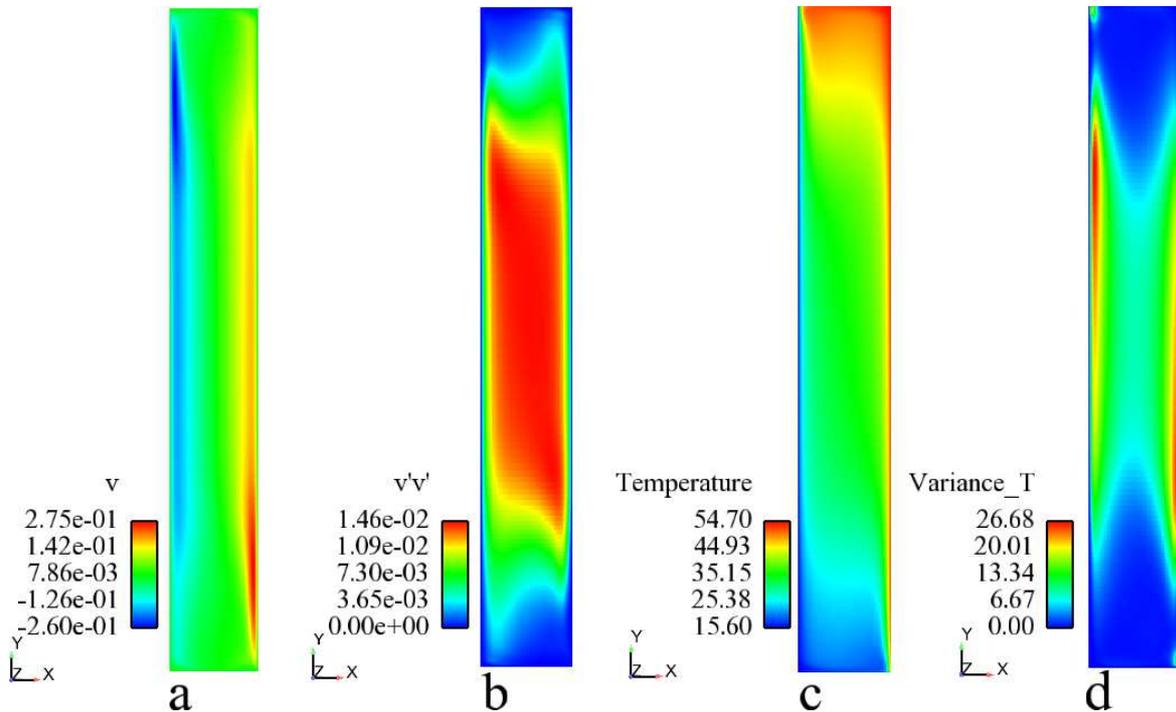


FIG. 7.2 – Aperçu de la distribution de 4 variables dans la cavité allongée de Betts & Bokhari [10] (a) vitesse (\bar{v}); (b) vitesse fluctuante ($\sqrt{v'v'}$); (c) température $\bar{\theta}$; (d) température fluctuante $\sqrt{\theta'^2}$; résultats obtenus avec l'EB-RSM associé à l'EB-DFM.

(d). Ces champs ont été calculés par le modèle de turbulence au second ordre EB-RSM, modifié dans cette thèse en particulier au niveau de l'équation de la dissipation ε , associé au modèle de flux à équations de transport EB-DFM développé précédemment et utilisant des coefficients variables dans les modèles de parois (voir chapitre 5 pour plus de détails).

Les profils de la vitesse verticale moyenne et *rms* sont tracés à différentes hauteurs dans la figure 7.3. La figure 7.4 représente quant à elle ces mêmes variables mais en proche paroi, du côté de la paroi chaude. Le long de cette paroi, le fluide accélère depuis le coin inférieur de la cavité jusqu'à environ $y/H < 0,3$. Puis, entre $0,3 \leq y/H \leq 0,7$, le profil s'aplatit et reste identique au fur et à mesure que la couche limite s'agrandit. En effet dans cette zone, la fluctuation de la vitesse est maximale, ce qui explique que le profil de vitesse devienne turbulent. Contrairement aux cavités disposant d'un rapport d'aspect plus faible, la fluctuation de la vitesse et donc la turbulence est maximale au centre de la cavité, ce qui indique que les couches limites sont en forte interaction. Enfin, la vitesse diminue à partir de $y/H > 0,7$ lorsque les effets de la paroi supérieure se font ressentir. Ce cas étant anti-symétrique, le comportement du fluide du côté froid est identique mais dans le sens inverse.

Quatre types de fermetures ont été testées. La première utilise un modèle bas Reynolds à viscosité turbulente pour la dynamique, le $k-\varepsilon-\phi-\bar{f}$ (de type v^2-f) associée à une hypothèse de gradient simple (SGDH) pour les flux thermiques turbulents, la seconde emploie pour la dynamique un modèle bas Reynolds au second ordre EB-RSM combinée à une fermeture de type gradient généralisé (GGDH) pour les flux turbulents, la troisième remplace le GGDH par le modèle algébrique AFM qui inclut les trois termes de production des flux turbulents dont celle par flottabilité qui intervient en convection naturelle et enfin la dernière toujours avec l'EB-RSM mais cette fois associée à un modèle à équations de transport de proche paroi (EB-DFM) pour les flux turbulents. Les modèles algébriques utilisant la pondération elliptique (EB-GGDH et EB-AFM) donnant une solution laminaire, il a été choisi de ne pas montrer leurs résultats. Le $k-\omega$ SST n'est pas testé vu ses performances sur le cas 1D. Les calculs numériques représentent assez bien le comportement et les valeurs maximales des profils de vitesse moyenne et ce quel que soit le modèle choisit (figure 7.3), en dehors de quelques points en proche paroi sur lesquels les mesures peuvent être considérées moins fiables (figure 7.4).

Pour l'écart-type de la vitesse, l'utilisation du modèle au second ordre EB-RSM qui résout cette variable autorise une meilleur prédiction qu'avec le modèle au premier ordre $\phi-\bar{f}$ où la tension de Reynolds $\overline{v'^2}$ est calculée à partir de $-\nu_t S_{22} + \frac{2}{3}k$. Si on s'intéresse aux fermetures thermiques, l'utilisation de l'AFM (modèle algébrique) et de l'EB-DFM (modèle à équation de transport) permet d'obtenir des profils de $\sqrt{\overline{v'^2}}$ (à droite de la figure 7.3) plus en accord avec l'expérience dans toute la cavité que l'utilisation du modèle plus simple GGDH qui ne prend pas en compte les termes de production dus à la flottabilité. Si on observe de plus près les zones $y/H \geq 0,9$ et $y/H \leq 0,1$ à droite de la figure 7.3, l'AFM surestime l'expérience contrairement à l'EB-DFM. Pour la vitesse *rms* $\sqrt{\overline{v'^2}}$, seule la composante longitudinale des flux turbulent $\overline{v'\theta'}$ joue un rôle dans le terme de flottabilité. On a vu au chapitre 6 que ce flux longitudinal était beaucoup mieux prédit par l'EB-DFM que par le GGDH. Néanmoins, la bonne prédiction de ce flux $\overline{v'\theta'}$ n'améliore pas la prédiction de la vitesse moyenne pour $0,1 \leq y/H \leq 0,9$ car il n'intervient pas dans les équations de la vitesse \bar{v} . Si on s'intéresse à la zone proche de la paroi supérieure $y/H \geq 0,9$, la bonne prédiction de la turbulence donne une meilleure prédiction de la vitesse pour $60 < x < 70$.

Les profils de la température moyenne et *rms* sont donnés dans la figure 7.5 pour 9 hauteurs différentes. La figure 7.6 représente quant à elle ces mêmes variables mais en proche paroi du côté chaud. Les simulations numériques donnent des profils de température en très bon accord avec l'expérience avec les quatre modélisations. Même le modèle du premier ordre $\phi - \bar{f}$, qui pourtant est simplement associé au SGDH dans le calcul des flux turbulents

nécessaires au calcul de la température, donne des résultats de la même qualité que ceux issus de l'association EB-RSM+EB-DFM. A modèle de turbulence équivalent, le modèle de flux turbulent le plus complet EB-DFM est équivalent à l'AFM et légèrement supérieur au GGDH qui ne dispose pas de terme de production par flottabilité. En proche paroi, le constat est le même, comme le montre la figure 7.6. Les profils sont bien reproduits peu importe le modèle utilisé. Si on regarde l'écart-type de la fluctuation de la température $\sqrt{\theta'^2}$ (figure 7.5, partie droite), seul le modèle le plus complet EB-RSM+EB-DFM arrive à reproduire correctement les profils de l'expérience mais seulement dans la partie haute ($y/H > 0,7$) et dans la partie basse ($y/H < 0,3$) de la cavité. Les autres modèles surestiment d'un facteur 2 les valeurs expérimentales. Pour $0,3 \leq y/H \leq 0,7$, tous les modèles surestiment cet écart-type, avec un avantage aux modèles prenant en compte la production par flottabilité (AFM et EB-DFM), d'au moins un facteur 2 proche des parois verticales et d'un facteur 1,5 au centre. Ces observations s'appliquent aussi à la figure 7.6. On peut voir qu'une bonne prédiction de cette variable ne joue pas sur les profils de température et de vitesse. En effet, la variance intervient dans la modélisation du terme de production par gravité qui agit seulement dans le flux thermique $\overline{v'\theta'}$ qui est longitudinal dans toute la cavité, sauf quand l'écoulement change de direction au niveau de la paroi inférieure et supérieure où ce flux devient normal. Pour l'EB-RSM, lorsqu'il est longitudinal, ce flux intervient dans la dissipation et les tensions diagonales (il est nul pour le modèle $\phi - \bar{f}$) et lorsqu'il est normal, dans la température et la contrainte de cisaillement. C'est pourquoi sur les figures précédentes, une bonne prédiction de la variance n'apporte rien au profil de température. La figure suivante 7.7 montrant la température et la vitesse en bas de la cavité devrait montrer un avantage à la modélisation la plus complète EB-RSM+EB-DFM. En réalité, si on exclut la fermeture EB-RSM + GGDH, les profils de vitesse sont équivalents que l'on utilise le modèle $\phi - \bar{f} + \text{SGDH}$ ou l'EB-RSM + AFM ou l'EB-RSM + EB-DFM. Ces dernières figures montrent que pour l'EB-RSM nécessite une modélisation des flux turbulents incluant les forces de flottabilité pour capter le bon profil de vitesse. Pour ce qui est du profil de température, les données expérimentales ne sont pas fiables du fait des pertes thermiques observées en paroi. Aucune conclusion ne peut être donnée du fait du non respect de l'adiabaticité sur la paroi inférieure (et inversement par antisymétrie) comme le montre la figure représentant $\bar{\theta}$ (Fig. 7.7), en dehors du fait que le $\phi - \bar{f}$ donne des résultats comparable à la modélisation la plus avancée utilisant l'EB-RSM + EB-DFM.

Ce cas à bas nombre de Rayleigh $Ra = 1,43 \cdot 10^6$ montre qu'une modélisation turbulente au premier ordre de type v2f est suffisante pour représenter les grandeurs générales qui sont la vitesse et la température. Si les tensions de Reynolds ou la variance de la température

CHAPITRE 7. APPLICATIONS SEMI-ACADÉMIQUES

sont nécessaires, une modélisation au second ordre de type EB-RSM est préférable associée au modèle de flux turbulent à équations de transport EB-DFM. L'utilisation du modèle algébrique GGDH paraît limitée au vue des résultats dans ce cas de convection naturelle. Une modélisation légèrement plus évoluée, comme l'AFM qui utilise les 3 termes de production de l'équation des flux turbulent (celle due au gradient de température, celle due au gradient de vitesse et celle due à la flottabilité), est plus appropriée. Pour le prochain cas en convection naturelle sur une cavité à nombre de Rayleigh plus élevé de ratio 4 :1, seules les fermetures AFM et EB-DFM seront associées à l'EB-RSM.

Remarque : Sur ce cas, les modèles algébriques utilisant la pondération elliptique (EB-GGDH et EB-AFM) donnent une solution laminaire

7.7.1 Cavité 2D de Betts & Bokhari [10]   $Ra = 1,43.10^6$

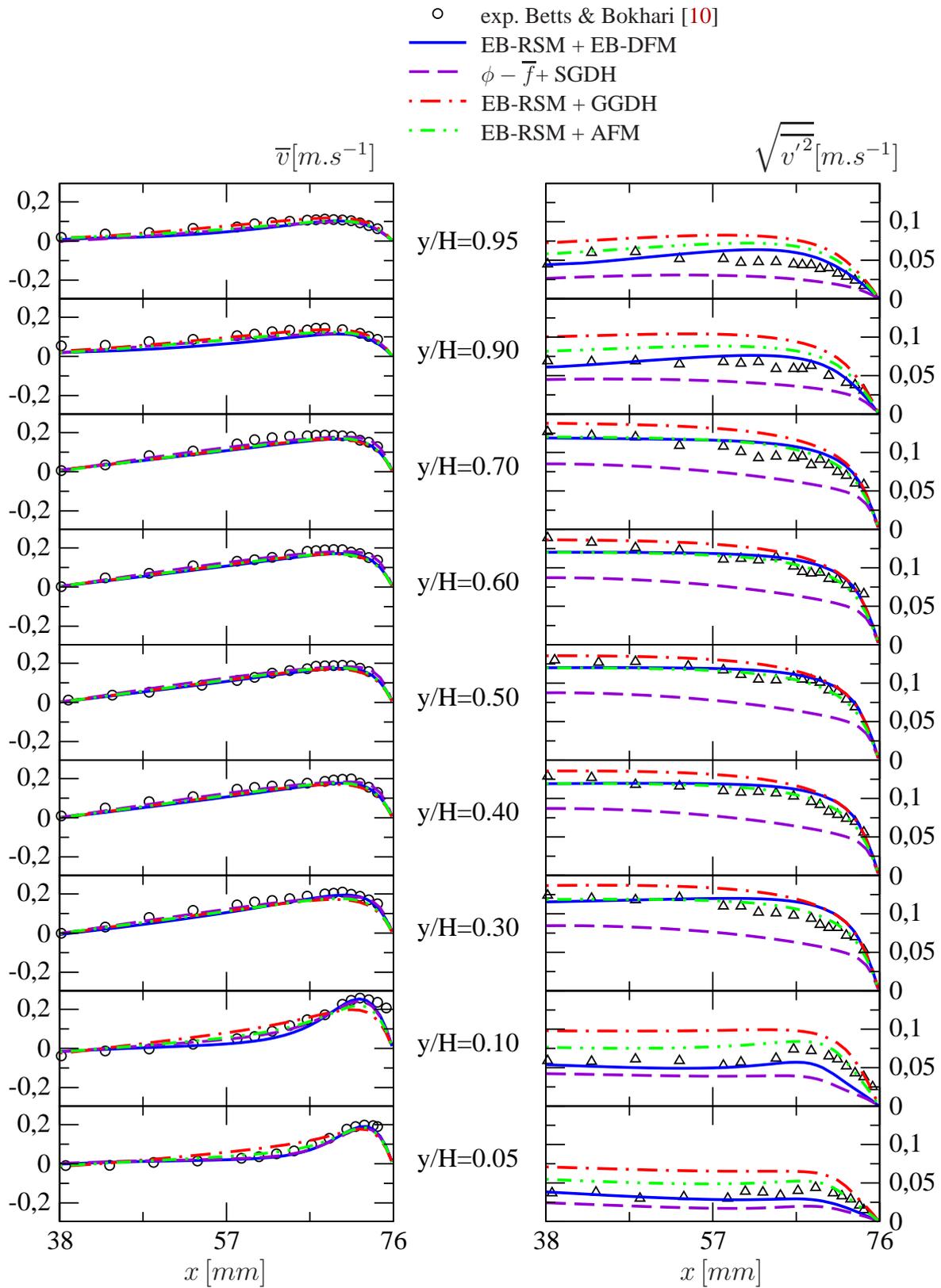


FIG. 7.3 – \bar{v} et $\sqrt{v'^2}$ en convection naturelle du côté chaud dans la cavité de Betts & Bokhari [10].

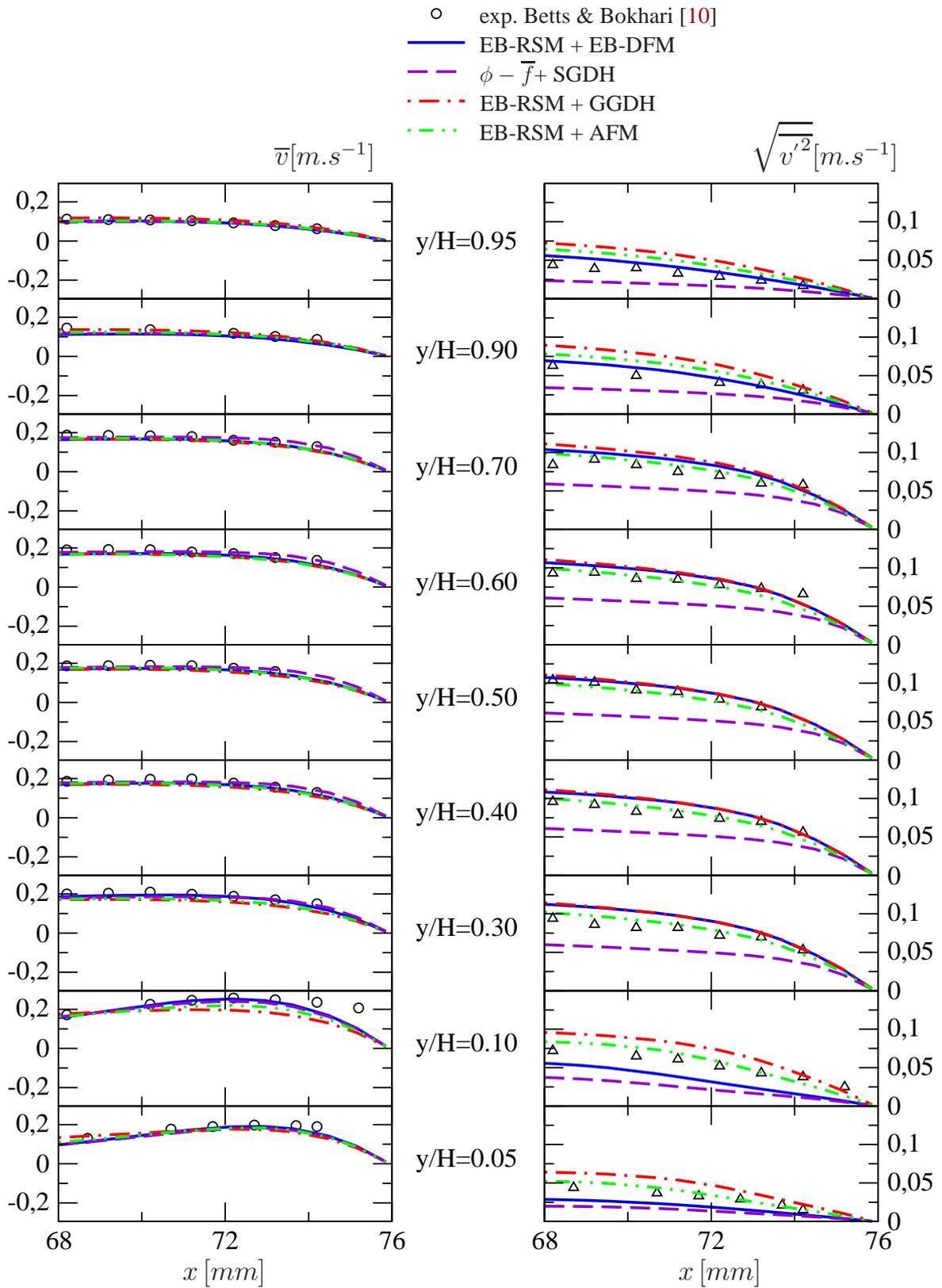


FIG. 7.4 – \bar{v} et $\sqrt{v'^2}$ du côté chaud dans la cavité de Betts & Bokhari [10].

7.7.1 Cavité 2D de Betts & Bokhari [10]   $Ra = 1,43.10^6$

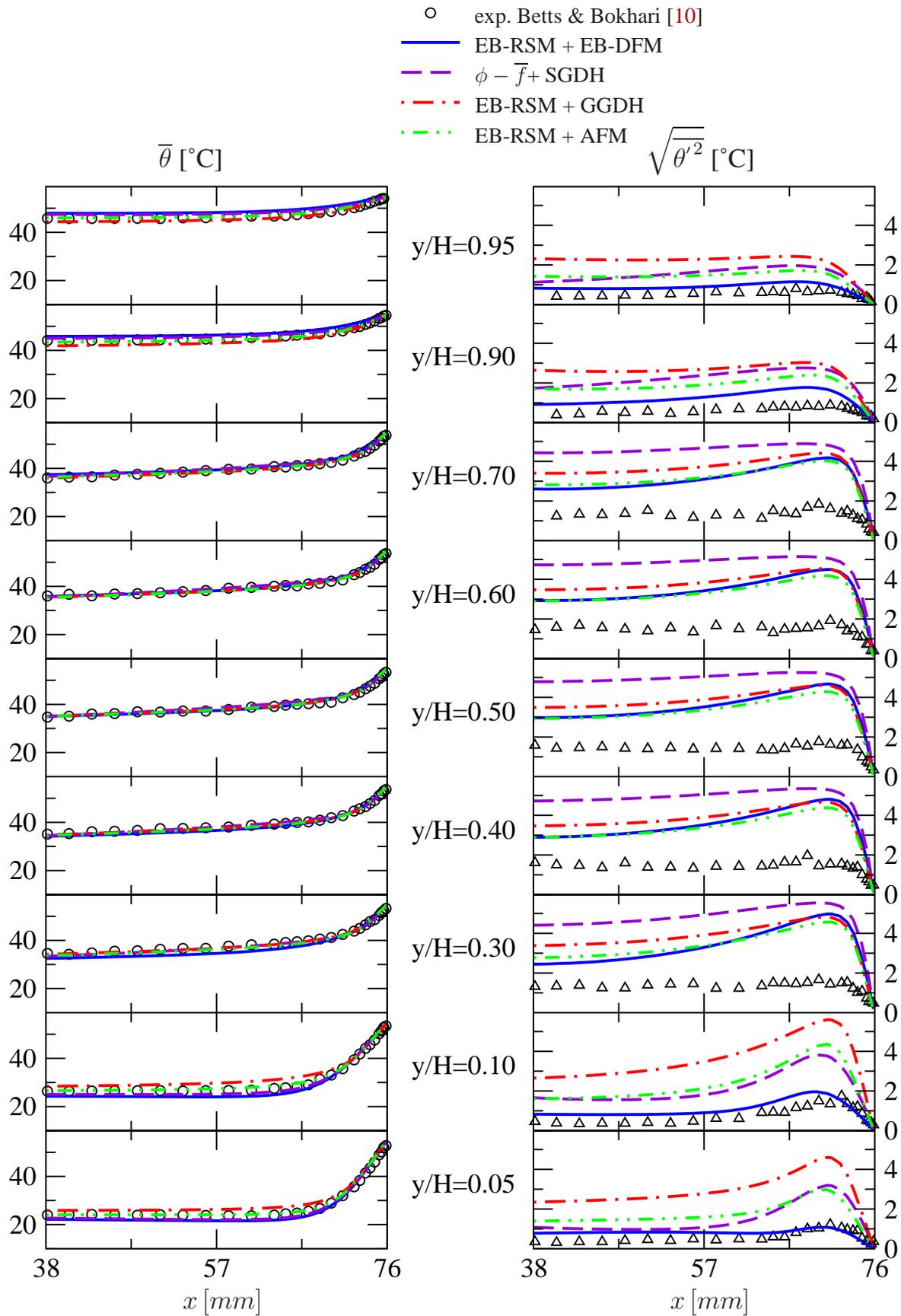
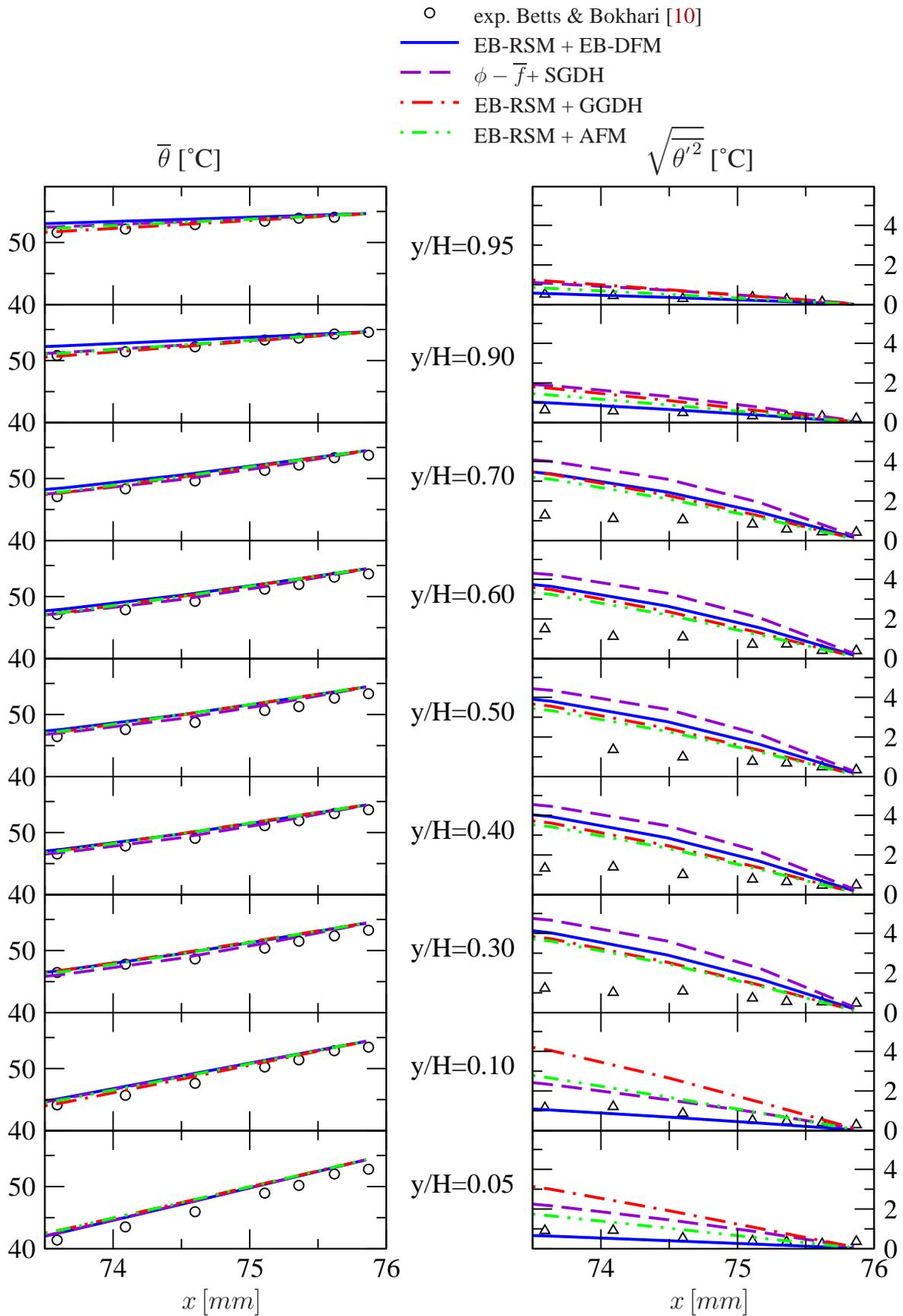


FIG. 7.5 – $\bar{\theta}$ et $\sqrt{\theta'^2}$ en convection naturelle du côté chaud dans la cavité de Betts & Bokhari [10].



134 FIG. 7.6 – $\bar{\theta}$ et $\sqrt{\theta'^2}$ du côté chaud dans la cavité de Betts & Bokhari [10].

7.7.1 Cavité 2D de Betts & Bokhari [10] à $Ra = 1,43.10^6$

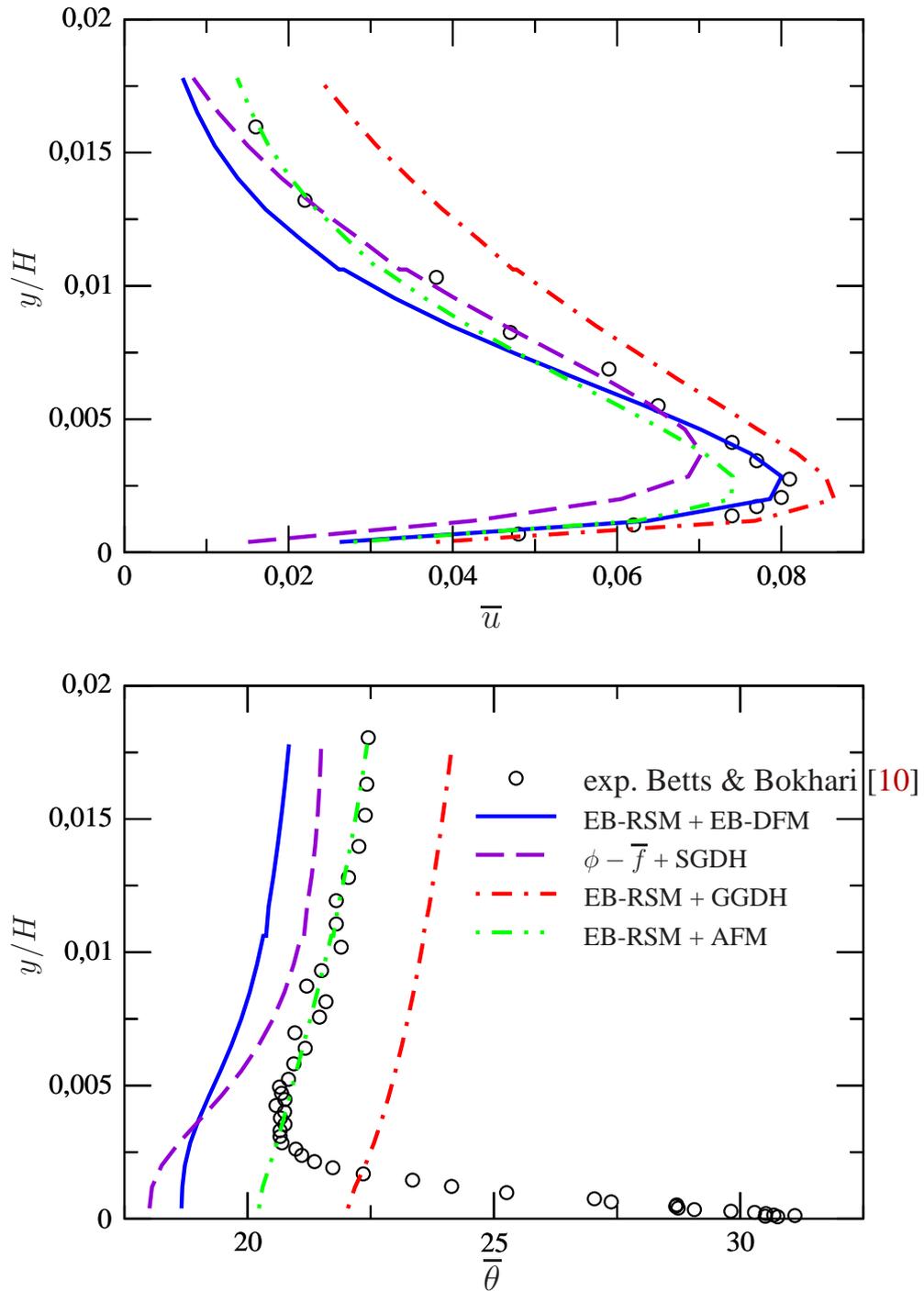


FIG. 7.7 – Profils verticaux de \bar{u} et de $\bar{\theta}$ en $x/L = 0.5$ en bas de la cavité de Betts & Bokhari [10].

7.2 Cavité 2D de rapport de longueurs 4 :1 à $Ra = 10^{11}$

Ce cas test a pour référence une simulation numérique directe (DNS)   $Pr = 0,71$ (air) dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée avec un rapport d'aspect de 4 : 1 en convection naturelle. Le nombre de Rayleigh basé sur la hauteur de la cavité est 10^{11} . Si on se base sur la largeur comme pour l'expérience de Betts & Bokhari [10] ou la DNS de Versteegh & Nieuwstadt [89], le nombre de Rayleigh devient égal à $1,56 \cdot 10^9$. Cette DNS a été réalisée par Trias et al. en 2010 [85, 86]. Ces travaux sont la suite de l'article [87] où le nombre de Rayleigh était plus faible. L'écoulement est guidé entièrement par les forces de flottabilité. Dans cette DNS, la viscosité cinématique ν et la diffusivité thermique κ sont considérées constantes. Afin de prendre en compte la variation de la masse volumique ρ , l'approximation de Boussinesq est utilisée. La différence de température étant faible, une loi linéaire est utilisée pour déterminer les variations de ρ . Aucun rayonnement n'a été pris en compte lors du calcul. Pour ce cas, les équations de quantité de mouvement et d'énergie sont adimensionnées par les nombres de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ et de Rayleigh $Ra = \frac{g\beta\Delta\theta H^3}{\nu\kappa}$ basé sur la hauteur de la cavité H . Les échelles de longueur H , de temps $\frac{H^2}{\kappa}\sqrt{Ra}$, de température $\Delta\theta$ et de pression dynamique $\rho\frac{\kappa^2}{H^2}Ra$, interviennent également dans l'adimensionnement des grandeurs fournies dans la base de donnée. Les équations de quantité de mouvement et de l'énergie se réduisent à :

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = \frac{Pr}{\sqrt{Ra}}\nabla^2\bar{u}_i - \nabla p + f_i \quad (7.4)$$

$$\frac{D\bar{\theta}}{Dt} = \frac{1}{\sqrt{Ra}}\nabla^2\bar{\theta} \quad (7.5)$$

où $f_i = (0, Pr\theta, 0)$.

La figure 7.8 montre le schéma de cette cavité. La hauteur H est égale à 1 et la largeur L est égale à 0,25. La cavité est soumise à une différence de température adimensionnée uniforme et constante comprise entre 0,5 pour la paroi chaude en $x = 0$ et $-0,5$ pour la paroi froide en $x = L$. Les parois supérieure et inférieure sont considérées adiabatiques. La vitesse et la température sont supposées périodiques dans la direction z (cela ne devrait pas jouer en RANS). La base de donnée de Trias et al. [85, 86] fournit les variables suivantes : les trois composantes de la vitesse moyenne, les tensions de Reynolds, la dissipation turbulente, la température moyenne, la variance de la température fluctuante ainsi que les flux thermiques turbulents.

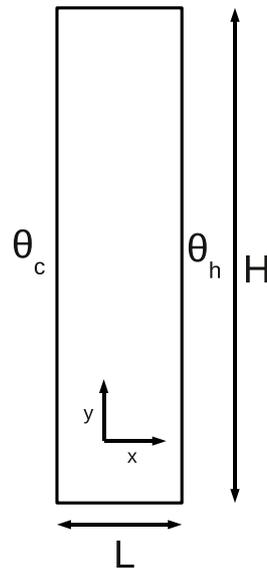


FIG. 7.8 – Schéma de la cavité 4 :1 fermée de Trias et al.[85, 86].

Si on s'intéresse à la physique de l'écoulement, cette cavité de rapport d'aspect 4 :1 est différente de celle vue précédemment qui avait un rapport d'aspect de 28,7 :1 car cette fois deux couches limites distinctes existent avec très peu d'interactions entre elles. En effet avec la cavité de rapport d'aspect 28,7 :1, les couches limites sont en très forte interaction au centre de la cavité ce qui engendre une turbulence maximale dans cette zone. Au vu de la troisième ligne de la figure 7.9 qui représente la distribution de l'énergie cinétique turbulente pour 3 modélisations différentes : EB-RSM + AFM, EB-RSM + EB-DFM et $k-\omega$ SST + SGDh ; l'écoulement est quasi laminaire dans toute la cavité en dehors de deux zones en proche paroi dans la partie supérieure du côté de la paroi chaude et dans la partie inférieure du côté de la paroi froide. On peut remarquer que le point de transition de laminaire à turbulent est diff rent pour chaque modèle. Ainsi le $k-\omega$ SST prédit un écoulement turbulent beaucoup plus tôt que les modélisation utilisant l'EB-RSM. Si on compare l'AFM et l'EB-DFM tout deux associés à l'EB-RSM, l'écoulement devient turbulent plus rapidement avec l'AFM qu'avec l'EB-DFM. Les profils des tensions de Reynolds seront étudiés dans la suite. La figure 7.9 montre également les distributions de la norme de la vitesse sur la première ligne et celle de la température sur la deuxième ligne. La vitesse et la température sont ainsi quasi uniformes et constantes au centre de la cavité. Ces figures montrent que l'écoulement peut être considéré antisymétrique, c'est pourquoi les figures suivantes ne montrent que les variables du côté de la paroi chaude de la cavité. On peut remarquer que la figure de l'énergie turbulente (Fig 7.9.c) montre que l'antisymétrie n'est pas respectée avec le $k-\omega$ SST,

CHAPITRE 7. APPLICATIONS SEMI-ACADÉMIQUES

ce qui risque de montrer des défaillances de ce modèle pour toutes les variables. Une des raisons pourrait être la condition limite sur ω qui n'est pas adaptée aux maillages très fins ($y^+ \ll 1$).

7.7.2 Cavité 2D de rapport de longueurs 4 :1 à $Ra = 10^{11}$

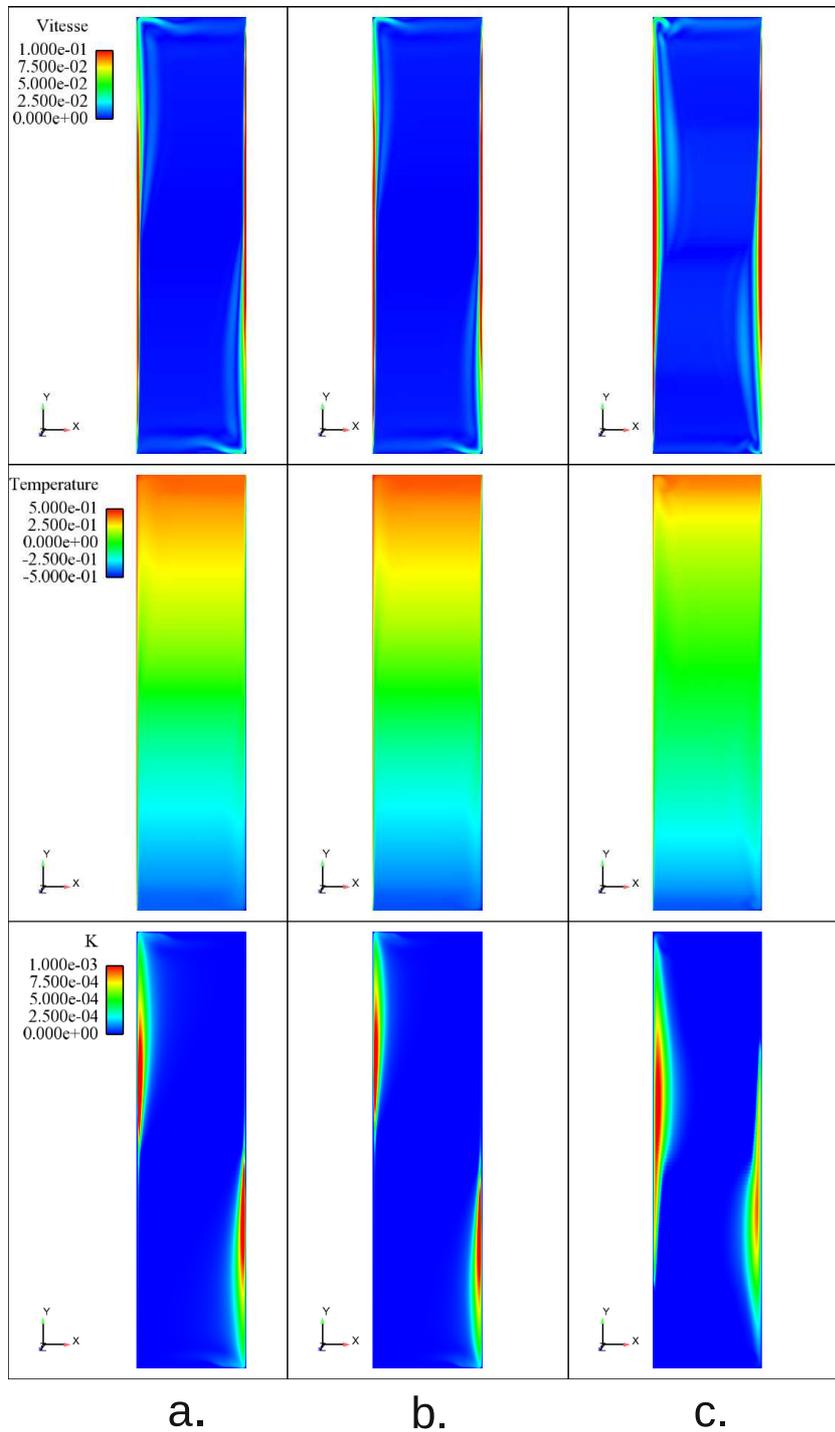


FIG. 7.9 – Distribution de la norme de la vitesse (1ère ligne) de la température (2ème ligne) et de l'énergie cinétique turbulente (3ème ligne) avec trois modèles : (a.) EB-RSM + AFM ; (b.) EB-RSM + EB-DFM ; (c.) $k-\omega$ SST + SGDH dans la cavité 4 :1 de Trias et al.[85, 86].

La figure 7.10 montre les profils de la vitesse moyenne \bar{v} à gauche et de la tension de Reynolds $\overline{v'^2}$ à droite à 9 hauteurs différentes. Les calculs utilisant le modèle au second ordre EB-RSM donnent des meilleurs résultats que ceux utilisant le modèle au premier ordre k- ω SST. En effet, avec ce dernier, le profil de vitesse prend la forme aplatie d'un profil turbulent dès $y/H = 0,3$ alors qu'avec l'EB-RSM, il le devient à environ $y/H = 0,6$ comme avec les données DNS. L'EB-RSM reproduit ainsi mieux la transition laminaire/turbulent que le k- ω SST. La tension de Reynolds longitudinale $\overline{v'^2}$ devient significative à partir de $y/H = 0,4$, maximale en $y/H = 0,6$ et intervient plus profondément dans la cavité à partir de $y/H = 0,7$ puis diminue à l'approche de la paroi supérieure. On peut remarquer que deux pics maximaux se forment en proche paroi à partir de $y/H = 0,4$ jusqu'à $y/H = 0,6$, aucun des modèles RANS n'arrive à capter ces deux maxima, seule la valeur minimale comprise entre ces deux maxima est à peu près bien captée par l'EB-RSM mais la forme du profil n'est pas bien représentée jusqu'à $y/H = 0,9$. Le k- ω SST + SGDH, qui utilise ici l'approximation $\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - \nu_t S_{ij}$ pour les tensions de Reynolds, représente globalement mal la vitesse \bar{v} et la tension $\overline{v'^2}$ et crée de la turbulence trop tôt dans la cavité.

La figure 7.11 montre les profils des deux autres tensions de Reynolds diagonales $\overline{u'^2}$ à gauche et $\overline{w'^2}$ à droite. Les données DNS montrent que $\overline{u'^2}$ devient non nul à partir de $y/H = 0,5$ et $y/H = 0,4$ pour $\overline{w'^2}$ et significatif à partir de $y/H = 0,6$ pour $\overline{u'^2}$ et $\overline{w'^2}$, avec une forte augmentation pour $\overline{u'^2}$ entre $y/H = 0,5$ et $0,6$. Ces profils montrent que la modélisation des tensions de Reynolds diagonales à l'aide de l'approximation $\overline{u'_i u'_i} = \frac{2}{3}k$, n'est pas adaptée sur ce cas. L'utilisation de l'EB-RSM associé à l'AFM permet à la turbulence d'être créée plus bas dans la cavité qu'avec le modèle à équation de transport EB-DFM. Dans ces deux variables, le terme de flottabilité, provenant du terme de corrélation vitesse-pression, utilise le flux longitudinal à la paroi $\overline{v'\theta'}$ qui est plus élevé avec l'AFM qu'avec l'EB-DFM comme le montre la partie droite de la figure 7.14. Ceci explique en partie la différence entre les deux modèles. D'ailleurs, dans la partie supérieure $y/H \geq 0,6$, le flux $\overline{v'\theta'}$ est équivalent entre les 2 modèles, ce qui permet des modélisations proches entre l'AFM et l'EB-DFM dans cette zone.

La figure 7.12 montre les profils de la contrainte de cisaillement $\overline{u'v'}$ à gauche et de la dissipation turbulente ε à droite. Comme pour les autres tensions de Reynolds, la contrainte de cisaillement est mieux prédite par l'AFM au centre de la cavité pour $0,3 < y/H < 0,6$. Pour $y/H > 0,6$, l'AFM et l'EB-DFM donnent des résultats équivalents et enfin en bas de la cavité en $y/H < 0,1$, l'EB-DFM se révèle supérieur à l'AFM même si aucun des modèles n'arrive à prédire la partie négative de $\overline{u'v'}$ dans cette zone. Pour cette variable, le terme de flottabilité est guidé par le flux normal $\overline{u'\theta'}$. La figure 7.14 partie gauche, représentant ce flux

7.7.2 Cavité 2D de rapport de longueurs 4 :1 à $Ra = 10^{11}$

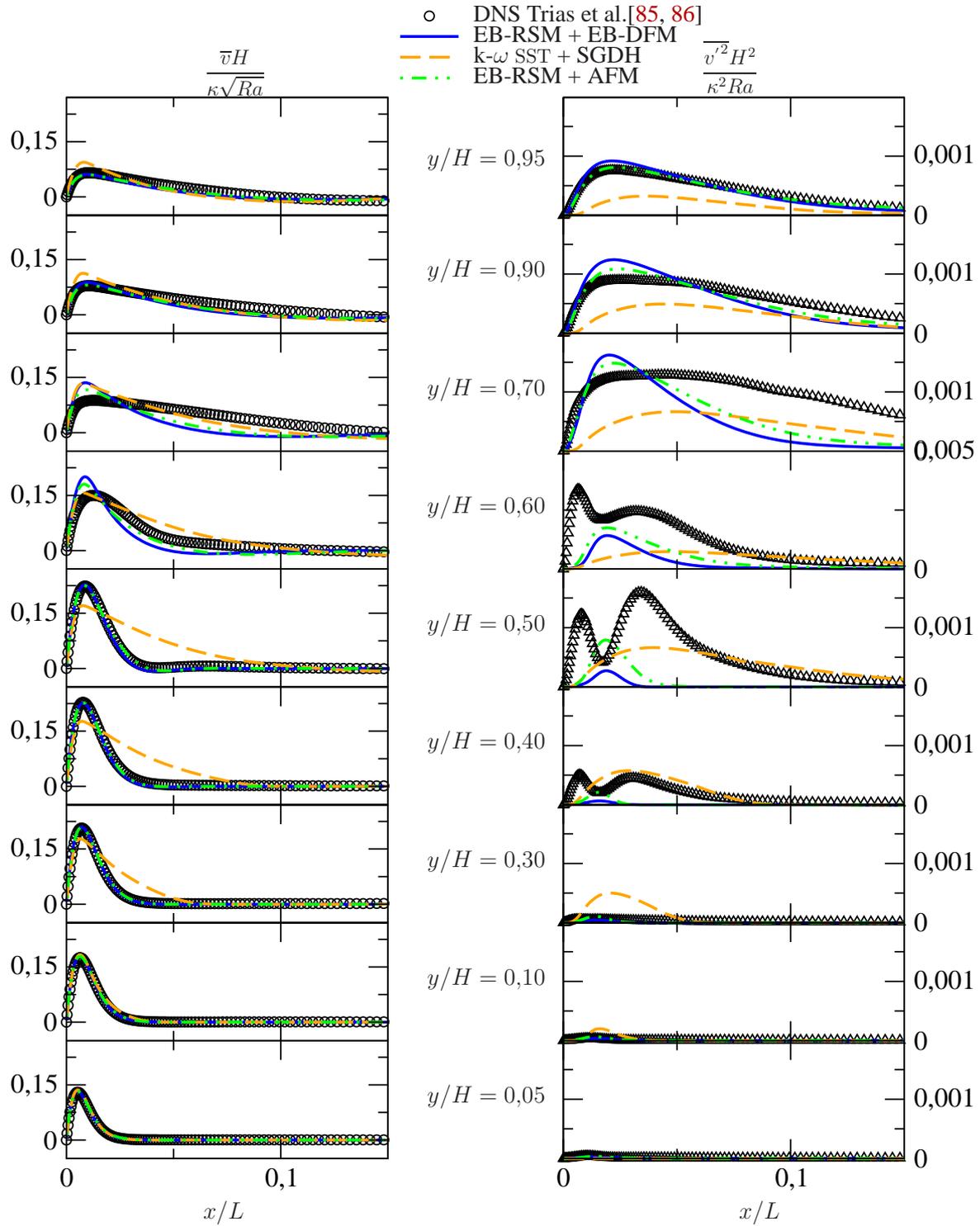


FIG. 7.10 – \bar{v} et $\overline{v'^2}$ en convection naturelle, DNS de Trias et al.[85, 86].

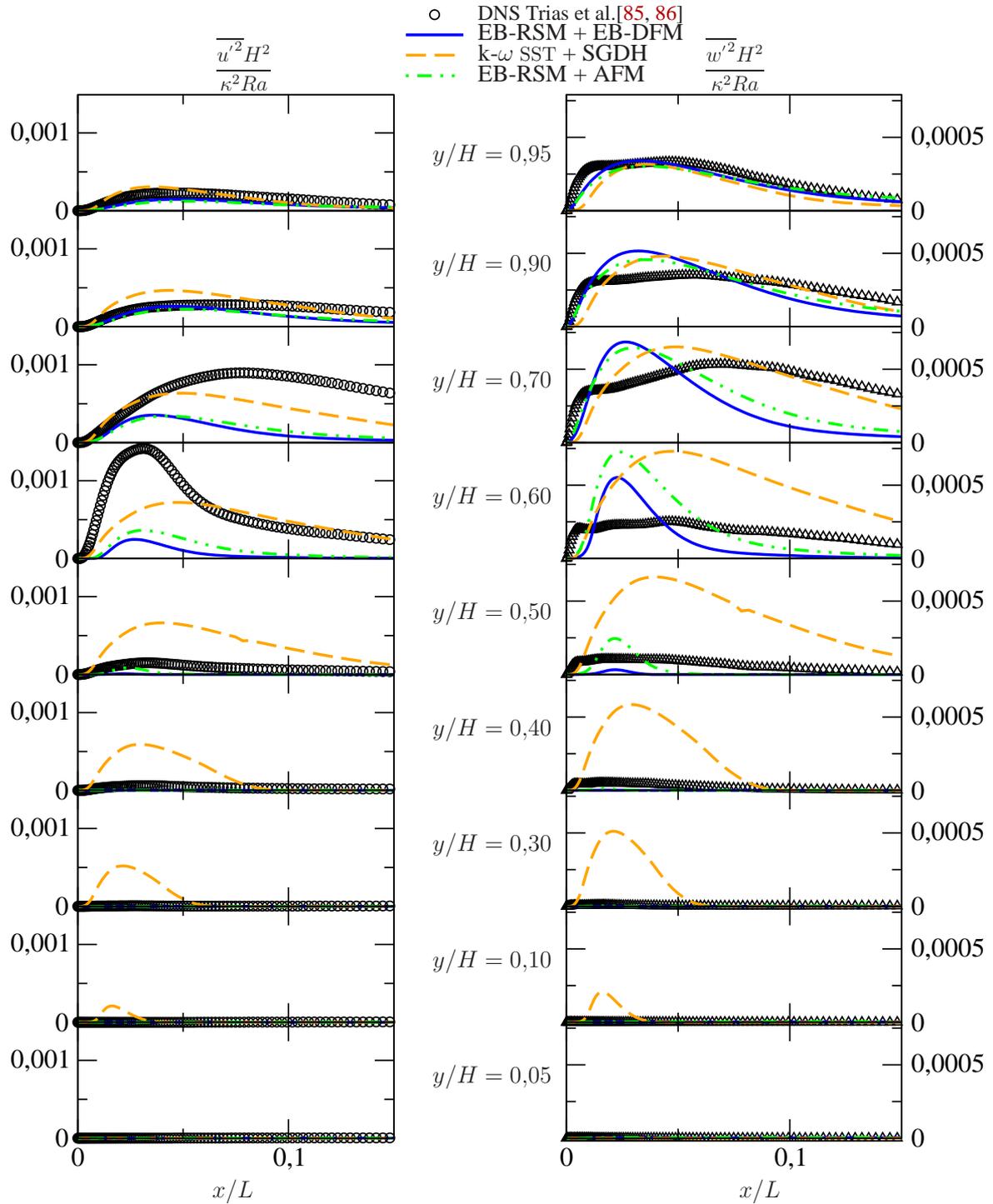


FIG. 7.11 – $\overline{u'^2}$ et $\overline{w'^2}$ en convection naturelle, DNS de Trias et al.[85, 86].

montre des différences similaires avec la contrainte de cisaillement. Ce qui prouve que sur ce cas, une bonne prédiction des flux thermiques donnera une bonne prédiction des tensions de Reynolds. La dissipation ε est fortement sous-estimée en paroi par tous les modèles. Si on occulte cette zone de proche paroi, les conclusions sont les mêmes que pour les tensions diagonales, c'est-à-dire que l'AFM est supérieur à l'EB-DFM au centre de la cavité car la turbulence est crée plus tôt puis les modèles sont équivalents dans la partie supérieures de la cavité. On a toujours une légère supériorité de l'EB-DFM en bas de la cavité.

La figure 7.13 montre les profils de la température moyenne $\bar{\theta}$ à gauche et de sa variance $\overline{\theta'^2}$ à droite. Le k- ω SST + SGDh a tendance à surestimer la température dans la partie inférieure de la cavité puis à la sous-estimer dans la partie supérieure. Les modèles EB-RSM + AFM et EB-RSM + EB-DFM permettent une bonne prédiction de la température. En effet, le flux intervenant dans cette variable est principalement le flux normal $\overline{u'\theta'}$ et les différences observées (Figure 7.14) entre les modèles EB-RSM + AFM et EB-RSM + EB-DFM ont peu d'influence sur le profil de la température. En ce qui concerne la variance de la fluctuation de la température, elle est sous-estimée par les modèles utilisant l'EB-RSM et surestimée dans la partie inférieure puis sous-estimée dans la partie supérieure par le k- ω SST. Le flux intervenant dans la variance est également le flux normal à la paroi, soit principalement $\overline{u'\theta'}$. Cette fois, les différences observées entre les modèles à la figure 7.14 ont une plus grande sensibilité et sont répercutées sur les profils de $\overline{\theta'^2}$. La variance est ainsi plus sensible à la bonne prédiction de $\overline{u'\theta'}$ que l'est la température.

La figure 7.14 montre les profils des flux thermiques turbulents $\overline{u'\theta'}$ à gauche et $\overline{v'\theta'}$ à droite. Le flux normal $\overline{u'\theta'}$ est sous estimé par les modèles utilisant l'EB-RSM, surestimé par le k- ω SST dans la partie $y/H \leq 0,6$ puis globalement bien prédit par tous les modèles dans la partie haute pour $y/H > 0,6$. L'EB-RSM associé à l'AFM représente le mieux cette variable. Le flux longitudinal $\overline{v'\theta'}$ est très mal modélisé par le k- ω SST + SGDh, ce qui est due à la définition du SGDh. La modélisation EB-RSM + AFM représente le mieux ce flux au centre de la cavité pour $0,3 < y/H < 0,7$ et l'EB-RSM + EB-DFM le modélise le mieux dans le reste de la cavité. Cette différence au centre de la cavité vient du fait qu'avec l'AFM, l'EB-RSM crée de la turbulence plus rapidement qu'avec l'EB-DFM. D'ailleurs, on peut remarquer que l'allure des profils des flux est guidée par l'allure des tensions qu'ils utilisent et inversement. Ainsi $\overline{u'\theta'}$ suit l'évolution $\overline{u'v'}$ alors que $\overline{v'\theta'}$ suit celle de $\overline{v'^2}$ qui contient deux pics prononcés en paroi. Ce cas montre que dans ce cas en convection naturelle, les tensions de Reynolds et les flux thermiques sont fortement en interaction.

La figure 7.15 montre l'énergie cinétique turbulente calculée par le modèle EB-RSM associé à l'AFM.   gauche l'EB-RSM utilise une échelle de temps mixte thermique/dynamique

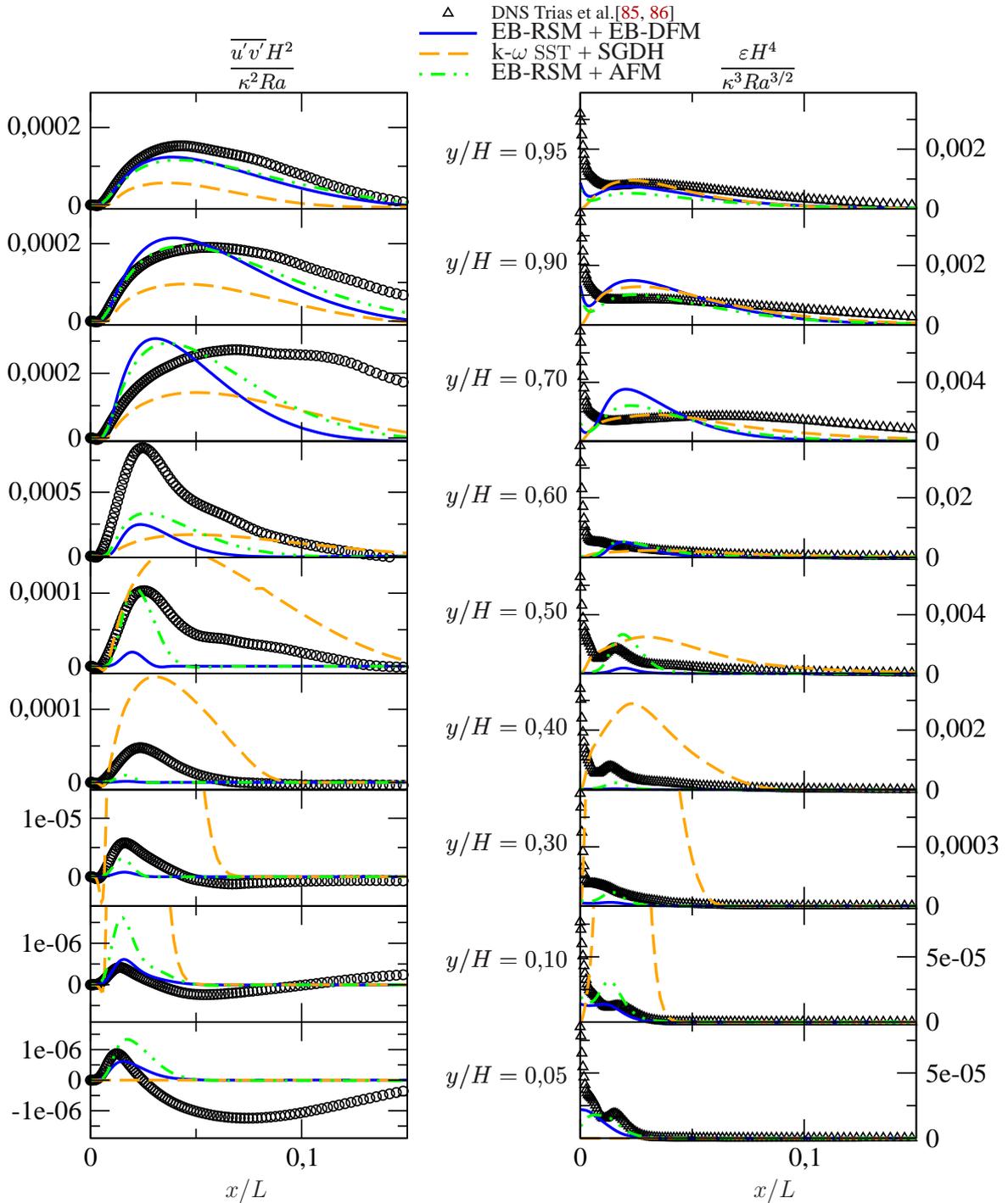


FIG. 7.12 – $-\overline{u'v'}$ et ϵ en convection naturelle, DNS de Trias et al. [85, 86].

7.7.2 Cavité 2D de rapport de longueurs 4 :1 à $Ra = 10^{11}$

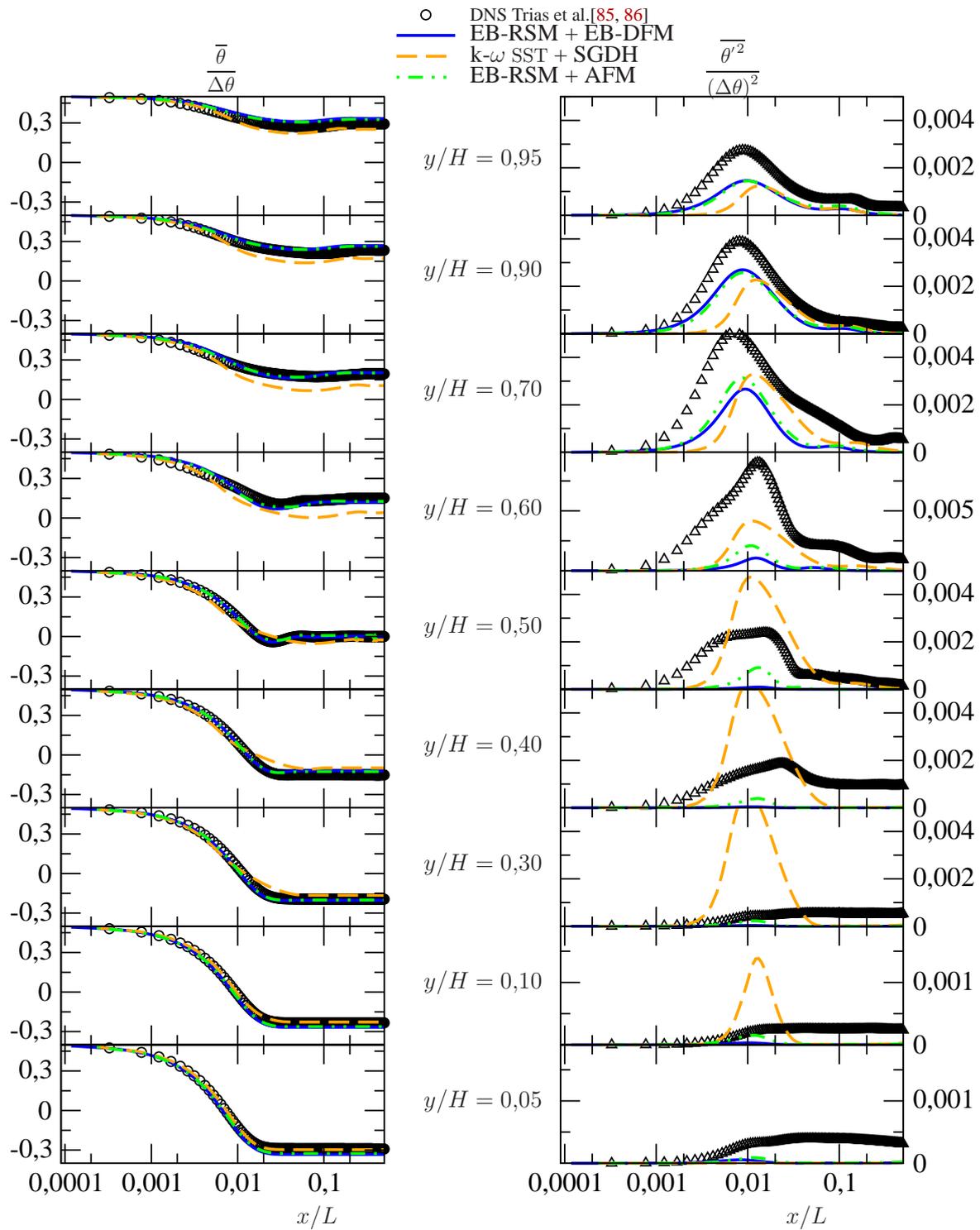


FIG. 7.13 – $\bar{\theta}$ et $\overline{\theta'^2}$ en convection naturelle, DNS de Trias et al.[85, 86].

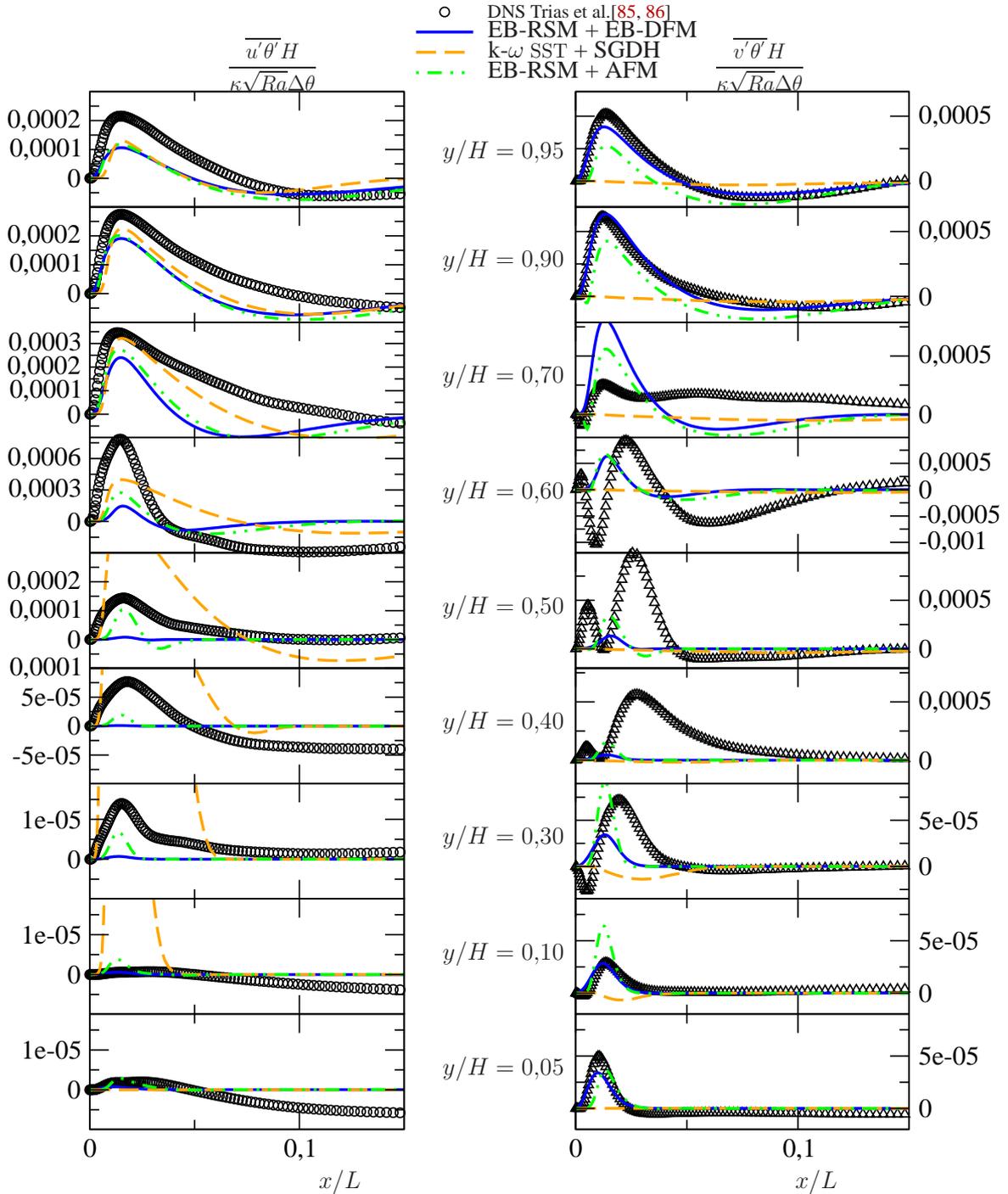


FIG. 7.14 – $\overline{-u'\theta'}$ et $\overline{v'\theta'}$ en convection naturelle, DNS de Trias et al.[85, 86].

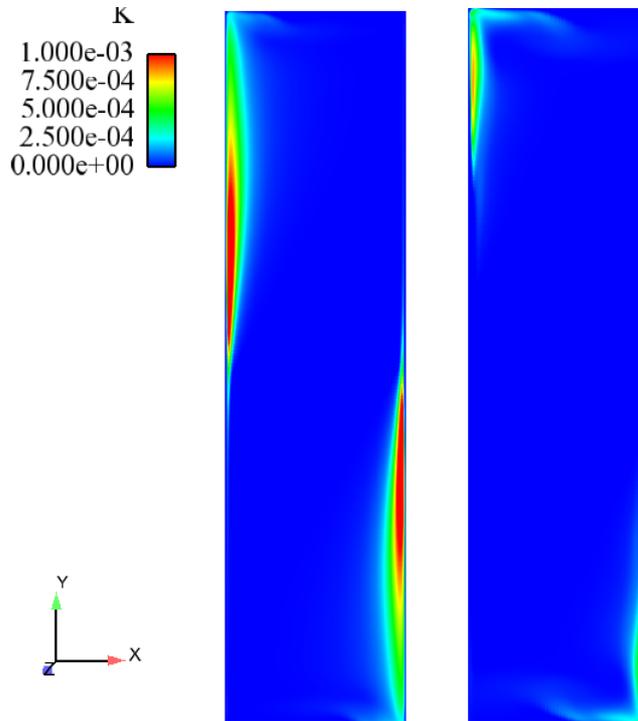


FIG. 7.15 – Distribution de l’énergie cinétique turbulente avec l’EB-RSM + AFM associé à gauche avec l’échelle de temps thermique dans le terme de flottabilité de la dissipation et à droite avec une échelle de temps dynamique classique dans la cavité 4 :1 de la DNS de Trias et al.[85, 86].

pour le terme de flottabilité de la dissipation turbulente et à droite ce terme de flottabilité utilise une échelle de temps dynamique classique. Cette comparaison montre que l’utilisation de l’échelle de temps mixte permet d’améliorer la précision du point de transition qui est primordial sur ce cas pour reproduire correctement les valeurs de la DNS.

Pour conclure sur ce cas, une modélisation du premier ordre de type $k-\omega$ SST + SGDh n’est pas adaptée à cette configuration. Au vu des résultats sur la cavité de Betts & Bokhari [10], une modélisation de type $v2f$ lui serait préférable, malheureusement le modèle $\phi - \bar{f}$ disponible dans *Code_Saturne* v1.3.3 ne converge pas sur ce cas. L’utilisation de l’EB-RSM associé au modèle algébrique de flux turbulent AFM et l’utilisation d’une échelle mixte thermique/dynamique pour le terme de production par flottabilité dans l’équation de la dissipation est globalement plus appropriée. En effet sur ce cas, en raison du faible niveau de turbulence, la détermination du point de transition laminaire/turbulent est crucial pour bien reproduire les valeurs de la DNS. Lorsque l’EB-RSM est associé à l’EB-DFM, les résultats sont également satisfaisants.

Chapitre 8

Simulation d'un écoulement avec transfert de chaleur à travers une matrice de tubes fins confinés avec paroi inférieure chauffée (convection forcée)

L'objectif de ce chapitre est de montrer que l'EB-RSM associé aux modèles de thermiques implantés dans *Code_Saturne* v1.3.3 (voir annexe E) fonctionne sur des cas à géométries plus complexes proches des configurations industrielles. Il faudra bien entendu un retour d'expérience considérable, qui dépasse largement le cadre de cette thèse, pour utiliser ces modèles RANS avancés de façon industrielle. Deux cas expérimentaux ont été choisis, le premier consiste à représenter l'écoulement dans une matrice de tubes fins confinés en convection forcée et le second est le cas « Valida » qui représente l'écoulement autour d'un cylindre chauffé monté en paroi en convection mixte et naturelle. On n'expose ici que le premier cas. Le second est en cours de traitement et nécessitera des investissements supplémentaires.

8.1 Présentation du cas

Ce cas test a été étudié lors du 15ème Workshop Ercoftac-SIG15 et a pour références : les expériences de Dvorak [27], Ames et al. [3, 4, 5, 6] et Nordquist [68] ainsi que les calculs LES de Benhamadouche et al. [9]. Ces derniers étudient l'écoulement en air autour de 8 rangées de 7,5 tubes fins disposés en quinconce et espacés de $P = 2,5D$ où D est le diamètre

8.8.1 Présentation du cas

d'un tube ($D = 2,54 \cdot 10^{-2} \text{m}$, soit 1 pouce dans le dispositif expérimental). Les tubes sont disposés entre 2 plaques distantes de $H = 2D$, la hauteur d'un tube. L'écoulement a été expérimentalement étudié à 3 nombres de Reynolds : 3000, 10000 et 30000. Ce nombre de Reynolds est défini par : $Re = \frac{V_{BG} D}{\nu}$ où D est le diamètre d'un tube et V_{BG} la vitesse débitante intertube moyenne. Plus précisément, si V_0 est la vitesse d'entrée, en considérant la conservation de la masse, cette vitesse débitante intertube s'écrit : $V_{BG} = \frac{P}{P - D} V_0$. Plusieurs configurations sont disponibles pour les transferts thermiques, mais seul un cas est étudié par la suite. La figure 8.1 montre un schéma représentant une vue du dessus de l'expérience d'Ames et al. [3, 4, 5, 6].

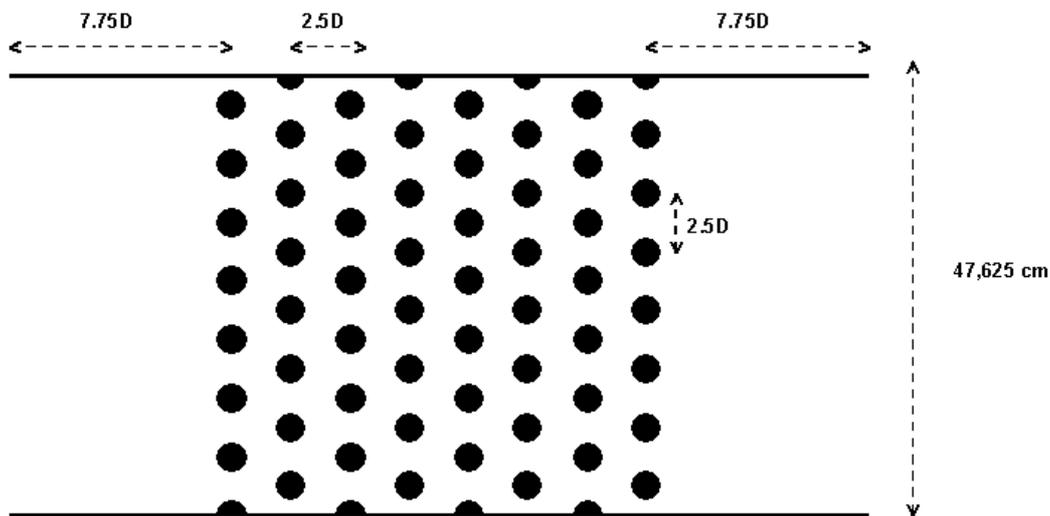


FIG. 8.1 – Schéma de l'expérience originelle de Ames et al.[5].

Le domaine de calcul utilisé pour les LES de Benhamadouche et al.[9] et les simulations URANS, utilisant les modèles développés dans cette thèse, est réduit par rapport au domaine expérimental. En effet, ce domaine suppose un état périodique de l'écoulement et comporte 8 rangées de 2 tubes disposés en quinconce et espacés de $2,5D$. Afin de réduire les effets des conditions d'entrée et de sortie, les longueurs d'entrée L_U (longueur du domaine en amont du centre de la première rangée de tube) et de sortie L_D (longueur du domaine en aval du centre de la dernière rangée de tube) ont été allongées par rapport à l'expérience, c'est-à-dire $L_U = 10D$ et $L_D = 15D$ au lieu de $7,75D$. La figure 8.2 représente le domaine étudié par les simulations et la figure 8.3 un volume élémentaire de ce domaine qui sera utilisé pour le calcul de la température de référence intervenant dans la formule du nombre de Nusselt.

CHAPITRE 8. SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT AVEC TRANSFERT DE CHALEUR À TRAVERS UNE MATRICE DE TUBES FINS CONFINÉS AVEC PAROI INFÉRIEURE CHAUFFÉE (CONVECTION FORCÉE)

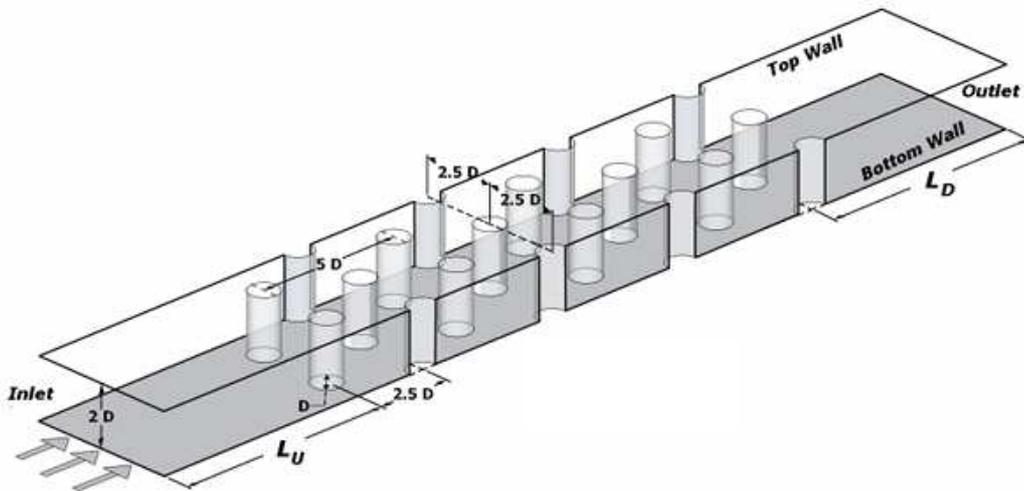


FIG. 8.2 – Schéma du domaine simulé [9].

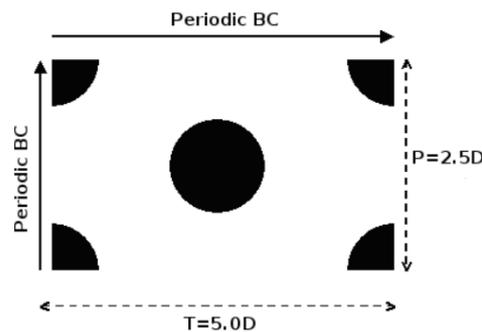


FIG. 8.3 – Volume élémentaire de la figure 8.1 utilisé pour le calcul de θ_{ref} .

Une condition de « paroi lisse » est appliquée aux parois et une condition de périodicité est utilisée sur les côtés gauche et droit. En entrée, la température est constante et égale à 0, seule la paroi inférieure est chauffée *via* un flux imposé constant q_w . Les autres parois sont considérées adiabatiques. Les effets dus à la flottabilité sont négligés, ce qui induit que la température est considérée comme un scalaire passif, c'est-à-dire qu'elle ne joue pas sur la dynamique de l'écoulement. Le nombre de Prandtl utilisé est celui de l'air en condition ambiante, soit 0,71. Pour les conditions aux limites d'entrée des variables dynamiques, la vitesse axiale U est imposée égale à la vitesse débitante V_{BG} , les variables turbulentes sont fixées à partir de formules classiques de turbulence développée utilisant un diamètre hydraulique $D_H = 2H$ et une intensité turbulente $I_k = 5\%$ correspondant grossièrement à un état de turbulence développée en canal. Ainsi, la dissipation est déterminée par la formule

suivante :

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{0,1\kappa D_H} \quad (8.1)$$

où $\kappa = 0,42$, $C_\mu = 0.09$, $D_H = 2H$ et k est telle que :

$$k = \frac{3}{2} V_{BG}^2 I_k^2 \quad (8.2)$$

Les tensions de Reynolds R_{ij} sont supposées isotropes telles que :

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (8.3)$$

Pour les simulations URANS, seul les cas à Reynolds 10000 et 30000 ont été étudiés. Les résultats de deux modèles de turbulences sont présentés : le modèle $\phi - \bar{f}$ de Laurence et al. [54] et le modèle au second ordre, exposé dans cette thèse, l'EB-RSM. Ce dernier sera associé à 3 fermetures différentes pour les flux thermiques turbulents : le GGDH, l'EB-GGDH et l'EB-DFM. Comme vu précédemment sur le cas du canal, en convection forcée il n'y avait pas de différences majeures entre ces fermetures thermiques pour les variables principales (vitesse, température, etc.). Ces simulations vont être étudiées, suivant la présente configuration, ci-dessous.

Les modèles URANS utilisent un maillage à 2,3 millions de mailles pour le cas à $Re = 10000$ et 3,9 millions de mailles à $Re = 30000$. Pour le modèle $\phi - \bar{f}$ et l'EB-RSM, le nombre de courant maximal (CFL_{max}) et la valeur de la distance non-dimensionnelle maximale à la paroi (y_{max}^+) sont disponibles au tableau 8.1.

	$Re = 10000$		$Re = 30000$	
	EB-RSM	$\phi - \bar{f}$	EB-RSM	$\phi - \bar{f}$
CFL_{max}	1,4	0,9	2,3	0,9
y_{max}^+	2,3	1,9	1,4	1,1

TAB. 8.1 – Valeurs du nombre de courant maximal (CFL_{max}) et la valeur de la distance non-dimensionnelle maximale à la paroi (y_{max}^+) pour les deux simulation à $Re = 10000$ et $Re = 30000$ pour les modèles de turbulence $\phi - \bar{f}$ et EB-RSM.

Un des objectifs de l'étude est d'obtenir les pertes de charges subies par l'écoulement. Pour les retrouver, on a besoin de calculer le coefficient de pertes de charges. Ce coefficient est calculé à partir de la formule utilisée par Ames et al. [5] (ici, le 2 est bien au dénominateur) :

$$f = \frac{\Delta P}{2\rho V_{BG}^2 N} \quad (8.4)$$

CHAPITRE 8. SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT AVEC TRANSFERT DE CHALEUR À TRAVERS UNE MATRICE DE TUBES FINS CONFINÉS AVEC PAROI INFÉRIEURE CHAUFFÉE (CONVECTION FORCÉE)

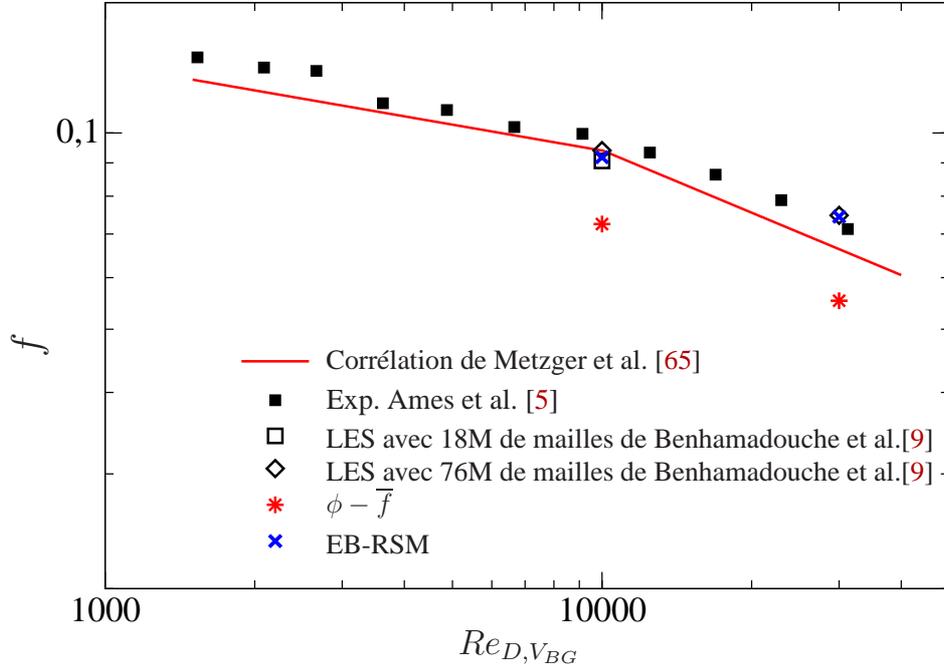


FIG. 8.4 – Coefficient de pertes de charges [9].

où P est la pression et N le nombre de rangée, soit 8 dans le cas présent.

La figure 8.4 montre le coefficient de pertes de charges en fonction du nombre de Reynolds comparé aux données expérimentales de Ames et al. [5] et à la corrélation de Metzger et al. [65] donnée par :

$$\begin{cases} \text{pour } Re < 10^4, f = 0,317Re^{-0,132} \\ \text{pour } Re > 10^4, f = 1,76Re^{-0,318} \end{cases} \quad (8.5)$$

La LES et l'EB-RSM sont en très bon accord avec les données expérimentales et la corrélation de Metzger, alors que le $\phi - \bar{f}$ sous-estime le coefficient de perte de charge d'environ 20% ; ce qui permet d'envisager une meilleure prédiction des données dynamiques avec l'EB-RSM qu'avec le $\phi - \bar{f}$.

On s'intéresse maintenant à l'instationnarité captée par les modèles. La figure 8.5 montre une prise instantanée de la vitesse axiale pour les trois calculs avec la LES, l'EB-RSM et le $\phi - \bar{f}$. On voit clairement qu'avec la LES et l'EB-RSM, l'instationnarité est plus forte qu'avec le $\phi - \bar{f}$ où la vitesse instantanée paraît quasi-stationnaire, en particulier au niveau des premières rangées, ce qui amène à penser que les transferts thermiques seront moins bien modélisés par le $\phi - \bar{f}$. Pour vérifier si les instationnarités sont bien captées, on peut comparer les coefficients de portance $rms C'_L$ ou encore les nombres de Strouhal St obtenus

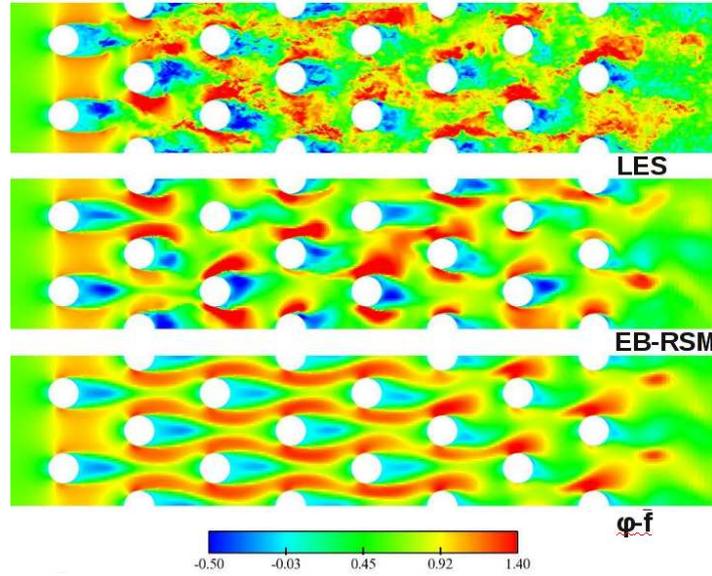


FIG. 8.5 – U instantanée obtenue avec la LES à 76M de mailles de Benhamadouche et al.[9], l'EB-RSM et le $\phi - \bar{f}$ à $Re = 10000$.

via la densité spectrale du signal du coefficient de portance. Ce sont de bons indicateurs de la capacité des modèles à reproduire l'instationnarité de l'écoulement. Le tableau 8.2 montre les différentes valeurs du C'_L et du St en fonction de la rangée (plusieurs nombres de Strouhal $St1$ et $St2$ sont montrés dans le tableau car on visualise plusieurs pics sur la DSP).

	LES (18,2M mailles)			$\phi - \bar{f}$			EB-RSM		
	C'_L	$St1$	$St2$	C'_L	$St1$	$St2$	C'_L	$St1$	$St2$
rangée 1	0,02	0,25	0,31	0,0003	0,3	0,6	0,006	0,24	-
rangée 2	0,1	0,1	0,21	0,006	0,3	-	0,25	0,12	0,2
rangée 3	0,18	0,15	0,21	0,006	0,3	0,6	0,06	0,14	0,2
rangée 4	0,15	0,12	0,15	0,048	0,3	0,6	0,19	0,2	-
rangée 5	0,17	0,18	-	0,068	0,3	0,6	0,13	0,18	0,4

TAB. 8.2 – Valeurs du coefficient de portance $rms C'_L$ et des nombres de Strouhal pour différents modèles.

La LES donne la plus forte valeur du coefficient de portance $rms C'_L$ pour la première rangée, ce qui montre qu'elle capte l'instationnarité dès le début de la matrice contrairement aux modèles URANS. Les C'_L montrent que l'EB-RSM parvient à capter l'instationnarité à partir de la deuxième rangée, contrairement au $\phi - \bar{f}$ qui ne montre que de faibles oscillations

CHAPITRE 8. SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT AVEC TRANSFERT DE CHALEUR À TRAVERS UNE MATRICE DE TUBES FINS CONFINÉS AVEC PAROI INFÉRIÈRE CHAUFFÉE (CONVECTION FORCÉE)

du C_L . On peut remarquer que la LES et l'EB-RSM donnent un nombre de Strouhal identique, $St = 0,18$, pour la cinquième rangée. On peut estimer d'après les expérimentateurs et nos calculs que la solution à partir de la cinquième rangée peut être considérée comme statistiquement périodique en x . Nous allons alors poursuivre en nous intéressant qu'à cette position pour les deux nombres de Reynolds $Re = 10000$ et $Re = 30000$.

Pour le cas étudié, la figure 8.6 montre la position des lignes de post-traitement (les lignes A1, B et C sont disposées de façon arbitraire pour plus de visibilité). Ces lignes existent pour chaque rangée. On ne regarde ensuite que les lignes A1 et B positionnées au niveau de la cinquième rangée de cylindres dans l'espace inter-tubes.

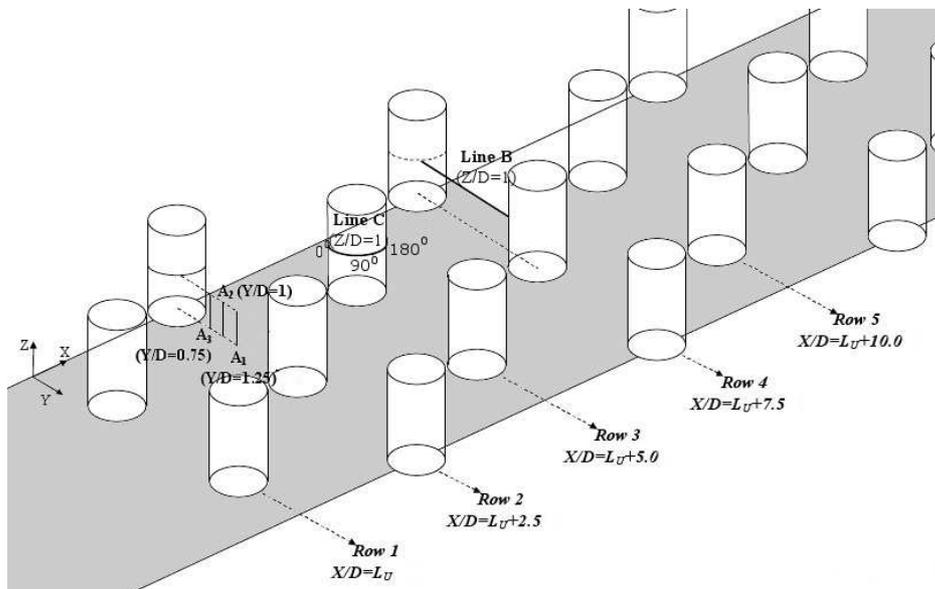


FIG. 8.6 – Position des profils.

Ce cas étant en convection forcée (i.e. sans forces de flottabilité), on s'intéresse plus à la modélisation dynamique qui, si elle est en accord avec l'expérience, devrait permettre d'obtenir de bons résultats en thermique. D'ailleurs pour la thermique, seule une comparaison du nombre de Nusselt, calculé au niveau de la paroi chauffée, est effectuée dans les deux cas (seules données expérimentales disponibles).

8.2 Cas à $Re = 10000$

Dans cette partie, on étudie l'écoulement à $Re = 10000$. L'écoulement pouvant être considéré statistiquement périodique à partir de la cinquième rangée, seuls les résultats à cette

position sont étudiés.

La figure 8.7 montre le coefficient de pression C_p autour de la cinquième rangée. Ce coefficient est calculé *via* l'équation suivante :

$$C_p = \frac{2(P - P_{max})}{\rho V_{eff}^2} \quad (8.6)$$

où P_{max} est la pression maximale autour du tube (en $\theta = 0$ ici) et $V_{eff} = V_{BG}$ ici.

On voit sur la figure 8.7 que la LES et l'EB-RSM reproduisent très bien le profil expérimental du coefficient de pression. En revanche, le modèle $\phi - \bar{f}$, même s'il est considéré comme un modèle sophistiqué du premier ordre, n'arrive pas à capter le bon coefficient de pression.

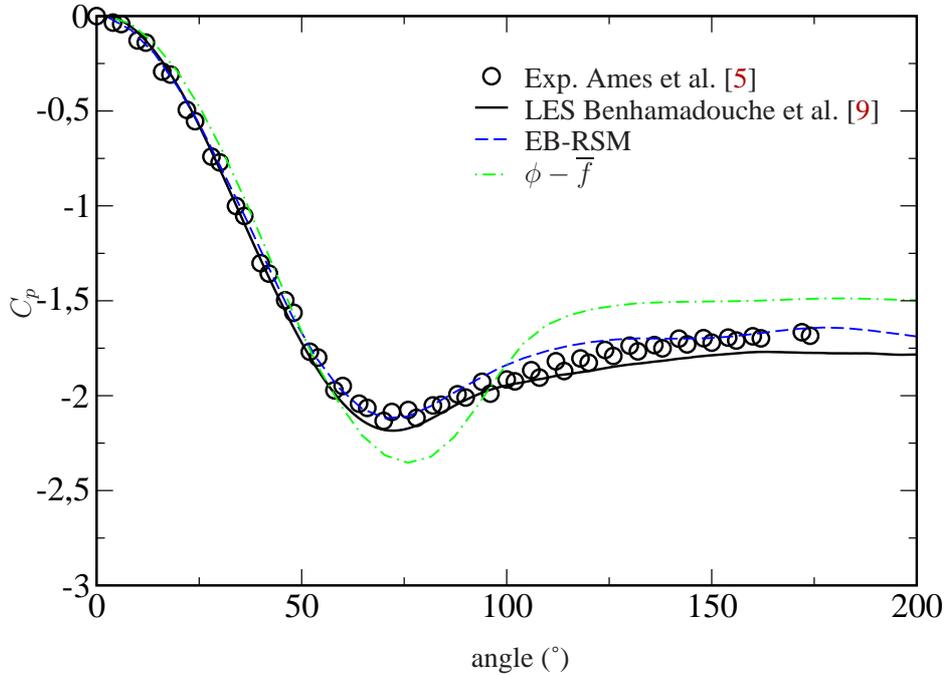


FIG. 8.7 – C_p 5ème rangée.

Les profils de vitesse moyenne axiale et transverse sont représentés à la figure 8.8. Les données expérimentales sont seulement disponibles pour la vitesse axiale sur la ligne B (figure 8.8(b)). On voit que la LES et l'EB-RSM sont en très bon accord avec les données expérimentales de Ames et al. [5] pour la vitesse axiale sur la ligne B. Là où il n'y a pas de données expérimentales, la LES et l'EB-RSM montrent des résultats proches alors que le $\phi - \bar{f}$ s'en éloigne. Le modèle $\phi - \bar{f}$ fournit un profil erroné qui ne respecte pas l'allure du profil expérimental : surestimation en proche paroi puis sous-estimation au centre. Ce déficit a aussi été observé par Delibra et al. [19, 20] avec le modèle $\zeta - \bar{f}$ (modèle quasi équivalent au $\phi - \bar{f}$ mais défini par Hanjalić et al.[38, 37]).

CHAPITRE 8. SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT AVEC TRANSFERT DE CHALEUR À TRAVERS UNE MATRICE DE TUBES FINS CONFINÉS AVEC PAROI INFÉRIEURE CHAUFFÉE (CONVECTION FORCÉE)

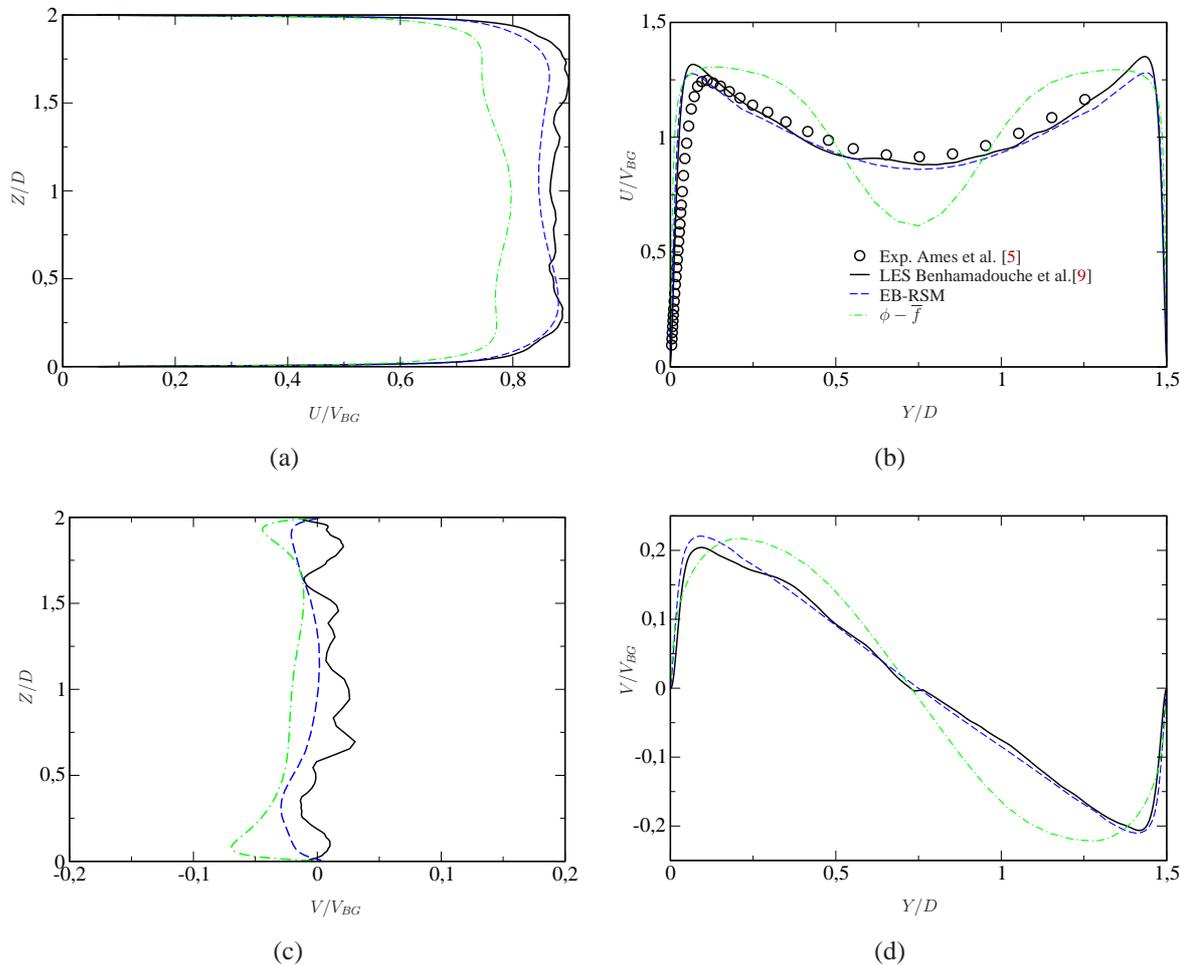


FIG. 8.8 – Profils de vitesse au niveau de la 5ème rangée, en a) et b), U sur les lignes A1 et B respectivement. en c) et d), V sur les lignes A1 et B respectivement

La figure 8.9 montre la vitesse axiale et sa valeur *rms* en proche paroi sur la ligne B. Quel que soit le type de modélisation choisi, on voit que la vitesse est surestimée au plus près de la paroi. Pour la valeur *rms*, la modélisation du premier ordre ne capte pas le pic de proche paroi, alors que la LES et l'EB-RSM le perçoivent mais plus proche de la paroi que l'expérience (on note ici encore une bonne concordance entre la LES et l'EB-RSM).

Pour les profils de vitesses fluctuantes, comme les calculs ont été faits en URANS, on a tracé les valeurs fluctuantes totales qui sont composées d'une partie modélisée et d'une partie résolue. On décompose la vitesse en la somme de sa partie résolue \tilde{u} et de sa partie résiduelle u'' telle que :

$$u = \tilde{u} + u'' \quad (8.7)$$

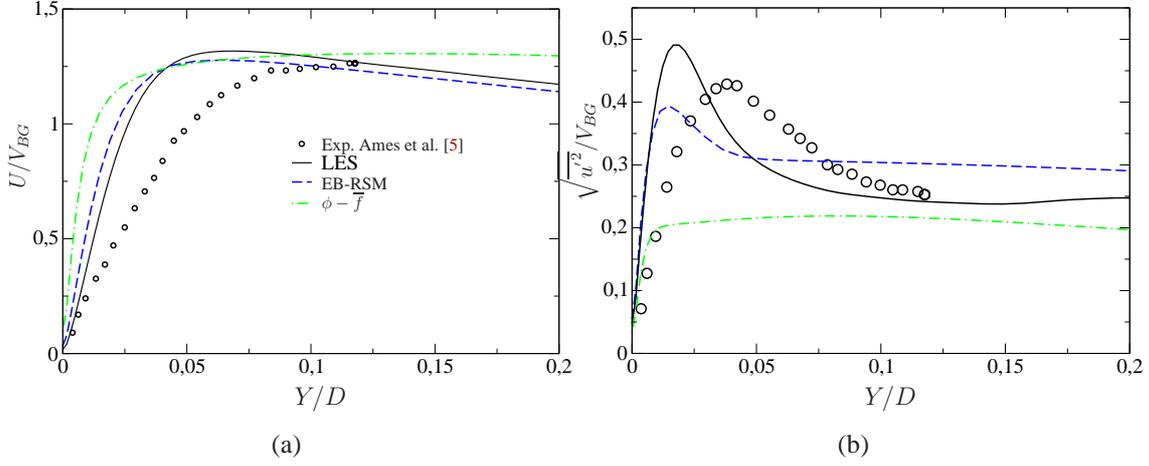


FIG. 8.9 – Profils de U et $\sqrt{u'^2}$ en proche paroi à la 5ème rangée sur la ligne B.

on a alors :

$$u'_{rms} = \sqrt{\underbrace{\overline{u''u''}}_{\text{modélisée}} + \underbrace{(\overline{\tilde{u}\tilde{u}} - \overline{u} \overline{u})^2}_{\text{résolue}} + \text{termes croisés}} \quad (8.8)$$

En URANS, on ne sait pas forcément définir l'opérateur de décomposition, c'est pourquoi les termes croisés sont traditionnellement considérés nuls.

Les figures 8.10 et 8.11 représentent les composantes de vitesses *rms* sur les lignes B et A1 respectivement. La LES et l'EB-RSM sont toujours proches de l'expérience. Ces figures montrent que les modèles URANS ne sont pas en « mode LES » car les parties modélisées sont non-nulles. En effet, la partie modélisée de la LES faite avec le maillage à 76 millions de mailles est quasiment nulle. Pour l'EB-RSM, les profils de la partie résolue sont proches de ceux de la LES et la sous-estiment. La partie modélisée augmente ces déficits au centre et en paroi, la somme des deux permet d'avoir un résultat très proche de la solution de la LES tout au long de l'espace inter-tube. On constate un comportement différent avec le $\phi - \bar{f}$. En effet, ce modèle dispose d'une partie résolue faible et d'une partie modélisée sous-estimant les valeurs de la LES et n'en respectant pas l'allure, principalement pour u'_{rms} et v'_{rms} .

La figure 8.12 représente une coupe de la vitesse moyenne axiale et transverse en $Z/H = 0,5$. Elle permet d'avoir une vue qualitative de ces deux variables. On retrouve ainsi les mêmes conclusions qu'avec les courbes des profils de vitesse moyennes précédentes, c'est-à-dire que la LES et l'EB-RSM donnent des résultats similaires alors que le $\phi - \bar{f}$, à cause de sa limitation de modèle du premier ordre, n'arrive pas à capter la physique de l'écoulement.

CHAPITRE 8. SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT AVEC TRANSFERT DE CHALEUR À TRAVERS UNE MATRICE DE TUBES FINS CONFINÉS AVEC PAROI INFÉRIÈRE CHAUFFÉE (CONVECTION FORCÉE)

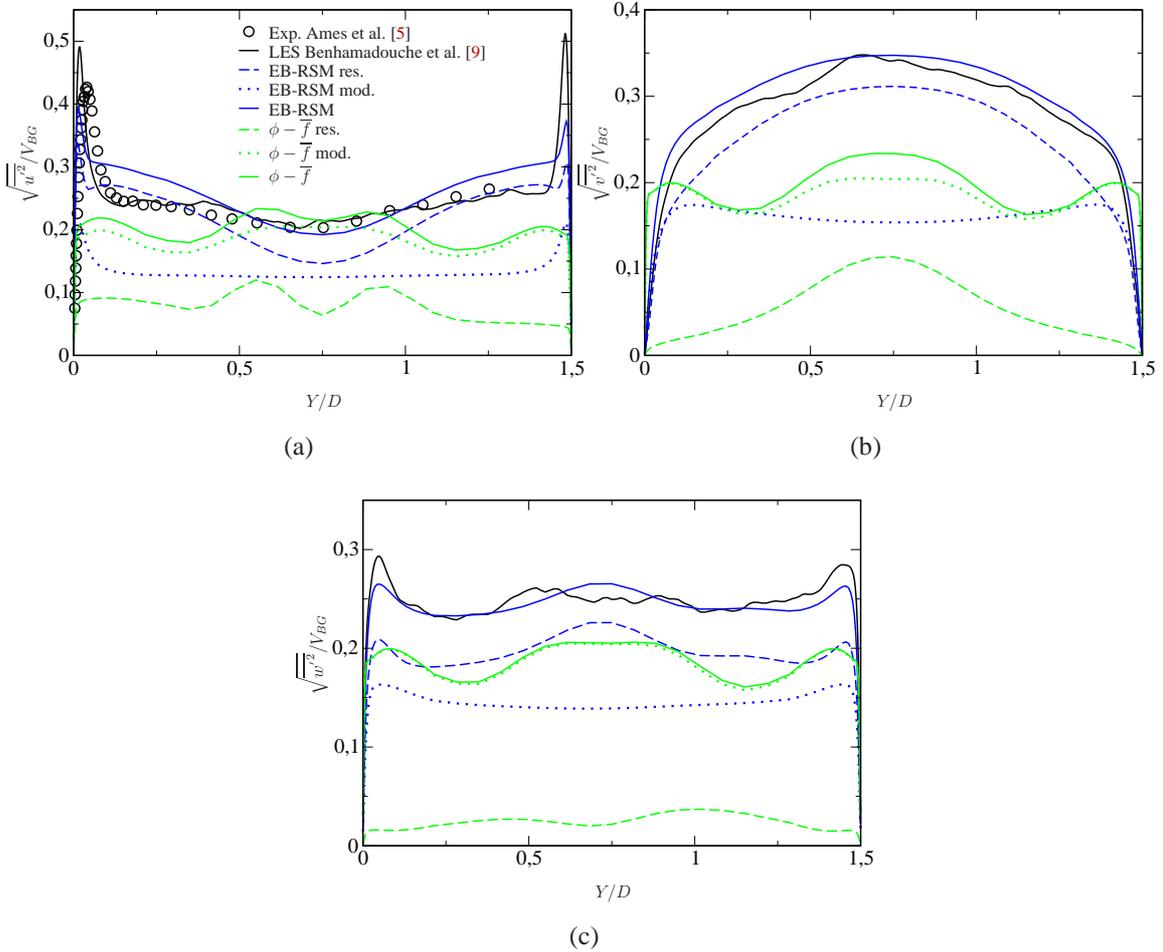


FIG. 8.10 – Profils $\sqrt{u'^2}$, $\sqrt{v'^2}$ et $\sqrt{w'^2}$ au niveau ligne B à la 5ème rangée.

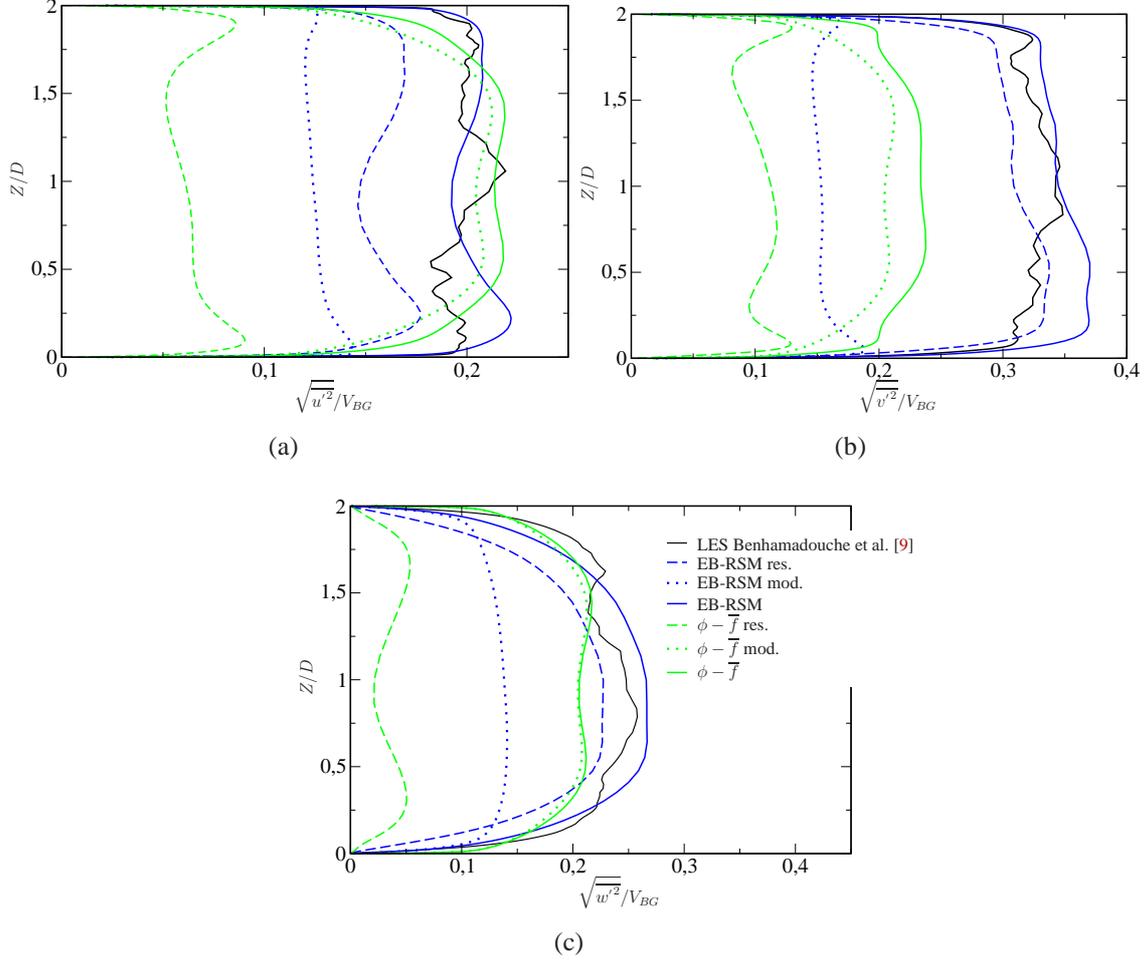
La figure 8.13 montre le nombre de Nusselt calculé au niveau de la paroi inférieure. Il a été calculé *via* la formule suivante :

$$Nu = \frac{q_w D}{\lambda (\theta_w - \theta_{ref})} \quad (8.9)$$

où θ_w est la température à la paroi, λ est la conductivité thermique et θ_{ref} est la température de référence. Cette dernière est calculée entre l'entrée et la sortie du volume de référence (cf figure 8.3) quand l'écoulement considéré statistiquement périodique est établi. On va expliquer dans la suite comment retrouver cette température de référence.

L'équation de transport de la température se réduit ici à :

$$\nabla \cdot (\rho C_p \underline{u} \theta) = \nabla \cdot (\lambda \nabla(\theta)) - \nabla \cdot (\underline{u' \theta'}) \quad (8.10)$$


 FIG. 8.11 – Profils $\sqrt{u'^2}$, $\sqrt{v'^2}$ et $\sqrt{w'^2}$ au niveau ligne A1 à la 5ème rangée.

Si on intègre sur le volume le terme de gauche de l'équation précédente et qu'on lui applique le théorème de Stokes, on obtient :

$$\int_V \nabla \cdot (\rho C_p \underline{u} \theta) dV = \int_S \rho C_p \theta (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS \quad (8.11)$$

En faisant le bilan thermique sur le volume de référence (figure 8.3), on a :

$$-\int_{S_1} \rho C_p \theta (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS + \int_{S_2} \rho C_p \theta (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS = \int_{\Sigma_1} q_w dS \quad (8.12)$$

où S_1 , S_2 et Σ_1 sont respectivement les surfaces d'entrée (en $x = 0$), de sortie (en $x = T$ tel que $T = 5D$) et chauffée par le flux. En séparant la température en une partie linéaire et une partie périodique, on obtient :

$$\theta = \underbrace{ax + b}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{\beta}_{\text{partie périodique}} \quad (8.13)$$

CHAPITRE 8. SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT AVEC TRANSFERT DE CHALEUR À TRAVERS UNE MATRICE DE TUBES FINS CONFINÉS AVEC PAROI INFÉRIEURE CHAUFFÉE (CONVECTION FORCÉE)

l'équation devient :

$$-\int_{S_1} \rho C_p (b + \beta) (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS + \int_{S_2} \rho C_p (aT + b + \beta) (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS = \int_{\Sigma_1} q dS \quad (8.14)$$

On a alors :

$$aT \int_{S_2} \rho C_p (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS = \int_{\Sigma_1} q_w dS \quad (8.15)$$

or la vitesse débitante est telle que :

$$V_{BG} = \frac{\int_{S_2} (\underline{u} \cdot \underline{n}) dS}{S_2} \quad (8.16)$$

en remplaçant, on trouve la valeur de la constante a :

$$a = \frac{q_w \sigma_1}{T \rho C_p V_{BG} S_2} \quad (8.17)$$

or

$$\theta_{ref} = \theta_{S_2} - \theta_{S_1} \quad (8.18)$$

$$= aT + b + \beta - b - \beta = \frac{q_w \Sigma_1}{\rho C_p V_{BG} S_2} \quad (8.19)$$

soit :

$$\theta_{ref} = \frac{q_w (2(P/D)^2 - \pi/2) D^2}{H(P - D) \rho C_p V_{BG}} \quad (8.20)$$

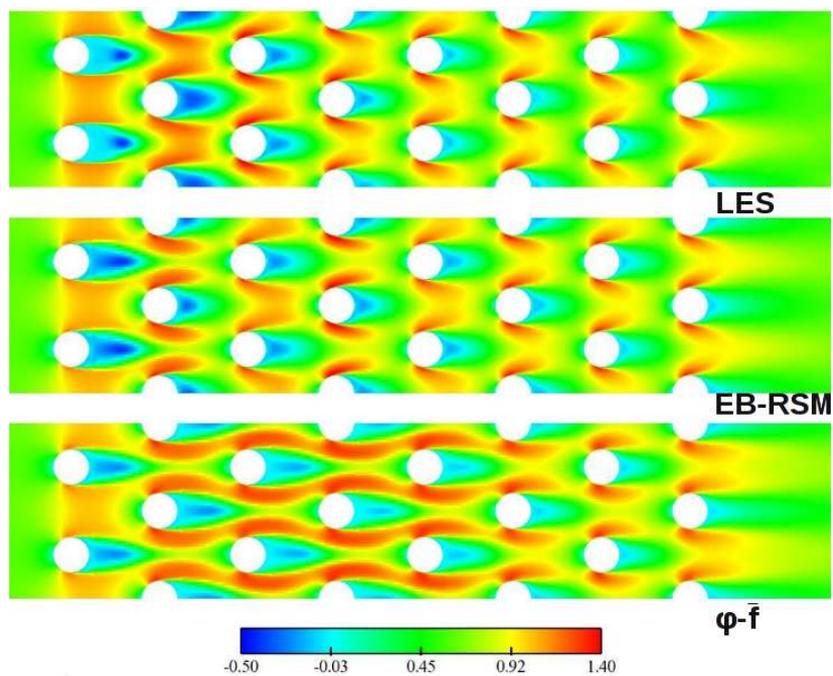
avec $P = 2,5D$ et $H = 2D$.

Pour le calcul des flux thermiques turbulents nécessaires au calcul de la température et donc du nombre de Nusselt, trois modèles associés à l'EB-RSM ont été testés, le GGDH, l'EB-GGDH et l'EB-DFM. Ce cas étant en convection forcée, c'est-à-dire que la thermique intervient de façon passive, on peut voir qualitativement avec la figure 8.13 que le choix du modèle de flux a très peu d'influence sur la valeur du nombre de Nusselt. En revanche, le choix du modèle de dynamique est très important. On retrouve les mêmes conclusions que pour les variables dynamiques, c'est-à-dire que la LES et l'EB-RSM donnent des résultats proches de l'expérience alors que le $\phi - \bar{f}$ représente mal cette quantité.

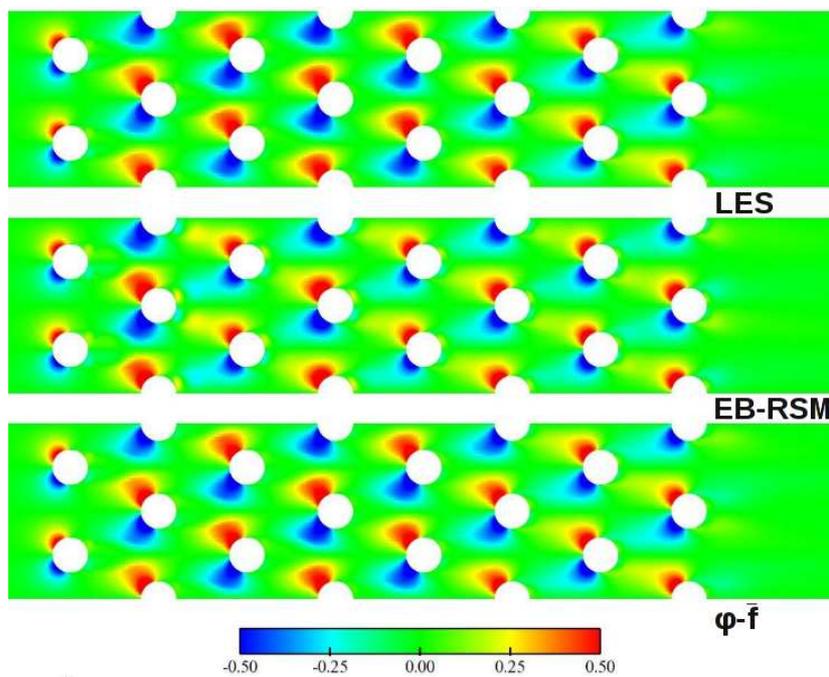
Afin de mieux comparer les différentes fermetures thermiques, les figures 8.15 et 8.16 montrent les profils du nombre de Nusselt, des modèles GGDH, EB-GGDH et EB-DFM associés à l'EB-RSM et du SGDH associé au $\phi - \bar{f}$. Ces modèles sont comparés aux résultats de la LES (76 millions de mailles) que l'on considérera comme solution de référence. Les positions des coupes des profils sont visibles sur la figure 8.14.

Ces deux figures confirment le fait qu'en régime de convection forcée, le modèle des flux thermiques turbulents joue peu dans la bonne prédiction de la thermique et que les différentes fermetures thermiques donnent des résultats similaires. En effet, même si l'EB-RSM associé à l'EB-DFM donne des résultats meilleurs, le choix du modèle de turbulence pour la dynamique a plus d'influence. L'écoulement étant anisotrope et donc les transferts thermiques également, l'EB-RSM est logiquement supérieur au $\phi - \bar{f}$ pour la prédiction de la thermique sur ce cas.

CHAPITRE 8. SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT AVEC TRANSFERT DE CHALEUR À TRAVERS UNE MATRICE DE TUBES FINS CONFINÉS AVEC PAROI INFÉRIÈRE CHAUFFÉE (CONVECTION FORCÉE)



(a)



(b)

FIG. 8.12 – U en a) et V en b) à $Re = 10000$.

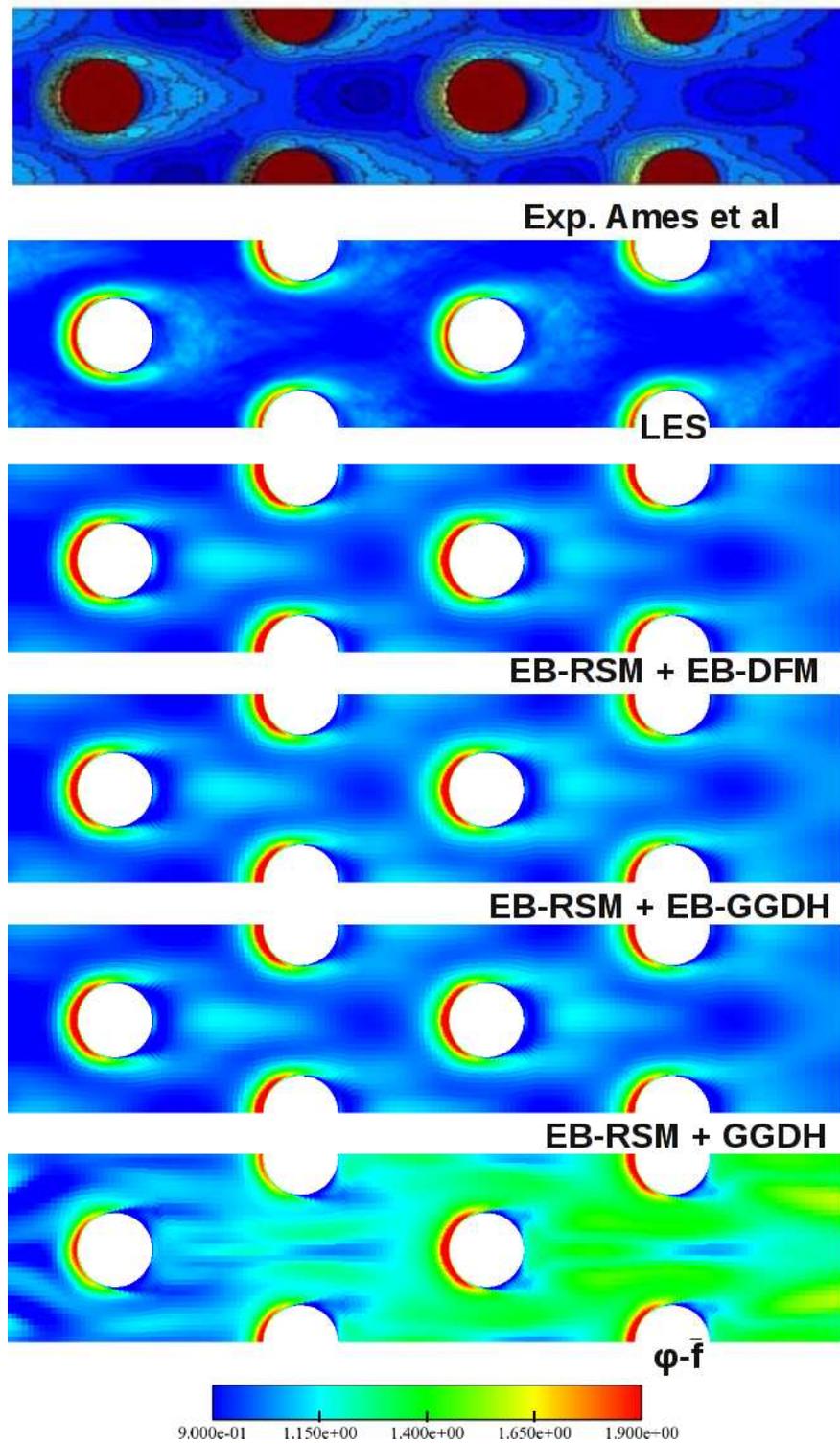


FIG. 8.13 – Nu à $Re = 10000$. La figure de l'expérience est tirée de l'article de Ames et al. [5].

CHAPITRE 8. SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT AVEC TRANSFERT DE CHALEUR À TRAVERS UNE MATRICE DE TUBES FINS CONFINÉS AVEC PAROI INFÉRIEURE CHAUFFÉE (CONVECTION FORCÉE)

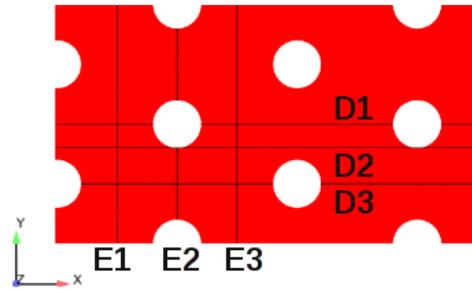


FIG. 8.14 – Positions des coupes des profils de nombre de Nusselt à partir de la 5ème rangée.

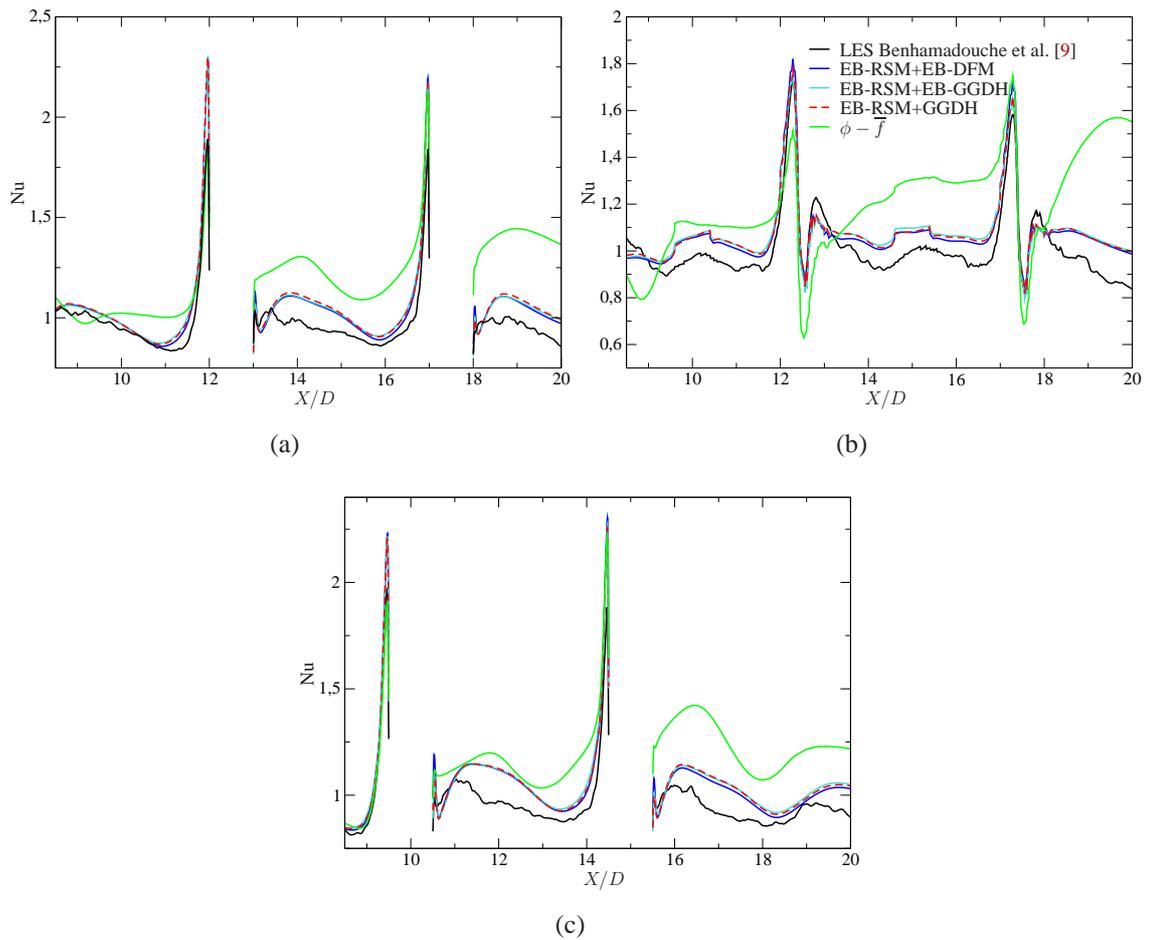


FIG. 8.15 – Profils du nombre de Nusselt suivant les lignes D1, D2 et D3 après la 5ème rangée.

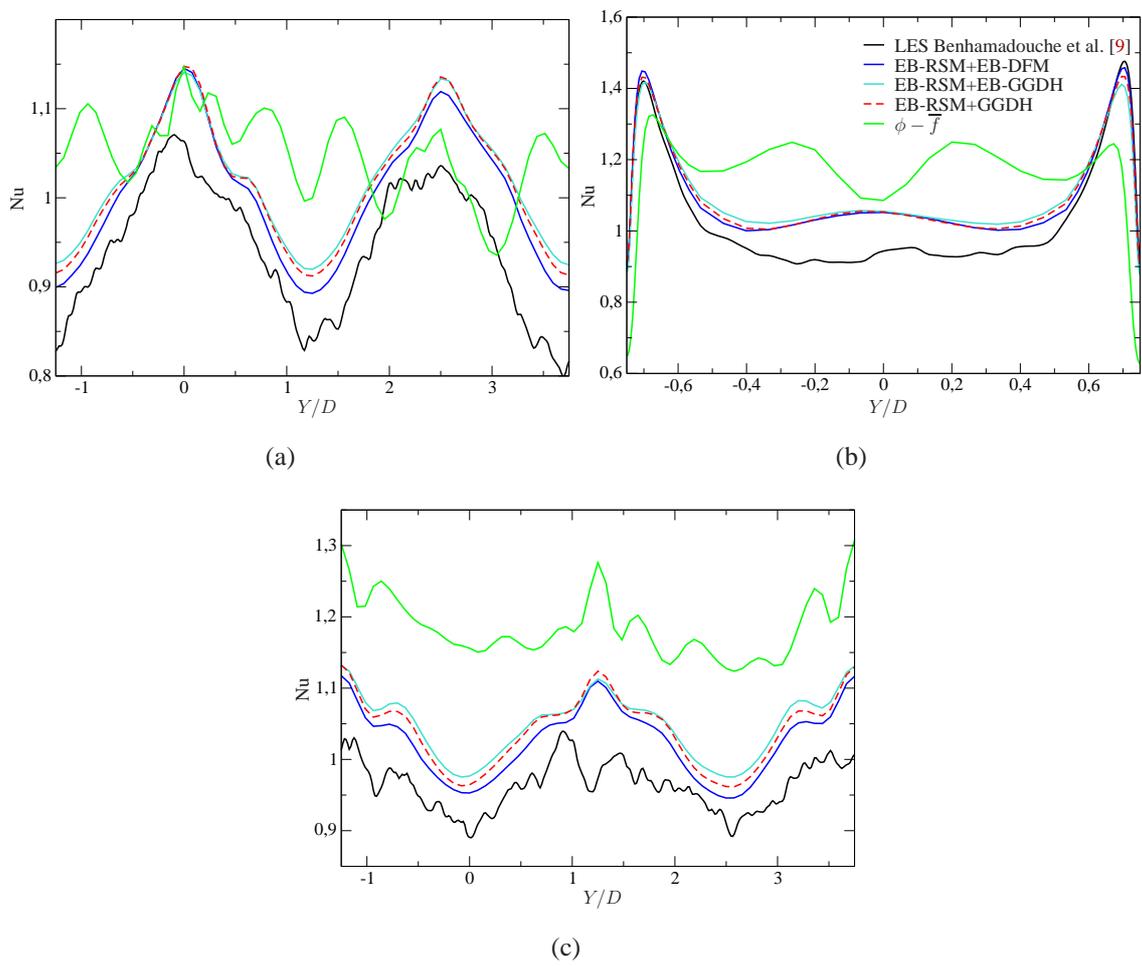


FIG. 8.16 – Profils du nombre de Nusselt suivant les lignes E1, E2 et E3 après la 5ème rangée.

8.3 Conclusion du cas

A $Re = 10000$, on a pu voir que la modélisation au premier ordre est loin d'être satisfaisante car elle capte mal la physique de l'écoulement. En revanche, l'utilisation du modèle EB-RSM est plutôt convaincante car il donne des résultats similaires à la LES pour les vitesses moyennes et *rms* ainsi que pour le nombre de Nusselt. La LES étant considérée comme référence car elle donne des résultats très proches de l'expérience. Le cas étant en convection forcée, il confirme le fait, que dans ce régime, le choix du modèle de flux thermique turbulent a peu d'influence sur le résultat.

A $Re = 30000$, Ces conclusions se retrouvent, on pourra se reporter à l'annexe F pour s'en convaincre.

Conclusions et Perspectives

Après une investigation bibliographique approfondie, on propose dans la présente thèse plusieurs modèles pour la prise en compte des flux thermiques turbulents, que ce soit dans l'équation de la température ou dans les termes de flottabilité apparaissant dans les équations de transport des tensions de Reynolds. Le modèle pour la prédiction de la dynamique de l'écoulement (vecteur vitesse, tensions de Reynolds et dissipation turbulente) a été figé (hors terme de flottabilité dans l'équation de la dissipation turbulente) afin de se concentrer sur la modélisation de la thermique. Un modèle "bas-Reynolds" faisant partie des modèles RANS les plus sophistiqués existant aujourd'hui dans la littérature, l'EB-RSM (Elliptic Blending-Reynolds Stress Model), résolvant les six composantes du tenseur de Reynolds en utilisant le principe de la pondération elliptique, a été choisi.

En partant principalement de deux modèles classiques, l'AFM (modèle algébrique le plus riche incluant le modèle GGDH) et le DFM (modèle à équations de transport pour les flux thermiques turbulents), on dérive des modèles se basant sur la pondération elliptique mais cette fois pour les flux thermique turbulents (le préfixe "EB-" signifie que la variante utilise la pondération elliptique). On propose à cette occasion un nouveau modèle pour la prédiction du ratio R des échelles de temps thermo-mécanique se basant sur le coefficient de pondération elliptique. Par ailleurs, une étude approfondie est menée afin de déterminer l'échelle de longueur à utiliser dans l'équation de pondération elliptique pour les flux thermiques turbulents et de l'échelle de temps à utiliser dans le terme de flottabilité de l'équation de la dissipation turbulente.

Les 3 régimes de convections forcée, mixte et naturelle ont été tout d'abord étudiés en 1D avec des tests *a priori* puis *a posteriori* sur des cas académiques. L'association de l'EB-RSM avec le modèle GGDH (Generalized gradient Diffusion Hypothesis) apporte une forte amélioration de toutes les variables par rapport au modèle SGDH (Simple Gradient Diffusion Hypothesis), modèle le plus couramment utilisé dans l'industrie pour les flux thermiques turbulents. L'utilisation des variantes avec pondération elliptique, que ce soit pour les modèles algébriques (GGDH et AFM) ou pour les modèles à équations de transport (DFM),

CHAPITRE 8. SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT AVEC TRANSFERT DE CHALEUR À TRAVERS UNE MATRICE DE TUBES FINS CONFINÉS AVEC PAROI INFÉRIEURE CHAUFFÉE (CONVECTION FORCÉE)

apporte une amélioration nette sur la composante du flux thermique turbulent dans le sens de l'écoulement et sur la variance de la température : l'amélioration est toujours progressive suivant l'ordre GGDH, EB-GGDH, AFM, EB-AFM, DFM, EB-DFM. L'amélioration du profil de vitesse et de température n'est cependant pas spectaculaire. A noter que les tests *a priori* ont également permis de montrer que l'utilisation d'une échelle de longueur thermique égale à environ 2,5 fois l'échelle dynamique, dans l'équation de pondération elliptique des flux thermiques turbulents, est souhaitable. Le cas de convection naturelle de Versteegh & Nieuwstadt [89] a par ailleurs permis de montrer que l'utilisation d'une échelle de temps mixte (moyenne géométrique des échelles de temps dynamiques et thermiques) dans le terme de production par flottabilité de l'équation de transport de la dissipation turbulente a un impact positif et permet de corriger toutes les variables dans le bon sens. Ces premiers résultats sont encourageant cependant d'autres tests sont à effectuer pour confirmer l'impact de cette échelle de temps mixte et vérifier les effets de la modification de la constante $C_{\varepsilon 3}$.

Deux cas de convection naturelle dans des cavités (appelés ici "cas semi-académiques") à des nombres de Rayleigh de l'ordre de 10^6 et 10^{11} sont par la suite étudiés. Le cas à bas nombre de Rayleigh montre qu'une modélisation turbulente au premier ordre de type v2f est suffisante pour représenter les grandeurs générales que sont la vitesse et la température. Si les tensions de Reynolds ou la variance de la température sont considérées, une modélisation au second ordre de type EB-RSM associée au modèle de flux turbulent à équations de transport EB-DFM est préférable. L'utilisation du modèle algébrique GGDH est limitée dans ce cas. Une modélisation légèrement plus évoluée, comme l'AFM qui utilise les 3 termes de production de l'équation des flux turbulents (celle due au gradient de température, au gradient de vitesse et à la flottabilité) est plus appropriée. On écartera ce modèle car la version EB-AFM donne des résultats laminaires. Le cas à nombre de Rayleigh plus élevé montre qu'une modélisation avec fermeture au premier ordre de type k- ω SST ou v2f n'est pas adaptée à cette configuration, la première ne donne pas de résultats satisfaisants alors que la deuxième diverge numériquement. L'utilisation de l'EB-RSM associée au modèle algébrique de flux turbulent AFM ou au modèle de transport EB-DFM et l'utilisation d'une échelle mixte thermique/dynamique pour le terme de production par flottabilité dans l'équation de la dissipation est globalement plus appropriée.

Pour finir, un cas-test de type "industriel" a été étudié. Le régime de ce cas test est celui de la convection forcée et consiste en un écoulement à travers une matrice de tubes confinés avec paroi inférieure chauffée. On montre que ce cas ne peut pas être traité avec les modèles du premier ordre de type v2f. Seul le modèle EB-RSM permet de capter de bons transferts

8.8.3 Conclusion du cas

thermiques comparables à ceux d'une LES. En revanche, on ne peut sur ce cas, comme sur les cas académiques, discriminer les différentes approches pour la résolution des flux thermiques turbulents, le modèle GGDH donnant déjà des résultats satisfaisants. On notera le fait que les différents modèles, même le plus sophistiqué (l'EB-RSM associé à l'EB-DFM), soient stables est un résultat capital. Ce qui laisse présager une utilisation potentielle des modèles exposés ici, en particulier l'EB-RSM associé au GGDH ou à l'EB-DFM en convection forcée ou mixte et l'EB-RSM associé à l'AFM ou à l'EB-DFM en convection naturelle, sur des configurations industrielles. Toutefois, les résultats précédents doivent être confirmés sur un cas test industriel en convection mixte. Ce cas test est en cours de traitement mais ne peut pas faire partie de ce manuscrit au vu de l'immaturation des résultats.

Bibliographie

- [1] H. Abe, H. Kawamura and Y. Matsuo (2004). Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to $Re_\tau = 1020$ with $Pr = 0.025$ and 0.71 ., *Int. J. Heat Fluid Fl.*, **25** :404–419.
- [2] K. Abe, T. Kondoh and Y. Nagano (1995). A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows-II. Thermal field calculations. *Int. J. Heat Mass Tran.*, **38**(8) :1467–1481.
- [3] F. E. Ames and L. A. Dvorak (2006). The influence of reynolds number and row position on surface pressure distributions in staggered pin fin arrays. *ASME Conference Proceedings*, **2006**(4238X) :149–159.
- [4] F. E. Ames and L. A. Dvorak (2006). Turbulent transport in pin fin arrays : Experimental data and predictions. *Journal of Turbomachinery*, **128**(1) :71–81.
- [5] F. E. Ames, L. A. Dvorak and M. J. Morrow (2005). Turbulent augmentation of internal convection over pins in staggered-pin fin arrays. *Journal of Turbomachinery*, **127**(1) :183–190.
- [6] F. E. Ames, C. A. Nordquist and L. A. Klennert (2007). Endwall heat transfer measurements in a staggered pin fin array with an adiabatic pin. *ASME Conference Proceedings*, **2007**(47934) :423–432.
- [7] F. Ampofo and T. G. Karayiannis (2003). Experimental benchmark data for turbulent natural convection in an air filled square cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **46**(19) :3551 – 3572.
- [8] F. Archambeau, N. Méchitoua and M. Sakiz (2004). Code Saturne : A finite volume code for the computation of turbulent incompressible flows - Industrial applications. *Int. J. on Finite Volume, Electronical edition* : <http://averoes.math.univ-paris13.fr/html>, ISSN **1634**(0655).

BIBLIOGRAPHIE

- [9] S. Benhamadouche (2011). Flow and heat transfer in a wall-bounded pin matrix. In *Proc. 15th ERCOFTAC/IAHR Workshop on Refined Turbulence Modelling, Chatou, France*.
- [10] P. L. Betts and I. H. Bokhari (2000). Experiments on turbulent natural convection in an enclosed tall cavity. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **21**(6) :675 – 683.
- [11] D. Borello, K. Hanjalić and F. Rispoli (2005). Prediction of cascade flows with innovative second-moment closures. *J. Fluid Eng.-T. ASME*, **127**(6) :1059–1070.
- [12] J. Boussinesq (1877). *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Mémoires à l'Académie des Sciences.
- [13] J.-B. Cazalbou and P. Chassaing (2002). The structure of the solution obtained with Reynolds-stress-transport models at the free-stream edges of turbulent flows. *Phys. Fluids*, **14**(2) :597–611.
- [14] R. Cheewright, K. J. King and S. Ziai (1986). Experimental data for the validation of computer codes for the prediction of two-dimensional buoyant cavity flows. *ASME Winter Annual Meeting, Anaheim, December*, **HTD 60** :75–81.
- [15] S.-K. Choi and S.-O. Kim (2008). Treatment of turbulent heat fluxes with the elliptic-blending second-moment closure for turbulent natural convection flows. *Int. J. Heat Mass Tran.*, **51**(9–10) :2377–2388.
- [16] P. Y. Chou (1945). On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Quart. of Appl. Math.*, **3** :38–54.
- [17] B. J. Daly and F. H. Harlow (1970). Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, **13** :2634–2649.
- [18] F. Dehoux, Y. Lecocq, S. Benhamadouche, R. Manceau and L.-E. Brizzi (2012). Algebraic modeling of the turbulent heat fluxes using the elliptic blending approach—application to forced and mixed convection regimes. *Flow, Turbulence and Combustion*, **88** :77–100. ISSN 1386-6184. 10.1007/s10494-011-9366-8.
- [19] G. Delibra, D. Borello, K. Hanjalić and F. Rispoli (2009). Uprans of flow and endwall heat transfer in a pinned passage relevant to gas-turbine blade cooling. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **30**(3) :549 – 560. ISSN 0142-727X.
- [20] G. Delibra, K. Hanjalić, D. Borello and F. Rispoli (2010). Vortex structures and heat transfer in a wall-bounded pin matrix : Les with a rans wall-treatment. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **31**(5) :740 – 753. ISSN 0142-727X.

-
- [21] H. S. Dol and K. Hanjalić (2001). Computational study of turbulent natural convection in a side-heated near-cubic enclosure at a high Rayleigh number. *Int. J. Heat Mass Tran.*, **44**(12) :2323–2344.
- [22] H. S. Dol, K. Hanjalić and S. Kenjereš (1997). A comparative assessment in the second-moment differential and algebraic models in turbulent natural convection. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, **18** :4–14.
- [23] H. S. Dol, K. Hanjalić and T. A. M. Versteegh (1999). A DNS-based thermal second-moment closure for buoyant convection at vertical walls. *J. Fluid Mech.*, **391** :211–247.
- [24] P. A. Durbin (1991). Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions”. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **3** :1–13.
- [25] P. A. Durbin (1993). A Reynolds stress model for near-wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, **249** :465–498.
- [26] B. Duret, J. C. Bonnard, T. Chataing, S. Bournaud and D. Colmont (2006). Experimental results on mixed-convection around a vertical heating cylinder cooled by a cross-flow air-circulation. In *Proc. 5th Int. Symp. Turbulence, Heat and Mass Transfer, Dubrovnik, Croatia*, volume 10, pages 523–526.
- [27] L. A. Dvorak (2004). *Turbulent augmentation of heat transfer oof pin and endwall surfaces in a staggered pin fin array*. Master of science thesis, University of North Dakota.
- [28] S. Elghobashi and B. Launder (1983). Turbulent time scales and the dissipation rate of temperature variance in the thermal mixing layer. *Phys. Fluids*, **26**(9) :2415–2419.
- [29] A. Fadai-Ghotbi, R. Manceau and J. Borée (2008). Revisiting URANS computations of the backward-facing step flow using second moment closures. Influence of the numerics. *Flow Turbul. Combust.*, **81**(3) :395–414.
- [30] J. H. Ferziger and M. Perić (1996). *Computational methods for fluid dynamics*. Springer.
- [31] M. M. Gibson and B. E. Launder (1978). Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *J. Fluid Mech.*, **86**(3) :491–511.
- [32] S. B. Gunarjo (2003). *Contribution to advanced modelling of turbulent natural and mixed convection*. Thèse de Doctorat, Technical University of Delft, The Netherlands.
- [33] K. Hanjalić (2002). One-point closure models for buoyancy-driven turbulent flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **34** :321–347.

BIBLIOGRAPHIE

- [34] K. Hanjalić, S. Kenjereš and F. Durst (1996). Natural convection in partitioned two-dimensional enclosures at higher Rayleigh numbers. *Int. J. Heat Mass Tran.*, **39**(7) :1407–1427.
- [35] K. Hanjalić and B. E. Launder (1972). A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*, **52**(04) :609–638.
- [36] K. Hanjalić and B. E. Launder (2011). *Modelling Turbulence in Engineering and the Environment : Second-Moment Routes to Closure*. Cambridge university press.
- [37] K. Hanjalić, D. R. Laurence, M. Popovac and J. C. Uribe (2005). $(\overline{v'^2}/k)$ - f turbulence model and its application to forced and natural convection. In *Proc. 6th ERCOFTAC Int. Symp. on Eng. Turb. Modelling and Measurements, Sardinia, Italy*.
- [38] P. Hanjalić and Hadžiabdić (2004). A robust near-wall elliptic relaxation eddy-viscosity turbulence model for CFD. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, **25** :1047–1051.
- [39] R. Howard (2012). A wall heat transfer function for equilibrium flows - a combination of reichardt and kader profiles with wang type scaling. In *Proc. 7th Int. Symp. Turbulence, Heat and Mass Transfer, Palermo, Italy*. Soumis.
- [40] B. Ince, N.Z.and Launder (1989). On the computation of buoyancy-driven turbulent flows in rectangular enclosures. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, **10**(2) :110–117.
- [41] B. A. Kader (1991). Heat and mass transfer in pressure-gradient boundary layers. *Intl J. Heat Mass Transfer*, **34**(11) :2837–2857.
- [42] B. A. Kader and A. M. Yaglom (1972). Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows. *Intl J. Heat Mass Transfer*, **15** :2329–2351.
- [43] N. Kasagi and M. Nishimura (1997). Direct numerical simulation of combined forced and natural turbulent convection in a vertical plane channel. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, **18**(1) :88–99.
- [44] S. Kenjereš (1998). *Numerical Modelling of Complex Buoyancy-Driven Flows*. Thèse de Doctorat, Delft University of Technology.
- [45] S. Kenjereš, S. Gunarjo and K. Hanjalić (2005). Contribution to elliptic relaxation modelling of turbulent natural and mixed convection. *Int. J. Heat Fluid Fl.*, **26**(4) :569–586.
- [46] K. J. King (1989). *Turbulent natural convection in rectangular air cavities*. Thèse de Doctorat, Queen Mary College, University of London, UK.
- [47] Y. G. Lai and R. M. C. So (1990). On near-wall turbulent flow modelling. *J. Fluid Mech.*, **221** :641–673.

-
- [48] L. Landau and E. Lifshitz (1944). *Mechanics of Continuous Media, 1st Russian edition*. Gostekhizdat, Moscow.
- [49] B. Launder and N. Sandham, editors (2002). *Closure strategies for turbulent and transitional flows*, chapter A2. Second-moment turbulence closure modelling, by Hanjalić, K. and Jakilić, S., pages 47–101. Cambridge university press.
- [50] B. Launder and N. Sandham, editors (2002). *Closure strategies for turbulent and transitional flows*, chapter A6. Second-moment turbulence closure modelling, by Nagano, Y., pages 188–247. Cambridge university press.
- [51] B. E. Launder (1975). On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum. *J. Fluid Mech.*, **67**(3) :569–581.
- [52] B. E. Launder (1988). On the computation of convective heat transfer in complex turbulent flows. *J. Heat Transfer*, **110** :1112–1128.
- [53] B. E. Launder (1989). Second-moment closure : present... and future ? *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **10**(4) :282 – 300.
- [54] D. R. Laurence, J. C. Uribe and S. V. Utyuzhnikov (2005). A robust formulation of the v^2 - f model. *Flow Turbul. Combust.*, **73**(3–4) :169–185.
- [55] Y. Lecocq (2008). *Contribution à l'analyse et à la modélisation des écoulements turbulents en convection mixte. Application à l'entreposage des déchets radioactifs*. Thèse de Doctorat, Université de Poitiers.
- [56] Y. Lecocq, R. Manceau, S. Bournaud and L.-E. Brizzi (2008). Modelling of the turbulent heat fluxes in natural, forced and mixed convection regimes. In *Proc. 7th ERCOFTAC Int. Symp. on Eng. Turb. Modelling and Measurements, Limassol, Cyprus*.
- [57] J. L. Lumley (1978). Computational modeling of turbulent flows. In *Advances in Applied Mechanics*, volume 18, pages 123–175. Academic Press.
- [58] J. L. Lumley and A. M. Yaglom (2001). Heat and mass transfer laws for fully turbulent wall flows. *FTAC*, **66** :241–286.
- [59] R. Manceau (1999). *Modélisation de la turbulence. Prise en compte de l'influence des parois par relaxation elliptique*. Thèse de Doctorat, Université de Nantes.
- [60] R. Manceau (2005). An improved version of the Elliptic Blending Model. Application to non-rotating and rotating channel flows. In *Proc. 4th Int. Symp. Turb. Shear Flow Phenomena, Williamsburg, VA, USA*.
- [61] R. Manceau (2011). *Modélisation de la turbulence*. Habilitation à diriger les Recherches, Université de Poitiers, ENSMA, CNRS.

BIBLIOGRAPHIE

- [62] R. Manceau and K. Hanjalić (2002). Elliptic blending model : A new near-wall Reynolds-stress turbulence closure. *Phys. Fluids*, **14**(2) :744–754.
- [63] R. Manceau, M. Wang and D. Laurence (2001). Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term in Reynolds-averaged Navier–Stokes modelling. *J. Fluid Mech.*, **438** :307–338.
- [64] F. R. Menter (1994). Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA J.*, **32**(8) :1598–1605.
- [65] D. Metzger, Z. Fan and W. Shepard (1982). Pressure loss and heat transfer through multiple rows of short pin fins. In U. Grigull, J. Straub, E. Hahne and K. Stephan, editors, *Heat Transfer 1982, Volume 3*, volume 3, pages 137–142.
- [66] A. S. Monin (1965). On the symmetry of turbulence in the surface layer of air. *IZV Atm. Oceanic Phys.*, **1** :45–54.
- [67] R. D. Moser, J. Kim and N. N. Mansour (1999). Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, **11**(4) :943–945.
- [68] C. A. Nordquist (2006). *Pin fin end wall heat transfer distribution with an adiabatic pin acquired using an anfrared camera*. Master of science thesis, University of North Dakota.
- [69] R. G. Owen (1973). *An analytical turbulent transport model applied to non-isothermal fully-developed duct flows*. Thèse de Doctorat, Pennsylvania State University, États-Unis.
- [70] T. W. J. Peeters and R. A. W. M. Henkes (1992). The Reynolds-stress model of turbulence applied to the natural-convection boundary layer along a heated vertical plate. *Intl J. Heat Mass Transfer*, **35**(2) :403–420.
- [71] L. Prandtl (1945). Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. *Nachr. Akad. Wiss., Allemagne*, page 16.
- [72] W. Rodi (1976). A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *Z. Angew. Math. Mech.*, **56** :219–221.
- [73] W. Rody, editor (1980). *Turbulence models and their application in hydraulics – A state of the art review*, chapter , by Launder, B. E., pages 38–41. Book Publication of the International Association for Hydraulic Research, Delft, the Netherlands.
- [74] J. C. Rotta (1951). Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. *Z. Phys.*, **129**(6) :547–572.
- [75] A. V. S. and L. P. S. (1984). *Convection Heat Transfer*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

-
- [76] N. Shikazono and N. Kasagi (1996). Second-moment closure for turbulent scalar transport at various prandtl numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **39**(14) :2977 – 2987.
- [77] J. K. Shin, J. S. An and Y. D. Choi (2005). Elliptic relaxation second moment closure for turbulent heat flux. In *Proc. 4th Int. Symp. Turb. Shear Flow Phenomena, Williamsburg, VA, USA*.
- [78] J. K. Shin, J. S. An, Y. D. Choi, Y. C. Kim and M. S. Kim (2008). Elliptic relaxation second moment closure for the turbulent heat fluxes. *J. Turbul.*, **9**(3) :1–29.
- [79] C. C. Shir (1973). A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, **30** :1327–1339.
- [80] C. G. Speziale, S. Sarkar and T. B. Gatski (1991). Modeling the pressure-strain correlation of turbulence : an invariant dynamical system approach. *J. Fluid Mech.*, **227** :245–272.
- [81] W. Sutherland (1893). Lii. the viscosity of gases and molecular force. *Philosophical Magazine Series 5*, **36**(223) :507–531.
- [82] H. Tennekes and J. L. Lumley (1972). *A first course in Turbulence*. MIT Press.
- [83] L. Thielen, K. Hanjalić, H. Jonker and R. Manceau (2005). Predictions of flow and heat transfer in multiple impinging jets with an elliptic-blending second-moment closure. *Int. J. Heat Mass Tran.*, **48**(8) :1583–1598.
- [84] L. Thielen, K. Hanjalić, R. Manceau and H. Jonker (2001). Turbulence modelling in a single normally impinging jet. In *Proc. ASME-PVP Conference, Atlanta, USA*.
- [85] F. X. Trias, A. Gorobets, M. Soria and Oliva (2010). Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with rayleigh numbers up to 10^{11} - part i : Numerical methods and time-averaged flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **53**(4) :665 – 673.
- [86] F. X. Trias, A. Gorobets, M. Soria and Oliva (2010). Direct numerical simulation of a differentially heated cavity of aspect ratio 4 with rayleigh numbers up to 10^{11} - part ii : Heat transfer and flow dynamics. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **53**(4) :674 – 683.
- [87] F. X. Trias, M. Soria, A. Oliva and C. D. Pérez-Segarra (2007). Direct numerical simulations of two- and three-dimensional turbulent natural convection flows in a differentially heated cavity of aspect ratio 4. *J. Fluid Mech.*, **586** :259–293.
- [88] H. K. Versteeg and W. Malalasekera (1995). *An introduction to Computational Fluid Dynamics, the finite volume method*. Longman Scientific and Technical.

BIBLIOGRAPHIE

- [89] T. A. M. Versteegh and F. T. M. Nieuwstadt (1999). A direct numerical simulation of natural convection between two infinite vertical differentially heated walls scaling laws and wall functions. *Int. J. Heat Mass Tran.*, **42** :3673–3693.
- [90] J. C. Wyngaard and O. R. Coté (1974). The evolution of a convective planetary boundary layer—a higher-order closure model study. In *Boundary-Layer Met.*, 7, pages 289–308.

Annexe A

Développement 1D des R_{ij} et ε

Les équations de Reynolds et de la dissipation s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} R_{11} : 0 = & -2.\rho.R_{12}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + (1 - \alpha^3)\frac{5}{2}\frac{\varepsilon}{k}R_{22} \\ & + \alpha^3 \left(- \left(C_1\varepsilon + C'_2R_{12}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right) \left(\frac{R_{11}}{k} - \frac{2}{3} \right) - \frac{2}{3}C_4R_{12}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{4}{3}C_6\beta g\overline{u'\theta'} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu - C_S.T.R_{22}) \frac{\partial R_{11}}{\partial y} \right] - \left[(1 - \alpha^3) \frac{R_{11}}{k}\varepsilon + \alpha^3\frac{2}{3}\varepsilon \right] - 2.\beta.g.\overline{u'\theta'} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} R_{22} : 0 = & (1 - \alpha^3) \left(-5\frac{\varepsilon}{k}R_{22} \right) \\ & + \alpha^3 \left(- \left(C_1\varepsilon + C'_2R_{12}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right) \left(\frac{R_{22}}{k} - \frac{2}{3} \right) - \frac{2}{3}C_4R_{12}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \frac{2}{3}C_6\beta g\overline{u'\theta'} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu - C_S.T.R_{22}) \frac{\partial R_{22}}{\partial y} \right] - \left[(1 - \alpha^3) \frac{R_{22}}{k}\varepsilon + \alpha^3\frac{2}{3}\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} R_{33} : 0 = & (1 - \alpha^3) \left(\frac{5}{2}\frac{\varepsilon}{k}R_{33} \right) \\ & + \alpha^3 \left(- \left(C_1\varepsilon + C'_2R_{12}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right) \left(\frac{R_{33}}{k} - \frac{2}{3} \right) - \frac{2}{3}C_4R_{12}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \frac{2}{3}C_6\beta g\overline{u'\theta'} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu - C_S.T.R_{22}) \frac{\partial R_{33}}{\partial y} \right] - \left[(1 - \alpha^3) \frac{R_{33}}{k}\varepsilon + \alpha^3\frac{2}{3}\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$R_{12} : 0 = -\rho.R_{22}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \quad (\text{A.4})$$

$$+ \alpha^3 \left(- \left(C_1\varepsilon + C'_2 R_{12} \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right) \left(\frac{R_{12}}{k} \right) \right) \quad (\text{A.5})$$

$$+ \frac{k}{2} \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \left[\left(C_3 - C'_3 \sqrt{a_{kl}a_{kl}} \right) + C_4 \left(\left(\frac{R_{11}}{k} - \frac{2}{3} \right) - \frac{R_{12}}{k} \right) \right] + C_6 \beta g \overline{v'\theta'} \quad (\text{A.6})$$

$$- \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\mu - C_S.T.R_{22} \right) \frac{\partial R_{12}}{\partial y} \right] - \left[\left(1 - \alpha^3 \right) \frac{R_{12}}{k} \varepsilon \right] - \beta.g.\overline{v'\theta'} \quad (\text{A.7})$$

$$\varepsilon : 0 = C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left[T.R_{22}.\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} \right] + C'_{\varepsilon 1} \left(\frac{1}{T} \left(R_{12} \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} - \beta.g.\overline{u'\theta'} \right) \right) - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial\varepsilon}{\partial y} \right] \quad (\text{A.8})$$

avec $C'_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 1} \left[1 + A_1 (1 - \alpha^3) \sqrt{\frac{k}{v^2}} \right]$ ou $C'_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 1} \left[1 + A_1 (1 - \alpha^3) \frac{R_{12}}{\varepsilon} \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right]$

$$\overline{\theta'^2} : 0 = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\mu}{Pr} + C_{\theta\theta}\rho R_{22}T \right) \frac{\partial\overline{\theta'^2}}{\partial y} \right] + \rho \left[-2\overline{v'\theta'} \frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} - \frac{\overline{\theta'^2}}{R} \frac{\varepsilon}{k} \right] \quad (\text{A.9})$$

Ces équations montrent qu'en canal 1D, le flux thermique normal intervient dans l'équation de la température et de la variance et que le **flux tangentiel sera très important dans les termes de production par flottabilité dans les tensions de Reynolds ainsi que dans celles de la dissipation.** Une bonne modélisation de ces termes sera très utile pour les cas de convection mixte et naturelle.

Annexe B

Développements asymptotiques avec conditions aux limites de type Neumann

Précédemment les développements asymptotiques pour les flux thermiques turbulents ont été trouvés à partir d'une condition à la limite de Dirichlet. Mais si une condition à la limite de type Neumann est appliquée pour la température à l'équation totale des $\overline{u_i \theta'}$ Eq (3.1), le bilan asymptotique des flux thermiques turbulents est modifié comme le montre le tableau B.1 à partir des équations suivantes :

$$u = a_1(x,z,t)y + \mathcal{O}(y^2) \quad (\text{B.1})$$

$$v = b_2(x,z,t)y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (\text{B.2})$$

$$w = c_1(x,z,t)y + \mathcal{O}(y^2) \quad (\text{B.3})$$

$$p = p_2(x,z,t)y^2 + p_1(x,z,t)y + p_0(x,z,t) + \mathcal{O}(y^3) \quad (\text{B.4})$$

$$\theta = d_1(x,z,t)y + d_0(x,z,t) + \mathcal{O}(y^2) \quad (\text{B.5})$$

avec

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = 2\rho\nu a_2 \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = 2\rho\nu c_2 \quad (\text{B.7})$$

$$p_1 = 2\rho\nu b_2 \quad (\text{B.8})$$

$$p_2 = 3\rho\nu b_3 \quad (\text{B.9})$$

Cette fois, le bilan en proche paroi du flux thermique normal à la paroi à l'ordre dominant se réduit à un équilibre entre le terme de brouillage, la production due à la flottabilité et la

CHAPITRE B. DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES AVEC CONDITIONS AUX LIMITES DE TYPE NEUMANN

	$P_{i\theta}^U + P_{i\theta}^T$	$G_{i\theta}$	$\phi_{i\theta}^*$	$D_{i\theta}^\nu$	$-\varepsilon_{i\theta}$	$D_{i\theta}^t$
$\overline{u'\theta'}$	$\mathcal{O}(y^2)$	$-g_1\beta\overline{d_0^2}$ $+ \mathcal{O}(y)$	$-2\nu\overline{a_2d_0}$ $+g_1\beta\overline{d_0^2}$ $+ \mathcal{O}(y)$	$(\kappa + \nu)\overline{a_1d_1}$ $+2\nu\overline{a_2d_0}$ $+ \mathcal{O}(y)$	$-(\kappa + \nu)\overline{a_1d_1}$ $+ \mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^2)$
$\overline{v'\theta'}$	$\mathcal{O}(y^3)$	$-g_2\beta\overline{d_0^2}$ $+ \mathcal{O}(y)$	$-2\nu\overline{b_2d_0}$ $+g_2\beta\overline{d_0^2}$ $+ \mathcal{O}(y)$	$2\nu\overline{b_2d_0}$ $+ \mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^3)$
$\overline{w'\theta'}$	$\mathcal{O}(y^2)$	$-g_3\beta\overline{d_0^2}$ $+ \mathcal{O}(y)$	$-2\nu\overline{c_2d_0}$ $+g_3\beta\overline{d_0^2}$ $+ \mathcal{O}(y)$	$(\kappa + \nu)\overline{c_1d_1}$ $+2\nu\overline{c_2d_0}$ $+ \mathcal{O}(y)$	$-(\kappa + \nu)\overline{c_1d_1}$ $+ \mathcal{O}(y)$	$\mathcal{O}(y^2)$

TAB. B.1 – Comportement asymptotique des termes du bilan des flux thermiques turbulents avec flux imposé à la paroi. (y représente la distance à la paroi.)

diffusion moléculaire : $G_{2\theta} + \phi_{2\theta}^* + D_{2\theta}^\nu = 0$. La dissipation est d'un ordre supérieur avec cette condition limite. Pour rappel, l'équilibre obtenu avec une condition à la limite de type Dirichlet pour la température est : $\phi_{2\theta}^* - \varepsilon_{2\theta} + D_{2\theta}^\nu = 0$. En convection forcée, la production due à la flottabilité est nulle et l'équilibre se réduit pour la composante normale à $\phi_{2\theta}^* + D_{2\theta}^\nu = 0$. Pour des écoulements en convection naturelle, la production par flottabilité devient un des termes dominant. C'est pourquoi si une condition aux limites de type Neumann est appliquée à la température, la production par flottabilité doit être prise en compte dans les modèles de proche paroi et principalement dans le modèle de $\phi_{i\theta}^w$.

Une solution simple mais qui reste à être étudiée plus en détails est d'introduire le terme de flottabilité $G_{i\theta}$ dans le modèle de $\phi_{i\theta}^w$ tel que :

$$\phi_{i\theta}^w = -\frac{\varepsilon}{k}\overline{u'_j\theta'}n_in_j + g_i\beta\overline{\theta'^2} \quad (\text{B.10})$$

On pourra faire de même pour la dynamique, en introduisant le terme de flottabilité G_{ij} dans le modèle de paroi ϕ_{ij}^w , tel que :

$$\phi_{ij}^w = -5\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u'_i u'_k}n_jn_k + \overline{u'_j u'_k}n_in_k - \frac{1}{2}\overline{u'_l u'_l}n_kn_l(n_in_j + \delta_{ij})\right) + \beta g_j\overline{u'_i\theta'} + \beta g_i\overline{u'_j\theta'} \quad (\text{B.11})$$

L'avantage de ces solutions est qu'elles ne changent pas la puissance du facteur de pondération elliptique pour les flux thermiques turbulents ($n = 1$) et pour les tensions de Reynolds ($n = 3$). Malgré tout, des investigations sont nécessaires afin de valider ces modèles qui ne seront pas détaillées dans la présente thèse.

Annexe C

Différentes versions d'EB-RSM utilisées

L'EB-RSM de Thielen et al. [83] est utilisé par Shin et al. [78] et Choi et al. [15]. On donne ci-dessous les équations du modèle :

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1 \quad (\text{C.1})$$

$$\text{avec } L = C_L \max \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \right).$$

$$\phi_{ij} = (1 - \alpha^2) \phi_{ij}^w + \alpha^2 \phi_{ij}^h$$

avec :

$$\phi_{ij}^w = -5 \frac{\varepsilon}{k} \left(R_{ik} n_j n_k + R_{jk} n_i n_k - \frac{1}{2} R_{kl} n_k n_l (n_i n_j + \delta_{ij}) \right)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^h = & - \left(C_1 \varepsilon + C_2 P_k \right) a_{ij} + \left(C_3 - C_3' (a_{kl} a_{kl})^{0.5} \right) k S_{ij} \\ & + C_4 k \left(a_{ik} S_{jk} + a_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) + C_5 k (a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik}) \\ & - C_6 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right) \end{aligned}$$

$$\underline{n} = \frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|}$$

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \alpha^2) \varepsilon_{ij}^w + \alpha^2 \varepsilon_{ij}^h$$

CHAPITRE C. DIFFÉRENTES VERSIONS D'EB-RSM UTILISÉES

avec,

$$\varepsilon_{ij}^w = \frac{R_{ij}}{k} \varepsilon$$

$$\varepsilon_{ij}^h = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$$

Le temps caractéristique utilisé dans l'équation de la dissipation est :

$$T = \max \left(\frac{k}{\varepsilon}, C_T \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right)$$

La constante C'_{ε_1} de l'équation de la dissipation est :

$$C'_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1} \left(1 + A_1 (1 - \alpha^2) \sqrt{\frac{k}{R_{ij} n_i n_j}} \right)$$

Les différentes constantes utilisées sont :

$$C_1 = 1,7; C'_2 = 0,9; C_3 = 0,8; C'_3 = 0,65; C_4 = 0,625; C_5 = 0,2; C_{\varepsilon_1} = 1,44; A_1 = 0,03; C_L = 0,161; C_\eta = 80; C_T = 6; C_{\varepsilon_1} = 1,44; A_1 = 0,03; C_L = 0,161; C_\eta = 80; C_T = 6$$

Shin et al. [78] ont repris ce modèle et ont choisi pour le terme de flottabilité $C_6 = 1,5$ et pour le ratio des échelles thermo-mécanique qui intervient dans le calcul de la variance de la température $\overline{\theta'^2}$, $R = 0,625$. On peut remarquer qu'une valeur de C_6 supérieure à 1 revient à changer le signe de la gravité dans ϕ_{ij} .

Choi et al. [15] ont eux choisi dans un premier temps une valeur plus raisonnable de la constante du terme de flottabilité : $C_6 = 0,3$ et une valeur plus usuelle pour le ratio des échelles thermo-mécanique $R = 0,5$.

N'obtenant pas de solution en accord avec l'expérience, Choi et al. [15] ont modifié le modèle de Thielen et al. [83] aux niveaux des constantes suivantes :

- $0,13 \leq C_L \leq 0,18$ au lieu de $C_L = 0,161$. Valeur choisie dans l'intervalle en fonction du cas et du modèle utilisé
- $C'_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1} \left(1 + 0,1 \frac{P + G}{\varepsilon} \right)$ à la place de $C'_{\varepsilon_1} = C_{\varepsilon_1} \left(1 + A_1 (1 - \alpha^2) \sqrt{\frac{k}{R_{ij} n_i n_j}} \right)$
- $C_{\varepsilon_2} = 1,92$ au lieu de $C_{\varepsilon_2} = 1,83$
- $C_\eta = 50$ au lieu de $C_\eta = 80$

Pour résumer, le tableau C.1 compare les modèles EB-RSM utilisés par Shin et al. [78] et Choi et al. [15] utilisés au chapitre 6 par rapport au modèle Thielen et al. [83] et le tableau C.2 les compare par rapport à l'EB-RSM modifié dans cette thèse.

EB-RSM	Thielen et al. [83]	Shin et al. [78]	Choi et al. [15]	Choi et al. [15] modifié
A_1	0,03	0,03	0,03	0,1
$X_{\varepsilon 1}$	$(1 - \alpha^2) \sqrt{\frac{k}{R_{ij} n_i n_j}}$	$(1 - \alpha^2) \sqrt{\frac{k}{R_{ij} n_i n_j}}$	$(1 - \alpha^2) \sqrt{\frac{k}{R_{ij} n_i n_j}}$	$\frac{P+G}{\varepsilon}$
$C_{\varepsilon 2}$	1,83	1,83	1,83	1,92
C_6	/	1,5	0,3	0,3
C_η	80	80	80	50
C_L	0,161	0,161	0,161	$0,13 \leq C_L \leq 0,18$
R	/	0,625	0,5	0,5

TAB. C.1 – Différence modèle EB-RSM. A_1 , $X_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ interviennent dans l'équation de la dissipation où $X_{\varepsilon 1}$ et A_1 sont telles que $C'_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 1} (1 + A_1 X_{\varepsilon 1})$; C_6 est utilisée dans ϕ_{ij}^h ; C_η et C_L interviennent dans le calcul de l'échelle de longueur; et R est le ratio des échelles de temps thermo-mécanique.

EB-RSM	Dehoux et al. [18]	Shin et al. [78]	Choi et al. [15]	Choi et al. [15] modifié
n	3	2	2	2
A_1	0,1	0,03	0,03	0,1
$X_{\varepsilon 1}$	$(1 - \alpha^3) \frac{P}{\varepsilon}$	$(1 - \alpha^2) \sqrt{\frac{k}{R_{ij} n_i n_j}}$	$(1 - \alpha^2) \sqrt{\frac{k}{R_{ij} n_i n_j}}$	$\frac{P+G}{\varepsilon}$
$C_{\varepsilon 2}$	1,83	1,83	1,83	1,92
C_6	0,55	1,5	0,3	0,3
C_η	80	80	80	50
C_L	0,122	0,161	0,161	$0,13 \leq C_L \leq 0,18$
R	$(1 - \alpha_\theta^3) Pr + \alpha_\theta^3 0,5$	0,625	0,5	0,5

TAB. C.2 – Différence modèle EB-RSM. n est la puissance de α ; A_1 , $X_{\varepsilon 1}$, et $C_{\varepsilon 2}$ interviennent dans l'équation de la dissipation où $X_{\varepsilon 1}$ et A_1 sont telles que $C'_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 1} (1 + A_1 X_{\varepsilon 1})$; C_6 est utilisée dans ϕ_{ij}^h ; C_η et C_L interviennent dans le calcul de l'échelle de longueur; et R est le ratio des échelles de temps thermo-mécanique.

Annexe D

Canal en Convection forcée : Cas

$$Pr = 0,025$$

D.1 Tests *a priori*

Ce cas est le même que précédemment sauf pour la thermique car le nombre de Pr est cette fois égal à 0,025 au lieu de 0,71. Les différences n'interviennent qu'en thermique. Cette fois la valeur de R dans la zone homogène tend vers 0,25. L'utilisation d'une échelle de longueur dynamique semble convenir pour retrouver la courbe de R , comme le montre la figure D.1. Les figures D.2 et D.3 montrent que l'utilisation d'une échelle de longueur

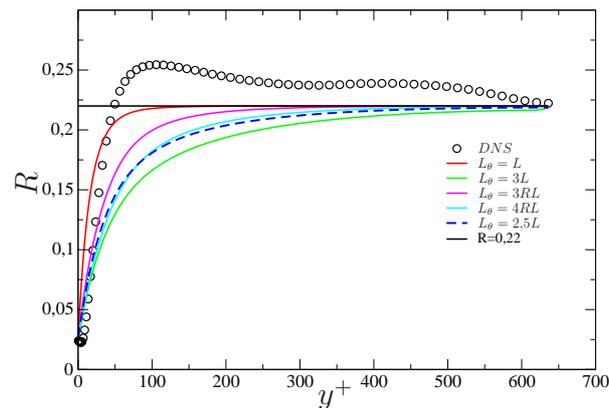


FIG. D.1 – Ratio des échelles de temps thermique et dynamique R

thermique $L_\theta = 2,5L$ est globalement la mieux adaptée. Pour information, seul le quatrième modèle est utilisé dans cette annexe.

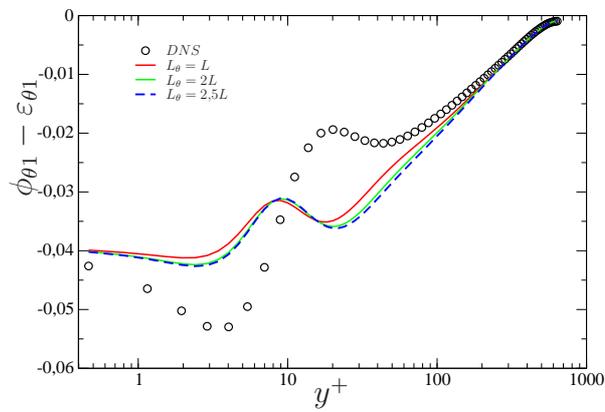


FIG. D.2 – $\phi_{\theta 1} - \varepsilon_{\theta 1}$

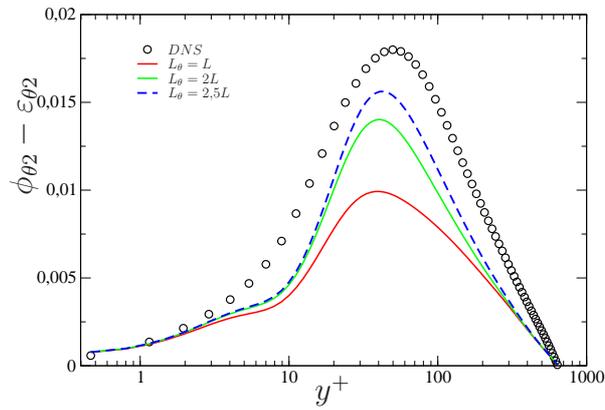


FIG. D.3 – $\phi_{\theta 2} - \varepsilon_{\theta 2}$ en convection forcée de Abe et al. [1]

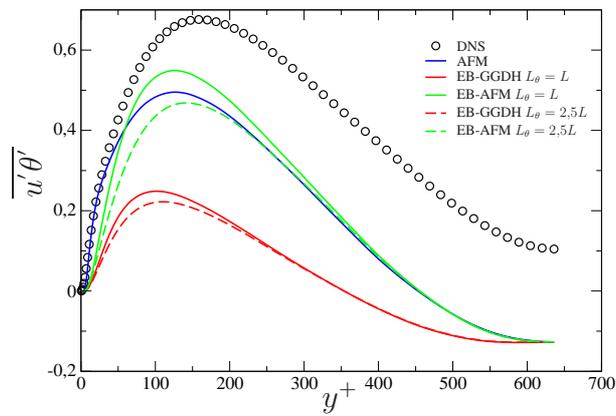


FIG. D.4 – $\overline{u'\theta'}$

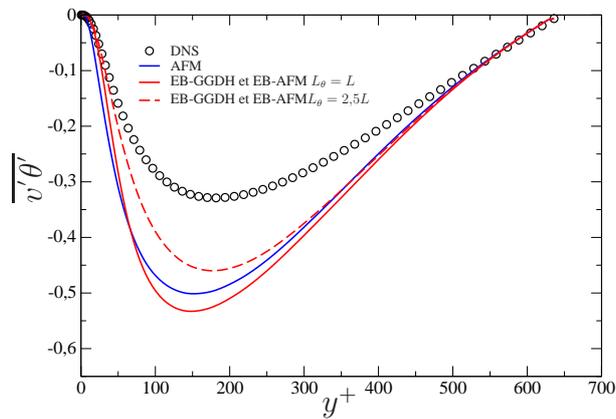


FIG. D.5 – $\overline{v'\theta'}$ en convection forcée de Abe et al. [1]

D.2 Tests *a posteriori*

La thermique étant passive, la dynamique est inchangée. En revanche le nombre de Prandtl étant 30 fois plus petit, les variables thermiques sont considérablement changées.

D.2.1 Echelle de longueur

On refait les mêmes tests qu'à $Pr = 0,71$. On peut remarquer qu'utiliser une échelle de longueur dynamique pour le $\overline{u'\theta'}$ semble plus appropriée, alors que pour $\overline{v'\theta'}$ on préférera utiliser une échelle de longueur thermique. Sur ce cas $\overline{u'\theta'}$ intervient dans aucune équation donc l'utilisation d'une échelle de longueur thermique paraît également préférable à $Pr = 0,025$.

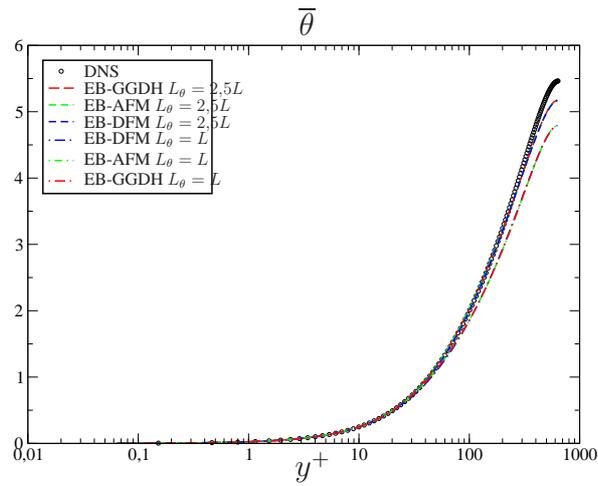


FIG. D.6 – $\bar{\theta}$

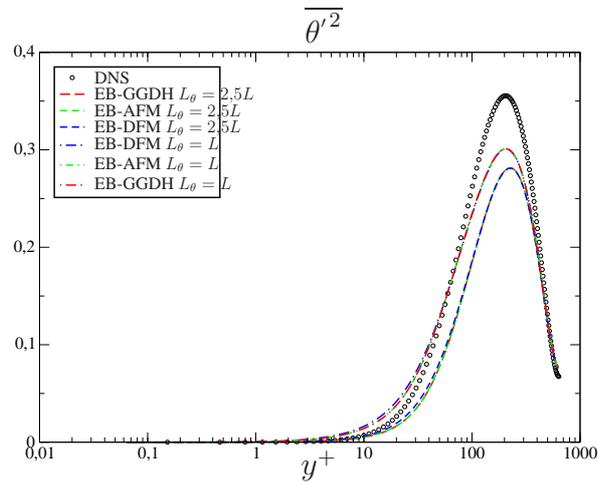


FIG. D.7 – $\overline{\theta'^2}$ en convection forcée de Abe et al. [1]

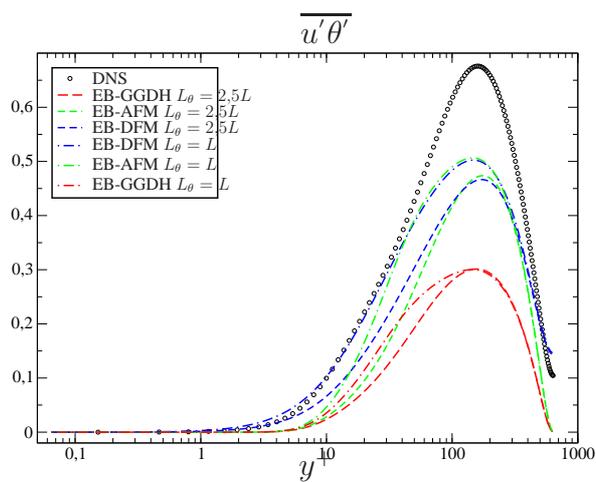


FIG. D.8 – $\overline{u'\theta'}$

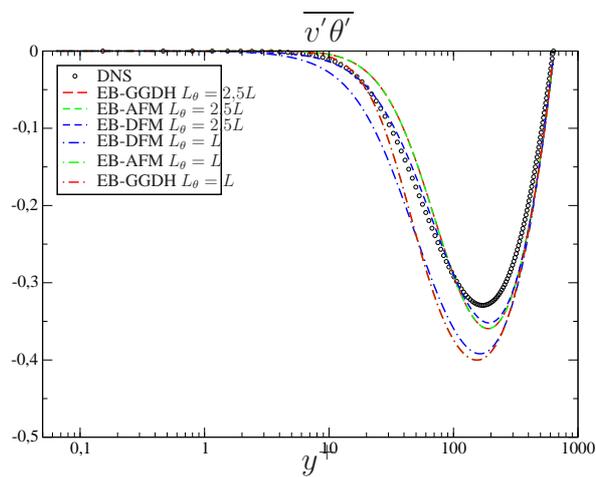


FIG. D.9 – $\overline{v'\theta'}$ en convection forcée de Abe et al. [1]

D.2.2 Comparatif de modèles à équations de transports

Différentes version des modèles à équations de transports sont comparés. Les détails des modèles sont disponibles en annexe C.

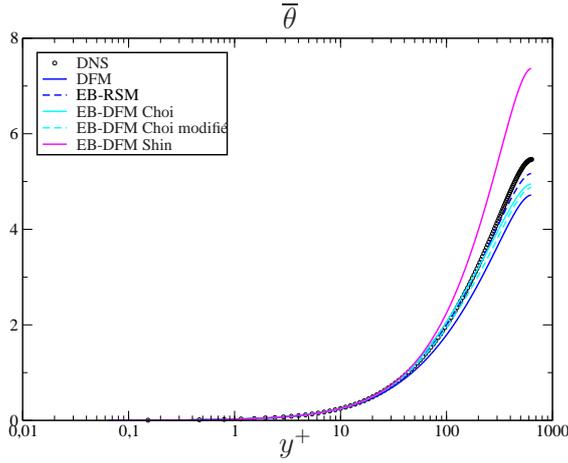


FIG. D.10 – $\bar{\theta}$ Abe et al. [1].

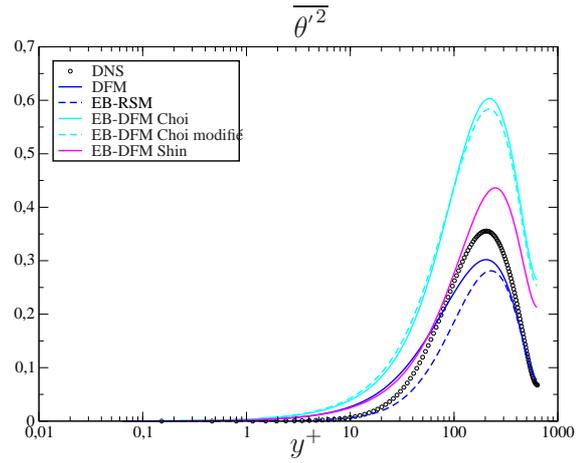


FIG. D.11 – $\overline{\theta'^2}$ Abe et al. [1].

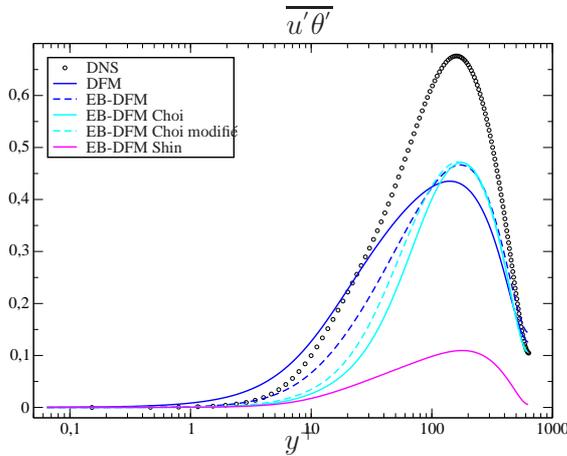


FIG. D.12 – $\overline{u'\theta'}$ Abe et al. [1].

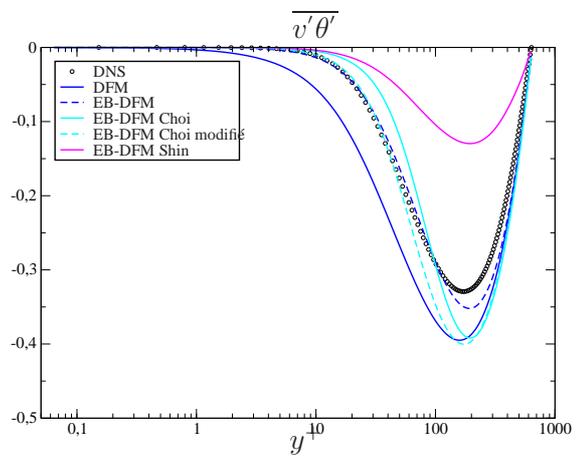


FIG. D.13 – $\overline{v'\theta'}$ Abe et al. [1].

On peut remarquer que le modèle de Shin et al. [78], qui donne des résultats satisfaisant en canal en convection forcée à $Pr = 0,71$, est mauvais pour les variables thermiques : $\overline{\theta'^2}$, les $\overline{u_i'\theta'}$ et la température $\bar{\theta}$.

D.2.3 Comparatif de différents modèles de $\overline{u'_i\theta'}$

Ici les différents modèles de flux thermiques algébriques SGDH, GGDH, AFM, EB-GGDH et EB-AFM, ainsi que les modèles à équations de transports DFM et EB-DFM sont comparés entre eux.

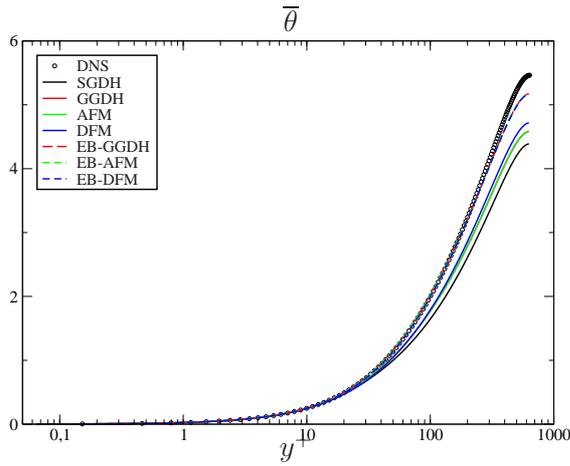


FIG. D.14 – $\bar{\theta}$ Abe et al. [1].

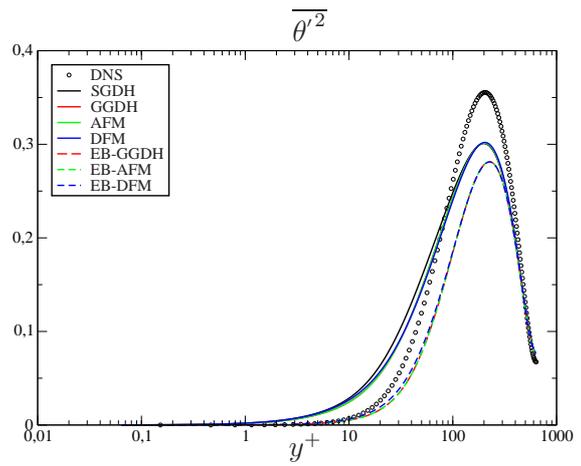


FIG. D.15 – $\overline{\theta'^2}$ Abe et al. [1].

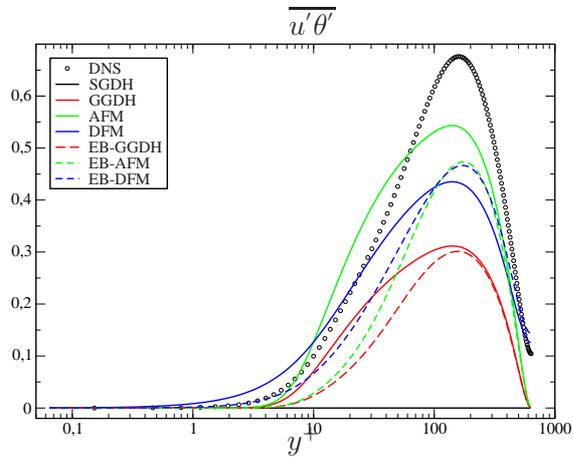


FIG. D.16 – $\overline{u'\theta'}$ Abe et al. [1].

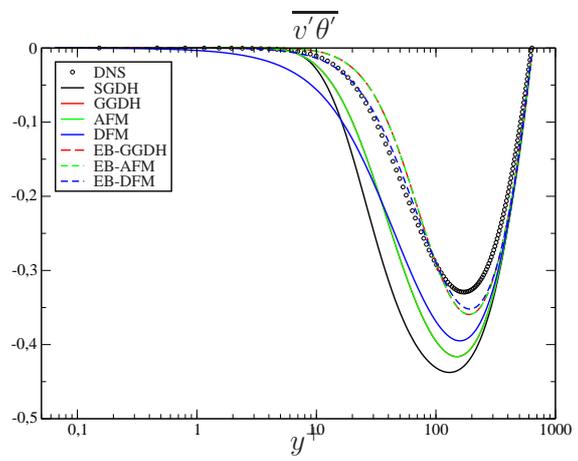


FIG. D.17 – $\overline{v'\theta'}$ Abe et al. [1].

CHAPITRE D. CANAL EN CONVECTION FORCÉE : CAS $PR = 0,025$

En conclusion pour ce cas, on peut dire que les modèles utilisant la pondération elliptique donnent des meilleurs résultats que leur variante sans sur ce cas et en particulier sur les composantes normales des flux thermiques turbulents et donc de la température ; même si les hypothèses qui ont permis de les construire ne sont plus adaptées. Une analyse plus approfondie reste nécessaire.

Annexe E

Présentation de *Code_Saturne*

Code_Saturne est un code de mécanique des fluides généraliste pouvant simuler des écoulements laminaires ou turbulents, incompressibles ou faiblement dilatables, sur des maillages structurés ou non structurés (Archambeau et al. [8]). Ce code est *Open_Source* et est disponible à l'adresse suivante <http://code-saturne.org/>. Le code est massivement parallèle et dispose également de modules qui prennent en compte les physiques particulières, on peut ainsi citer le module atmosphérique, le module aeroréfrigérant, le module de magnétohydrodynamique, le module de turbomachine, le module d'ALE pour l'interaction fluide structure, etc.

On va ici se borner à une présentation succincte du module de base ainsi que de la discrétisation retenue pour la résolution des équations. *Code_Saturne* résout les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible avec les équations éventuelles des modèles de turbulence et enfin les équations de transport des scalaires comme la température où la concentration d'une espèce.

La discrétisation retenue est un θ schéma pour l'intégration temporelle associée à une méthode de type prédicteur correcteur et la méthode des volumes finis colocalisés pour la discrétisation spatiale.

Les équations résolues par *Code_Saturne* sont les suivantes

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{div}(\underline{u} \otimes \underline{u}) = -\underline{grad}p + \underline{div} \left[\frac{1}{2} \nu \left(\underline{grad} \underline{u} + \underline{grad} \underline{u}^T \right) \right] \quad (\text{E.1})$$

$$\underline{div}(\underline{u}) = 0 \quad (\text{E.2})$$

Le ν contient la viscosité cinématique moléculaire mais peut aussi contenir la viscosité turbulente pour les modèle utilisant l'hypothèse de Boussinesq ou pour la LES. On résout également les équations des variables turbulentes puis les équations de transport d'un scalaire T

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{grad}(T) = \text{div}(\kappa \underline{grad}T) \quad (\text{E.3})$$

Où κ peut également contenir un terme turbulent et un terme moléculaire.

La marche en temps de l'algorithme est basée sur la méthode de prédiction correction (Versteeg & Malalasekara [88]). A chaque itération, on réalise d'abord une étape de prédiction où on résout séparément pour chaque composantes de la vitesse une équation de transport avec un θ schéma (les autres termes qui interviennent sont pris en explicite également le terme en gradient transposé).

On note \underline{u} le champs de vitesse, p le champs de pression, \underline{q} le flux de masse, \underline{T} la matrice poids, α le coefficient d'Arakawa pour le filtre de Rhie and Chow et \underline{S} les termes sources explicites ou implicites.

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\tilde{\underline{u}}^{n+1} - \underline{u}^n}{\Delta t} + \theta \text{div}(\underline{q}^n \otimes \tilde{\underline{u}}^{n+1}) - \theta \text{div}(\mu \underline{grad} \tilde{\underline{u}}^{n+1}) + \theta \underline{S}_i \\ & = \underline{S}_e - \underline{grad}(p^{n-1+\theta}) - (1-\theta) \text{div}(\underline{q}^n \otimes \underline{u}^n) + (1-\theta) \text{div}(\mu \underline{grad} \underline{u}^n) - (1-\theta) \underline{S}_i \end{aligned}$$

Le champ prédit n'est pas à divergence nulle et on a pas résolu d'équation sur le champ de pression. On effectue donc une étape de correction en considérant l'incrément de pression $\delta p = p^{n+1} - p^n$. On résout le système suivant

$$\frac{(\rho \underline{u})^{n+1} - (\rho \tilde{\underline{u}})^{n+1}}{\Delta t} = -\underline{grad} \delta p \quad (\text{E.4})$$

$$\text{div}(\rho \underline{u}^{n+1}) = 0 \quad (\text{E.5})$$

On aboutit à une équation de Poisson sur la pression qu'on exprime avec un opérateur d'interpolation légèrement modifié I_f qui nous permet de faire disparaître les modes parasites (filtre de Rhie and Chow voir Ferziger & Perić [30]).

$$- \text{div}(T_f^n \underline{grad} \delta p^{n+1}) = \Gamma - \text{div}(\rho \tilde{\underline{u}}_f^{n+1}) \quad (\text{E.6})$$

où on a posé

$$\tilde{\underline{u}}_f^{n+1} = I_f(\rho \tilde{\underline{u}}^{n+1} + \alpha \underline{T}^n \underline{grad} p^{n+\theta}) - \alpha T_f^n \underline{grad}_f p^{n+\theta} \quad (\text{E.7})$$

avec I_f un coefficient d'interpolation linéaire et

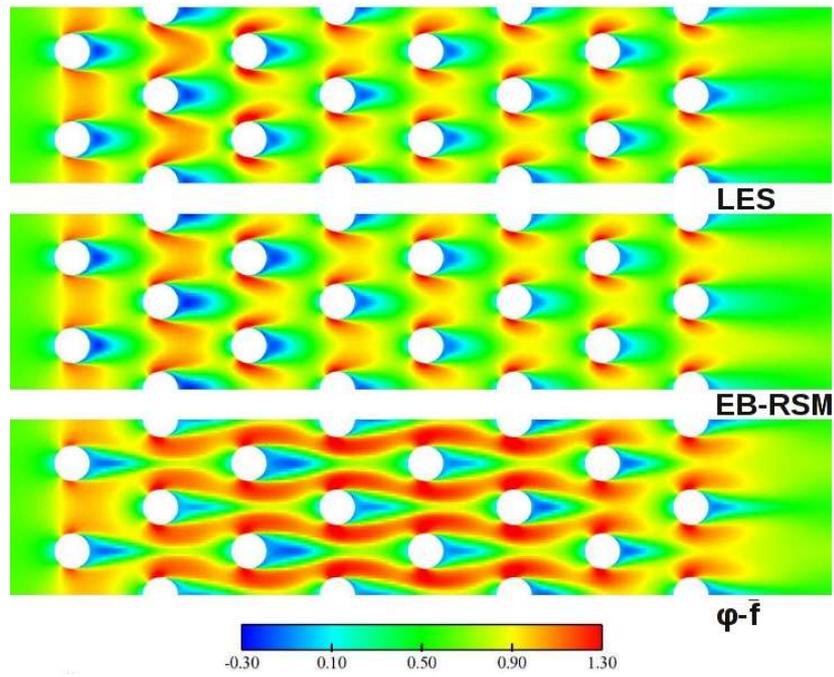
$$T_f^n = (\underline{T} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} \quad (\text{E.8})$$

Pour les calculs RANS de cette thèse, les équations de Navier-Stokes sont résolues avec le solveur Jacobi sauf la pression qui utilise le gradient conjugué associé pour le couplage

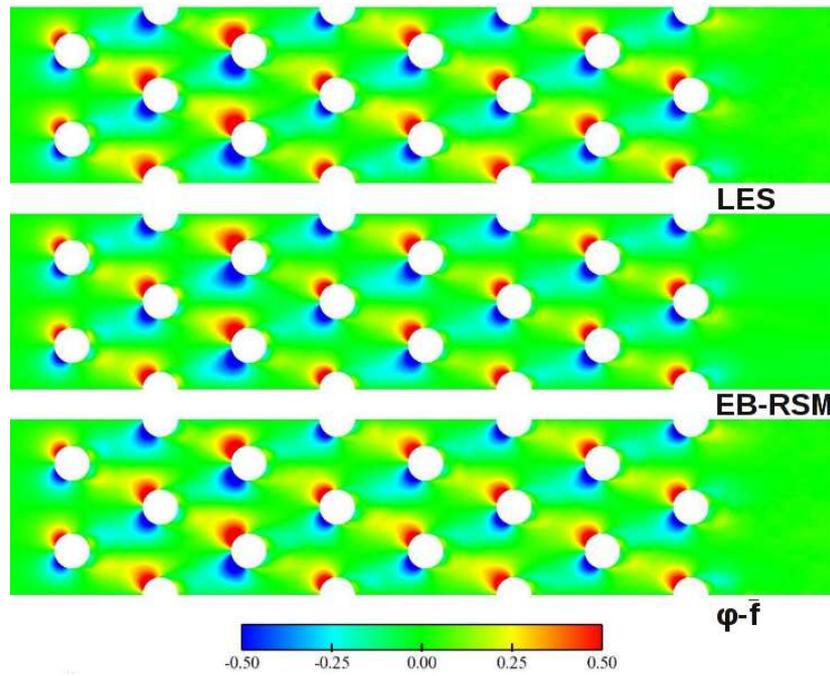
vitesse/pression à l'interpolation de Rhie & Chow et l'algorithme SIMPLEC. Pour les termes convectifs, un schéma centré au second ordre est utilisé pour la vitesse et la température et le schéma au premier ordre UPWIND est appliqué pour les autres variables. Le schéma en temps est celui d'Euler du premier ordre.

Annexe F

Simulation d'un écoulement avec transfert de chaleur à travers une matrice de tubes fins confinés avec paroi inférieure chauffée à $Re = 30000$ (convection forcée)



(a)



(b)

FIG. F.1 – U et V à $Re = 30000$.

CHAPITRE F. SIMULATION D'UN ÉCOULEMENT AVEC TRANSFERT DE CHALEUR À TRAVERS UNE MATRICE DE TUBES FINS CONFINÉS AVEC PAROI INFÉRIEURE CHAUFFÉE À $Re = 30000$ (CONVECTION FORCÉE)

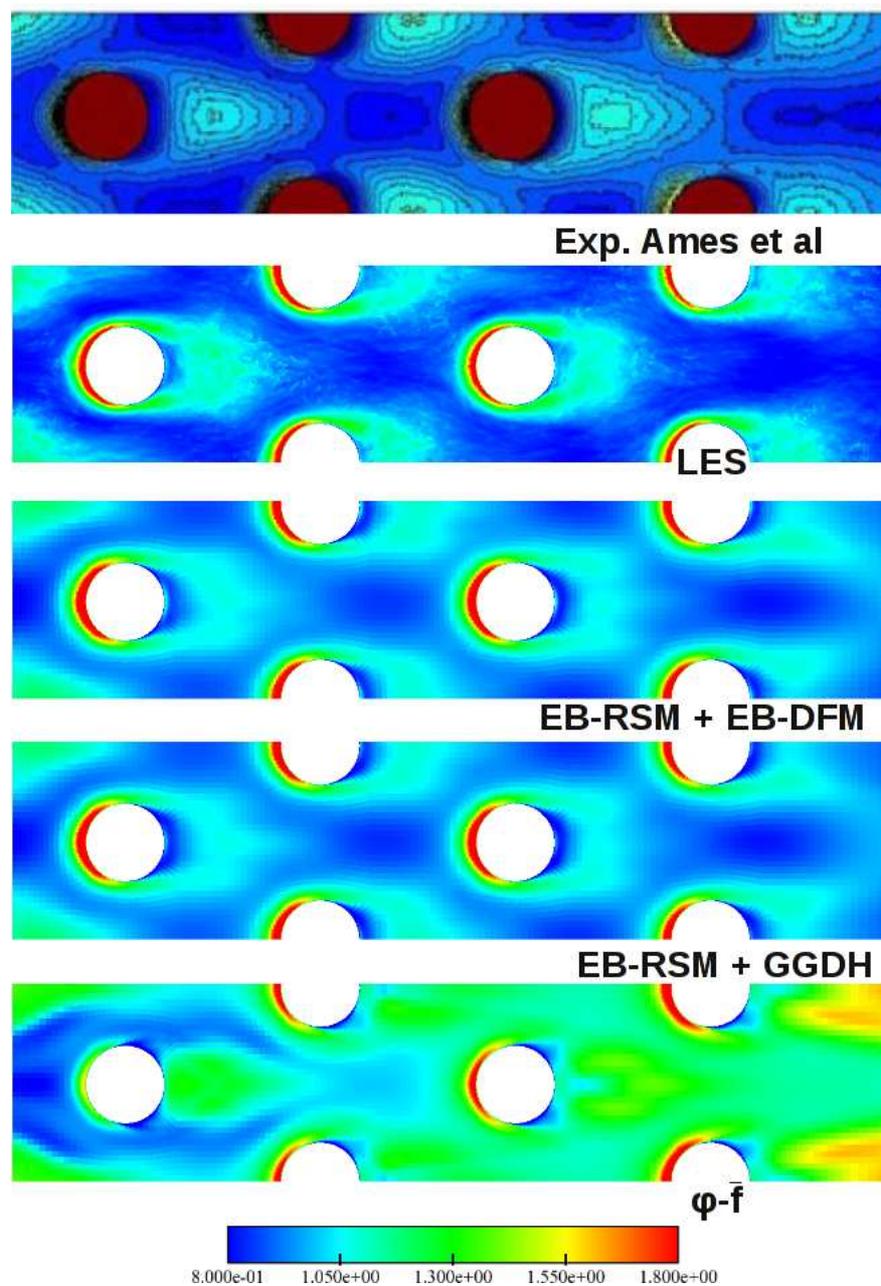


FIG. F.2 – Nu à $Re = 30000$.